

中学数学学习题集

(附题解)

下 册

莆田地区教师进修学院编

一九七九年五月

题 目 部 分

1. 已知 $a \neq b$, 试比较 $a^4 - b^4$ 与 $4a^3(a - b)$ 的大小。
2. 计算: $(0.5 \operatorname{tg} 75^\circ)^{20} \cdot (2 \operatorname{tg} 15^\circ)^{21}$ 的值。
3. 化简: $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \cdots (a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}})$
($a \neq b$)
4. 分解因式: (在有理数范围)
 - (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ (若在实数范围内呢?)
 - (2) $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$
 - (3) $bc^2 + a^2c + ab^2 - a^2b - b^2c - c^2a$
 - (4) $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2 - x^n$ (x 为不等于1的歪数)。
5. 如果 $4x^2 - 4x - 15 \leq 0$
化简: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$
6. 若 $(\frac{6}{5})^m = \frac{3}{4}$, 试求 $\sqrt{a^{2\cos\frac{\pi}{2}} - 2a^m + e^{2\log_e a^m}}$ 的值。
7. 若 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, 试证: $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} = \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}$
8. 若 x, y, z 都是实数, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$,
求证: x, y, z 中必有两个互为相反数。
9. 若 x, y, z 都是正歪数,

$$\text{且 } \sqrt[x]{a^{y-z}} \cdot \sqrt[y]{a^{z-x}} \cdot \sqrt[z]{a^{x-y}} = 1$$

($a > 0, a \neq 1$), 求证: x, y, z 中至少有两个相等。

10. 若 $(abc + bcd + cda + dab)^2 = abcd(a + b + c + d)^2$, 则 a, b, c, d 可以任意排列而成比例。

11. 已知 $abc = 1$, 求证:

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ac} = 1$$

12. 已知: $ax^3 = by^3 = cz^3$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, 求证:

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

13. 计标:

$$125^{\frac{1}{2}} + (2 - \sqrt{5})^{-1} + 8 \sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ \cdot \sqrt[6]{5 + 2\sqrt{6}} + |\sqrt{80} - 10|$$

14. 已知:

$$a, b, x \text{ 都是实数且 } (x^3 + \frac{1}{x^3} - a)^2 + (x + \frac{1}{x} - b)^2 = 0$$

求证: $b(b^2 - 3) = a$ 。

15. 已知: $2^{6a} = 3^{3b} = 6^{2c}$ 求证: $3ab - 2ac - bc = 0$

16. 若 α, β, γ 为一三角形的三个内角,

$$\text{求证: } \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

17. 已知 A 为锐角, $y = \sqrt{\operatorname{tg} A - \operatorname{ctg} A} + \sqrt{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A} + 3$

求 $\log_{\frac{1}{3}}(y \sin 2A)$ 的值

18. 设 a 是不等于 1 的正数, m, n, p, q 都是实数, 且满足

$$\text{条件: } a^m + a^n = a^p + a^q, a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q}$$

求证: $m + n = p + q$

19. 求证 $\arccos \frac{3}{7} + \arccos \frac{9}{11} = \arccos(-\frac{13}{77})$

20. 已知: $\frac{b}{c} = \cos \alpha$, $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ($c > 0, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$$(c+b)^{c-b} = (c-b)^{c+b} = a^a,$$

求证 $(\lg a)^2 = \lg(c+b) \lg(c-b)$

21. 已知三个分式:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},$$

它们的和等于1,

求证这三个分式中必有两个分式的值为1, 而另一个分式的值为-1。

22. 求 $\lg \sqrt[10]{2 \sqrt[10]{2 \sqrt[10]{\dots \dots \dots}}}$ 至无穷的值。

23. 求下列两式的平方根:

(1) $(a^2+ab+bc+ca)(b^2+bc+ca+ab)$

$\cdot (c^2+ca+ab+bc);$

(2) $\sqrt{-8x^2+22x-15} - x + 1.$

24. 若 $\sqrt{x+2y-3} + (x+3y)^2 = 0$ (x, y 都是实数)

求数列 $\frac{x}{y}, 1, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^2}, \dots$ 的通项公式及前 n 项的和。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{0.8} - \left(\frac{1}{3}\right)^{0.6}$$

25. $\frac{\quad}{\log_{a^2} 5 - \log_{a^2} 3}$ 的值是正的还是负的? 为什么?

