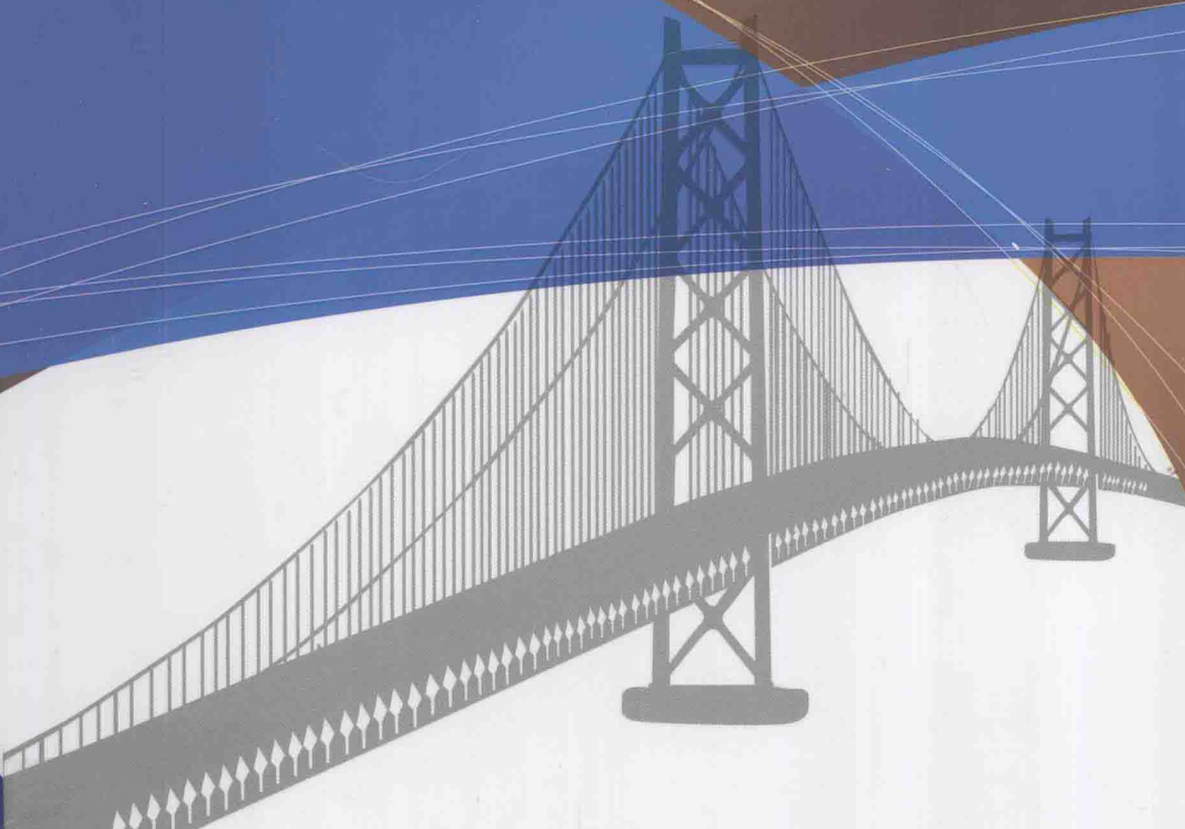
哈尔滨职业技术学院
国家骨干高职院校建设项目成果

道路桥梁工程技术专业

土木工程应用数学

徐秀艳　郭　鑫　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

哈尔滨职业技术学院
国家骨干高职院校建设项目成果

道路桥梁工程技术专业

土木工程应用数学

徐秀艳　郭　鑫　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

土木工程应用数学／徐秀艳，郭鑫主编．—北京：中国铁道出版社，2013．9

道路桥梁工程技术专业及专业群系列教材

ISBN 978－7－113－16953－4

Ⅰ．①土…　Ⅱ．①徐…　②郭…　Ⅲ．①土木工程—工程数学—高等学校—教材　Ⅳ．①TU12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 152998 号