26. 设 a, b, c 为实数, 但不全为零, 试证:

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \neq 0 \quad (\sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ 为无理数可认为已知})$$

为已知)

27. 设直角三角形勾、股、弦长分别为 a, b, c , 且 $a,$

b、c为互质的自然数，求证：c 必为奇数，a、b两数必是一奇一偶。

28. 已知 a、b、c为互不相等的正数，求证：

$$a^4 + b^4 + c^4 > a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > abc(a + b + c)。$$

29. 解不等式 $\log_{(x+4)}(x^2 - 3x - 4) < \log_{(x+4)}(5 - 3x)。$

30. 设a、b、c为互不相等的正数，求证：

$$a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c} > a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}$$

31. 解关于x的不等式： $x^{\log_a x} > \frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$

32. 设在 $\triangle ABC$ 中， $\lg \lg A + \lg \lg C = 2 \lg \lg B$

$$\text{求证：} \frac{\pi}{3} \leq B < \frac{\pi}{2}$$

33. 已知 α 、 β 、 γ 都是锐角，求证：

$$\begin{aligned} & \lg \alpha (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) + \lg \beta (\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha) \\ & + \lg \gamma (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \geq 6 \end{aligned}$$

34. 设 θ 是三角形中最小的角，且 $\cos \theta = \frac{a+1}{a-1}$ ，求实数a的范围。

35. x是什么实数时，等式 $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 2} = \sin \theta$ 能够成立
($0 < \theta < \pi$)

36. 三条线段的长分别是 $1 - a^2$ ， $1 - b^2$ ， $2 - 2ab$ ，问以此三条线段能否围成一个三角形？

37. 求证：不论x为任何实数， $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4}$ 的值一定不小于 $\frac{1}{7}$ 而不大于7。

38. 设 a 、 b 、 c 、 d 都是正数, 且 $abcd=1$, 求证:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 10$$

39. 设 $a+b>0$, n 为偶数, 求证:

$$\frac{b^{n-1}}{a^n} + \frac{a^{n-1}}{b^n} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

40. 若 x 、 y 、 z 都是实数, 且 $x+y+z=a$,

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}, a>0,$$

求证: x 、 y 、 z 都不能为负值, 也都不大于 $\frac{2}{3}a$

41. a 、 b 、 c 为三角形的边长, 求证:

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

42. 设 x 、 y 、 z 都是正数, 且 $x+y+z=a$,

$$\text{求证: } (a-x)(a-y)(a-z) \geq 8xyz$$

43. 已知 $a^2+b^2=1$, $m^2+n^2=1$

$$\text{求证: } |am+bn| \leq 1$$

44. 设 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 都是正数, 求证:

$$\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \geq \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{b_1b_2}$$

45. 解不等式:

$$(1) 1 - \frac{1}{2} \lg(x+9) < \frac{1}{2} \lg(20-x);$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} |x| < \log_{\frac{1}{2}} |x+1|;$$

$$(3) \sin x > \cos^2 x.$$

46. 证明当 a 、 b 、 c 都是实数时, 方程

$$x^2 - (a+b)x + (ab-c^2) = 0 \text{ 有实数根, 并指出这个方程的二根相等的条件.}$$

47. 设 a 、 b 、 c 、 x 都是实数, $b \neq 0$, 且

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a+c)x + b^2 + c^2 = 0$$

求证: a 、 b 、 c 成等比数列, 且公比为 x 。

48. 已知方程(I) $x^2 - (m+4)x + (m^2 + k) = 0$ 有相等的二根; 方程(II) $x^2 + mx - (5m + k) = 0$ 的一个根和方程(I)的根相等, 求 m , k 的值, 并解此两方程。

49. 解关于 x 的方程 $\frac{b}{a} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{a}{b} \left(\frac{1}{x} - 1\right) - 2$, 并加以讨论。

50. 如果 $\sin A + \cos A = k$, 求证以 $\sin A$ 和 $\cos A$ 为根的一元二次方程是 $2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$

51. 已知 $\sin \alpha$ 和 $\sin \beta$ 是方程

$$x^2 - (\sqrt{2} \cos 20^\circ)x + (\cos^2 20^\circ - \frac{1}{2}) = 0 \text{ 的两个根,}$$

求锐角 α 、 β 的度数。

52. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\lg \sin A = 0$ 而 $\sin B$ 、 $\sin C$ 是方程 $4x^2 + kx + 1 = 0$ 的两个根, 求 k 、 A 、 B 、 C 。

53. 一个三角形的两边的长是 5cm 和 3cm , 它们的夹角的余弦是方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根, 求这个三角形的面积。

54. 已知 a 、 b 、 c 是三角形的三边, 求证方程

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0 \text{ 无实根。}$$

55. 下列方程有相等的实根, 求 n 的值:

$$(1) 2x^2 - 4x + \log_{(3-n)} 25 = 0;$$

$$(2) x^2 + (n+3)x + s_{n-1} = 0。$$

(其中 s_{n-1} 系自然数列的前 $n-1$ 项的和)

56. 如果 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 且 $x^2 + tg^2\theta = 2xtg\theta$,

求证: $2x + 2x^3 + 2x^5 + \dots + 2x^{2n-1} + \dots$
 $= tg 2\theta$

57. 解方程

$$\left(\sin \frac{\pi}{36}\right) \lg(1 + \sin x) - 4 \lg \cos x + \lg(1 - \sin x) \\ = 4 \sin^2 \frac{19\pi}{6}$$

58. 已知 $tg \alpha$ 和 $tg \beta$ 是方程 $2x^2 + x - 6 = 0$ 的两个根,
求 $ctg(\alpha + \beta)$ 的值。

59. 若 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 是方程 $8x^2 + 6kx + 2k + 1 = 0$ 的两根,
求 k 值。

60. 已知 $2\sqrt{3}$ 是方程 $x^2 - (tg \theta + ctg \theta)x + 1 = 0$ 的一个根,
求 $\sin 2\theta$, $\sin \theta$, $tg \frac{\theta}{2}$ 的值。

61. 已知 $tg \alpha$ 、 $tg \beta$ 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的二根,
求 $\sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \\ + q \cos^2(\alpha + \beta)$ 的值。

62. 若 $\log_a(\alpha^2 + 4) + \log_a(\beta^2 + 9) - \log_a 3 \\ = \log_a \alpha + \log_a \beta + 3 \log_a 2,$

试解方程 $2 \sqrt{\log_x(\beta x)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \log_{\beta} \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{\alpha}} 2 = 0$

63. 解方程:

$$4^x \cdot 3^{-2x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^x - 1 = 3 \log_9 \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{3\sqrt{6}}\right) \\ - 2 \log_4 \left(\frac{7}{9} - \frac{4}{3\sqrt{6}}\right)$$

64. (1) m 为何数时, 下列方程有实数根?

$$x^2 + 2x = \log_{\frac{1}{2}} m$$

$$(2) \text{ 若 } x, y \text{ 为实数, 且 } \lg(x^2+1) + \lg(y^2+1) \\ = 3\lg 2 + \lg(x+y-2)$$

求 $\log_y x$ 的值。

65. 如果 $2(a+b+c) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, 且

$$x^2 + \alpha x - a = 0 \text{ 的两根为 } \beta, \gamma,$$

$$x^2 + \beta x - b = 0 \text{ 的两根为 } \gamma, \alpha,$$

求以 α 及 β 为根的二次方程。

66. $P(x, y)$ 是曲线 $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 16y + 14 = 0$ 在

实平面上的一个点。求 $\sqrt{x \sqrt{-y \sqrt{-y \sqrt{-y \dots}}}}$ 的值。

67. 解方程: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$ 。

68. 解方程: $\frac{(x-1)(x-2) - (x-3)(x-4)}{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-7x+12}} = \sqrt{2}$ 。

69. 解方程: $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ 。

70. 解方程: $(1 + \frac{9}{x})^{\frac{1}{2}} + 4(\frac{x}{x+9})^{\frac{1}{2}} = 4$ 。

71. 已知 $\log_{12} 27 = a$, 求证: $\log_6 2 = \frac{3-a}{3+a}$ 。

72. 已知 $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, 求 $x:y$ 。

73. 求 $\sqrt{3}(\lg x)^{\lg x} = (\cos 70^\circ)^{\log_{\cos 70^\circ} 1} \operatorname{ctg} 60^\circ$ 中 x 的值。