书　　名：道路桥梁工程技术专业及专业群系列教材
　　　　　土木工程应用数学

作　　者：徐秀艳　郭　鑫　主编

策　　划：左婷婷　　　　　　读者热线：400－668－0820

责任编辑：张丽娜　何　佳

封面设计：刘　颖

责任校对：龚长江

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街 8 号）

网　　址：http：//www.51eds.com

印　　刷：北京铭成印刷有限公司

版　　次：2013 年9月第1版　　2013 年9月第1次印刷

开　　本：880 mm×1 230 mm　1/16　印张：9　字数：256 千

印　　数：1～2 000 册

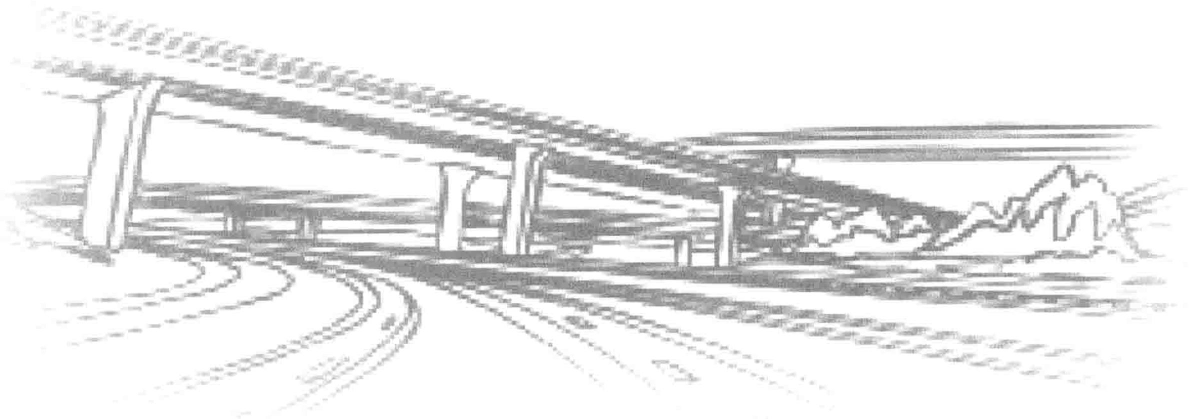
书　　号：ISBN 978－7－113－16953－4

定　　价：28.00 元

版权所有　侵权必究

凡购买铁道版图书，如有印制质量问题，请与本社教材图书营销部联系调换。电话：（010）63550836

打击盗版举报电话：（010）63549504



哈尔滨职业技术学院道路桥梁工程技术专业
教材编审委员会

主　任:王长文　哈尔滨职业技术学院校长

副主任:刘　敏　哈尔滨职业技术学院副校长

孙百鸣　哈尔滨职业技术学院教务处长

程　桢　哈尔滨职业技术学院建筑工程学院院长

张　学　哈尔滨市公路工程处总工程师

委　员:杨化奎　哈尔滨职业技术学院建筑工程学院教学总管

杨晓冬　哈尔滨职业技术学院公共基础教学部主任

彭　彤　哈尔滨职业技术学院思想政治教育部主任

王天成　哈尔滨职业技术学院道路桥梁工程技术专业带头人

马利耕　哈尔滨职业技术学院建筑工程技术专业带头人

乔孟军　哈尔滨经济技术开发区建设工程质量安全监督站站长

闫治理　哈尔滨市道路桥梁管理维修处副总经理

杨洪波　龙建路桥股份有限公司项目经理

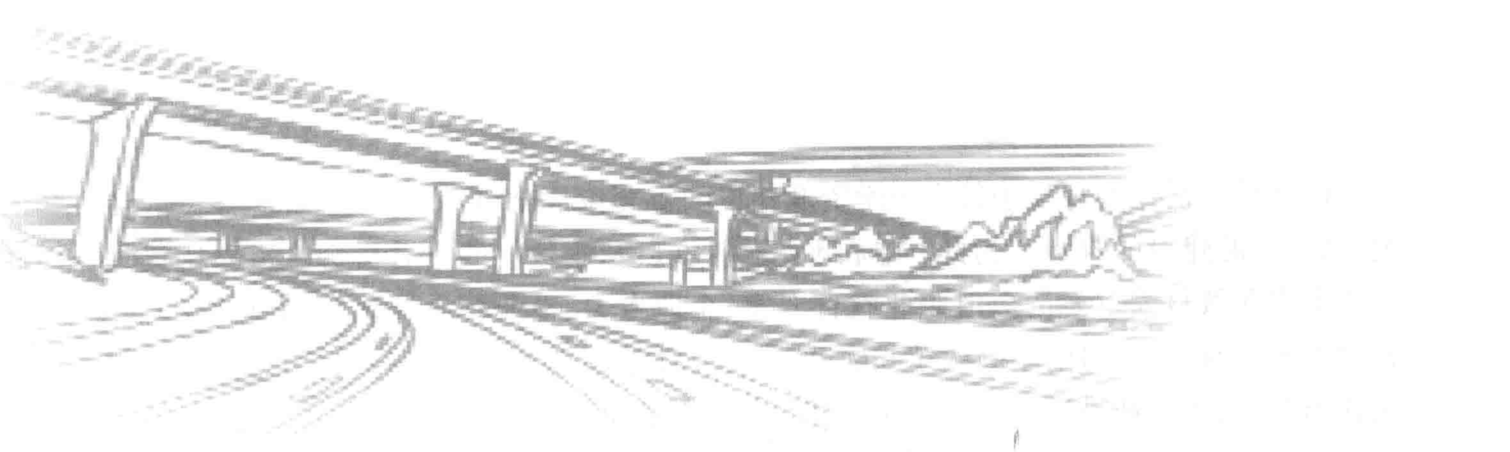
王瑞雪　哈尔滨职业技术学院建筑工程学院教师

吴丽萍　哈尔滨职业技术学院建筑工程学院教师

赵明微　哈尔滨职业技术学院建筑工程学院教师

徐秀艳　哈尔滨职业技术学院公共基础教学部教师

曹高菲　哈尔滨职业技术学院公共基础教学部教师



编写说明