74. m 为怎样的实数值时, $x^2 + m(m-1)x + 36$ 是完全平方式。

75. 在方程 $x^2 - 2x + q = 0$ 中两根的差的平方等于 16, 求 q 的值。

76. m 为何值时, 方程 $9x^2 - 18mx + 8m + 16 = 0$ 的一根等于另一根的两倍?
77. m 为何值时, 方程 $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$ 和 $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$ 有一个共同的根?
78. (1) 求使关于 x 的二次方程 $x^2 - 2(1+lg a)x + 1 - lg^2 a = 0$ 有等根的 a 值;
 (2) 当 m 为何实数时, 方程 $(m+3)x^2 - mx + 1 = 0$ 有两个负根?
79. 证明一元二次方程至多只有两个不同的根。
80. 已知方程 $x^2 + px - 3 = 0$ 与 $x^2 - 4x - (p-1) = 0$ 有一公共解, 求 p 的值。
81. 从 k 的值, 讨论关于 x 的方程 $(x-2)k^2 - (3x+1)k + (2x+3) = 0$ 的解的各种情况, 并讨论在有解的情况下, 何时为正解, 负解, 零解。
82. 已知 a, b 都是实数, 求证方程 $(x-a)(x-a-b) = 1$ 有两个不等实根; 一根大于 a , 另一根小于 a 。
83. 当 m 为何值时, 方程 $x^2 - 2mx + (2m+3) = 0$
 (1) 有两个实根; (2) 没有实根; (3) 有两个负根;
 (4) 负根的绝对值大于正根的绝对值; (5) 两个根互为倒数; (6) 有一个根为 3。
84. 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根之比为 $m:n$, 求证: $mnb^2 = (m+n)^2 ac$
85. 方程 $2x^2 + (3a+1)x + 6 = 0$ 的一根与方程 $3x^2 + (2a+1)x + 2 = 0$ 的一根互为倒数, 求 a 的值。
86. k 为什么整数时, 二次方程 $(k^2-1)x^2 - 6(3k-1)x + 72 = 0$ 的两根是不相等的正整数?
87. 已知: a, b, c 都是实数且方程

$$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$$

有等根，求证： $a=b=c$

88. 已知方程 $4x^2+m=5x$ 的两个根是一个直角三角形的两锐角的正弦，求 m 的值。

89. 设 $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+cd=0$ 有非零的公共根 c ，求证：其它两根为 $x^2+cx+bd=0$ 的根。

90. 二次方程 $x^2-4x\cos 2\theta+2=0$ 和 $2x^2+4x\sin 2\theta-1=0$ 有一个根互为倒数，求 θ 的值。
($0<\theta<\pi$)

91. 已知二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $tg\theta$ 和 $tg(\frac{\pi}{4}-\theta)$ ，且它们之比为 $3:2$ ，求 p 、 q 之值。

92. m 为何值时二次方程 $(5m+1)x^2+(7m+2)x+3m=0$
(1)有实根；(2)有两个正实根；(3)有两个负实根；
(4)有一个正实根和一个负实根；(5)有一个根为零。

93. 设 A 、 B 、 C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，且方程 $(\sin B - \sin A)x^2 + (\sin A - \sin C)x + (\sin C - \sin B) = 0$ 的两个根相等，证明角 B 不超过 60° 。

94. 设方程 $a\cos x + b\sin x + c = 0$ ，在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 中有相异的根 α 、 β ，求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值。

95. 如果方程 $x^2-2px+3q=0$ 的一根是另一根的 3 倍；
方程 $x^2+qx+3p=0$ 的一根是另一根的二分之一。
求实数 p 、 q 的值 (p 、 q 都不为零)。

96. 解下列关于 x 的方程：

$$(1) x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+1);$$

$$(2) x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}=0;$$

$$(3) \sqrt{\log_x \sqrt{5x} \log_5 x} = -1;$$

$$(4) 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6;$$

$$(5) 2^{\sqrt{6} \operatorname{tg} 2x \cdot \cos 3x - 3\sqrt{2} \cos 3x + \sqrt{3} \operatorname{tg} 2x} \\ = (\sin \frac{29}{6} \pi)^{-3} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2});$$

$$(6) \arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$(7) {}_x \lg^2 x + \lg x^3 + 3 = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}};$$

$$(8) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2x+a}{x^2-x-2},$$

并讨论a为何值时其解为正数或负数。

97. 已知两个最简根式 $3a+2\sqrt{4a+3b}$ 与 $b+4\sqrt{2a-b+6}$ 是同类根式, 求a、b的值。

98. n为何整数时, 方程组 $\begin{cases} nx-y=5 \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$ 的解满足条件

$$x > 0, \quad y < 0?$$

99. 三角形三边成等差数列, 公差为1, 且最大角为最小角的二倍, 求这个三角形各边的长。

100. $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$ 平方尺, 周长为20尺, 且角A为 60° , 求这三角形的三边长。

101. 求下列各函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}; \quad (2) y = \lg \frac{1}{1-\sqrt{1-x}};$$

$$(3) y = \sqrt{\lg \frac{2x^2 - 3x - 18}{x^2 - 5x + 6}};$$

$$(4) y = \frac{\sqrt{\log_{0.5}(2x-1)}}{|x| - 0.8};$$

$$(5) y = \log_{(3x-2)}(25-5^x);$$

$$(6) y = \arcsin(\operatorname{tg} x);$$

$$(7) f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{|x|-1};$$

(8) 凸多边形的对角线数目 $f(n)$ 是该多边形的边数 n 的函数。

102. 求下列各函数的值域 (x 为实数)

$$y = \frac{1}{(x-1)(2x-1)}; \quad (2) y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

103. 求证: (1) 两个奇 (偶) 函数的和仍为奇 (偶) 函数;

(2) 两个奇 (偶) 函数的积为偶函数;

(3) 奇函数和偶函数的积为奇函数。

104. 当 m 为何值时, 函数 $y = (2m^2 + 5m - 12)x^{m^2 - 3m + 1}$ 中

(1) x 与 y 成正比例的关系, 并且它的图象 (直线) 的倾斜角为钝角;

(2) x 与 y 成反比例的关系, 并且它的图象 (双曲线) 两分支分别在 I、III 两象限。

105. 画出函数 $y = \sqrt{(x-1)^2 + |x+4| - 9}$ 的图象, 并求它与 x 轴所围成图形的面积。

106. 当 k 为何整数时, 二次函数 $y = (k+1)x^2 - 2(k-1)x + 3(k-1)$ 的图象开口向上, 并且和 x 轴有两个交点:

(1) 求这二次函数的解析式;

(2) 当 x 为何值时, $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$;

- (3) 当 x 为何值时, 函数值是递增或递减;
- (4) 函数有怎样的极值;
- (5) 画出函数的图象。
107. 两个指数函数 $y_1 = a^{2x^2+x}$ 和 $y_2 = a^{x^2+4x-2}$, 试根据 a 的不同情况, 求当 x 为何值时, (1) $y_1 = y_2$; (2) $y_1 > y_2$; (3) $y_1 < y_2$ 。
108. 在对数函数 $y = \log_{\frac{1}{4}m^2(4m-m^2)} x$ 中, 当 m 为何值时, 这个函数是(1)增函数; (2)减函数, 并写出它的解析式。
109. 已知二次函数 $y = f(x)$ 的图象经过 $(-1, 0)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(-2, -5)$ 三点。
- (1) 求出 $f(x)$ 的图象的顶点, 对称轴与坐标轴交点, 并作出这函数的图象;
- (2) 求出 $f(x)$ 的极值, 并讨论它的增减性;
- (3) 自变量取何值时, 函数取正值? 取负值?
- (4) 怎样从 $y = f(x)$ 的图象得到 $y = x^2$ 的图象?
110. 抛物线 $y = (m-n)x^2 - mx + (2m+n)$ 切直线 $y - 4 = 0$ 于上方, 若以 $y - 4 = 0$ 为对称轴, 则它的对称图形与 x 轴相交, 其一交点为 $(-1, 0)$, 求这抛物线方程。
111. 已知二次函数 $y = (2m-3n)x^2 + nx + (m+n)$ 的图象在 y 轴上的截距为3, 且与直线 $y = 2(m-n)x + 2n$ 相切, 求此二次函数的解析式。
112. m 为何实数时, 函数 $y = 2(3m-2)x^2 + 4mx + m+1$ 的图象,
- (1) 永远在 x 轴下方; (2) 与 x 轴有交点并且都在 x 轴负方向。
113. 已知 $\triangle ABC$ 中的三角 A 、 B 、 C 成等差数列, 且 $\lg a$ 、

$\lg b$ 、 $\lg c$ 也成等差数列 (a 、 b 、 c 分别系 A 、 B 、 C 的对边)。求证: $x^2 \cos A + x + 1$ 永远为正值。

114. 当 m 为何整数时, 直线 $x + y = m$ 与 $x - y = 2$ 交点在第
四象限。

115. 如 x 、 y 都是实数, 且 $y = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$

试求: $\log_{\sqrt{2}}(x+y+1)^2$ 的值。

116. 定 a 、 b 的值, 使 $y = \frac{ax^2 + 8x + b}{x^2 + 1}$ 的最大值是9, 最小值是1。

117. 已知 $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 9 = 0$, 求实数 x 和 y 的最大值
与最小值。

118. 求 $y = 3 - 2\sin x - 2\cos^2 x$ 的极值。

119. 设 x 、 y 均为实数, 且 $y = \sqrt{\frac{x-24}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{24-x}{x^2+1}} + 7$, 求
 $\log_{24}(\sqrt{y+\sqrt{x}} + \sqrt{y-\sqrt{x}})$ 的值。

120. (1) 当 x 为何值时, $y = \sqrt{2-5x-3x^2}$ 有极值? 极值是多
少?