为了贯彻落实《国家中长期教育改革与发展规划纲要(2010—2020)》精神,更好地适应我国走新型工业化道路,实现经济发展方式转变、产业结构优化升级,建设人力资源强国发展战略的需要,进一步发挥国家示范性高职院校的引领带动作用,构建现代高等职业教育体系,在国家百所示范高职院校建设取得显著成效的基础上,2010 年国家教育部、财政部继续加强国家示范性高等职业院校建设,启动了国家骨干高职院校建设项目,在全国遴选了 100 所国家骨干高职院校,着力推进骨干高职院校进行办学体制机制创新,增强办学活力,以专业建设为核心,强化内涵建设,提高人才培养质量,带动本地区高等职业教育整体水平提升。

哈尔滨职业技术学院于 2010 年 11 月被确定为“国家示范性高等职业院校建设计划”骨干高职院校立项建设单位。学院在国家骨干高职院校建设创新办学体制机制,打造校企“双主体育人”平台,推进合作办学、合作育人、合作就业、合作发展的进程中,以专业建设为核心,以课程改革为抓手,以教学条件建设为支撑,全面提升办学水平。

学院与哈尔滨市公路工程处、龙建路桥股份有限公司等企业成立了校企合作工作领导小组,完善了道路桥梁工程技术专业建设指导委员会,进行了合作建站、合作办学、合作建队、合作育人的“四合模式”建设;创新了“校企共育、德能双修、季节分段”工学交替的人才培养模式,即以校企合作机制为保障,打造校企“双主体育人”合作平台,将学生的职业道德和职业能力培养贯穿于整个教育教学的始终,构建基于路桥建设工作过程导向课程体系,开发融入职业道德及岗位工作标准的工学结合核心课程,结合黑龙江省寒区特点,采取季节分段的工学交替教学方式,校企共同培养满足路桥施工一线的技术与管理岗位扎实工作的具有可持续发展能力的高端技能型专门人才;为了更加有效地实施该人才培养模式,制定了融入路桥企业职业标准及岗位工作要求的 10 门核心课程的课程标准,采取任务驱动的教学做一体化教学模式进行教学。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

而教材建设作为教学条件中教学资源建设的重要组成部分，既是教学资源建设的关键，又是资源建设的难点。为此，学院组成了各重点专业教材编审委员会。道路桥梁工程技术专业教材编审委员会由职业教育专家、企业专家、专业核心课教师和公共核心课教师组成，历经三年多的不断改革与实践，编写了本套工学结合特色教材，由中国铁道出版社出版，为更好地推进国家骨干院校建设做出了积极贡献。

本套教材完全摆脱了以往学科体系教材的体例束缚，其特点如下：

1. 本套教材主要按照核心课程的教学模式改革要求进行编写，全部以真实的工作任务为载体，配合任务驱动教学做一体化的教学模式。

2. 本套教材的内容组织主要按照核心课程的内容改革要求进行编写，所有工作任务都是与施工企业专家和工程技术人员共同研究确定，选取具有典型效果的工程案例，形成了独具特色的教材内容。