(2) 求 $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$ 的极值。

121. (1) 当 $x + 2y = 10$ 时, 求 $\lg(\frac{1}{2}x - 1) + \lg(y + 1)$ 的最
大值;

(2) 当 $3x^2 + 2y^2 = 6x$ 时, 求 $x^2 + y^2$ 的极大值。

122. 已知 $\triangle ABC$ 中, $BC = 20\text{cm}$, $AB + AC = 50\text{cm}$, 当中
线 AD 最短时, 此三角形的面积是多少?

123. x 等于一个三角形的二边的和, 已知 $(x-1)(3-x) > 0$
且适合方程 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |x - 3| + \sqrt{11 - x} = 5$,

求这个三角形百积的根大值。

124. 要从一根圆柱树杆中, 锯出截面为矩形的柱体, 怎样锯法才能使废木料最少?

125. 已知直角三角形斜边为 c , 试求此三角形的百积和周长的最大值。

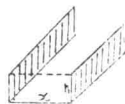
126. 现有可造猪圈围垸 l 米的材料, 要造彼此相连的 m 间百积相等的矩形猪圈(如图), (门在内垸的厚度不计), 怎样设计每间猪圈的长宽, 才能使所造的猪圈总面积最大? 按这样设计 m 间猪圈长的总和与宽的总和有什么关系?

127. (1) 把一块百积为 1.44 米²的正方形铁皮弯折成截面是矩形的水槽。



问水槽的底宽和高各多少米时, 水槽才有最大的流身?

x $\leftarrow$ m 间 $\rightarrow$



(2) 在已知球内作一个侧面积最大的内接圆柱。

(3) 在已知圆锥内作一个侧百积最大的内接圆柱。

(4) 一条粗细均匀的杠杆, 每一公尺重4公斤, 它的支点在它的一端, 在离支点1公尺处挂一重50公斤的物体, 从另一端用力把杠杆拉起使达到平衡。问杠杆应长多少公尺才最省力?

(5) 一张矩形的纸, 百积为96平方寸, 印刷时上下共留空白3寸, 左右各留1寸, 问纸张的长和宽各为多少时, 才能使印刷部分百积最大?

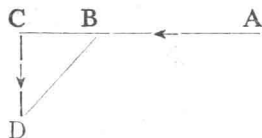
(6) 一个长方形的房屋，面积为24平方米，一边利用旧墙，不花钱，正边用木墙，每米长造价4元，另两边筑土墙，每米造价3元。问这间房屋要有怎样的平面图，造价才最省？需花多少钱？

(7) 有一个直三棱柱形水槽的直截面，底部夹角 $C = 120^\circ$ ，宽 $AB = 2$ 米。求这截面是什么样的三角形时，水槽容水最多？

(8) 屋顶的倾斜度是多少度时，雨水从屋顶上流下的时间最短？

(9) 快艇和轮船分别从A地和C地同时开出，各沿着箭头所指示的方向航行，快艇和轮船的速度分别是40海里/小时和16海里/小时，已知 $AC = 145$ 海里，经过多少小时以后，快艇和轮船之间的距离最短？

(10) 在三角形ABC中的AB和AC边上分别求出一
点P和Q，使 $BQ + QP + PC$ 为最小。



128. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，一直线分 $\triangle ABC$ 的面积为相等的两部分，且夹在 AB、BC 间的线段最短，求这条线段的长。

129. 以直角三角形的斜边（长为 L ）为轴，将此三角形旋转一周，求所得旋转体的表面积和体积的最大值。

130. (1) 两平行线间有定点 O ，以这点为直角顶点作直角三角形 DOE ，两顶点 D, E 各在平行线上，什么时候 $\triangle DOE$ 的面积为最小值？

(2) 半圆 O 的直径为2，A为直径延长线上的一点，而且 $OA = 2$ ，B为半圆周上的任意一点，以AB为一