3. 本套教材均采用相同的体例编写，同时采用了与任务驱动教学模式配套的六步教学法：

(1)完全打破了传统的知识体系的章节结构形式，采用全新的以路桥工程技术与管理人员的工作任务为载体的任务结构形式，设计了每项任务的任务单；

(2)教材中为培养学生的自主学习能力，设计了每项任务的资讯单和信息单；

(3)在信息单中，为学生顺利完成工作任务提供了大量的真实工程案例，各种解决方案，注重学生的计划能力和决策能力的培养，并设计了每项任务的计划单和决策单；

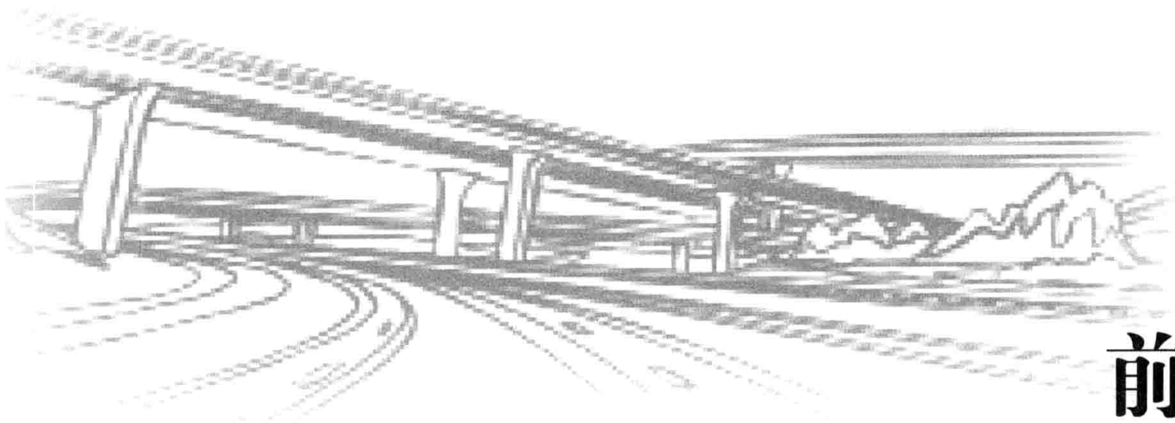
(4)教材中突出任务的实践性，注重学生的职业能力培养，设计了每项任务的实施单和作业单；

(5)在教材中设计了检查单和评价单，改革了传统的考核方式，采取分小组评价、个人评价和教师评价相结合的多元化评价方式，以过程考核为主，每个任务的各个环节均设有评价分值；

(6)为了使每名学生在完成任务后，都能够对自己的工作有个总结和反思，设计了教学反馈单。

总之，本套教材按照与学习领域课程体系、任务驱动教学模式、六步教学法及多元化考核评价方式等相对应的全新的教材体例编写而成。在本套教材的编写过程中，得到了合作企业及行业专家的大力支持，在此，表示由衷的感谢！由于教材实践周期较短，还不够完善，如有错误和不当之处，敬请专家、同仁批评指正。希望本套教材的出版，能为我国高职教育的发展做出应有的贡献。

哈尔滨职业技术学院道路桥梁工程技术专业
教材编审委员会
2013 年 8 月



前 言

FOREWORD

《土木工程应用数学》教材以土木工程系各个专业教学对数学知识的实际需求出发，以培养应用型人才为目标，在不破坏数学学科本身的内在逻辑性和发展趋势的基础上，选取有代表性的专业基础课及专业课中的实际案例作为数学概念的引入，并在应用中尽可能将数学理论与专业知识深度融合，以此达到更好地为专业服务及保证培养学生的可持续发展的能力和素质。本教材主要有以下几个特点：

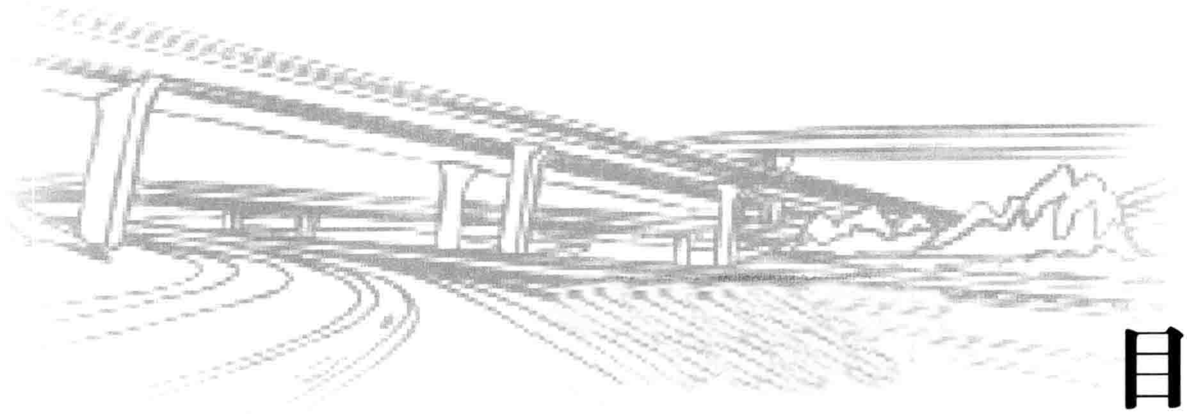
1. 根据高素质应用型人才培养目标要求，打破了以往高等数学教材的编写方式及数学本身的系统性与完整性，突出数学的思想与方法，内容的选取更加精练，难度在一定程度上有所降低，更加注重数学在专业中的应用。

2. 本教材主要采用“案例及问题驱动”的方式编写，在这里我们精心选取了与专业紧密相关的案例，将抽象的数学概念及理论用形象且学生容易理解的案例引导出来，再由简单易懂的案例将教学的重点与难点有效地加以处理，让学生感觉到数学就像空气一样，时刻围绕在身边。极大地增加了学生学习数学的兴趣与动力。

3. 本教材采用了大量与案例匹配的图形，更加突出了教材的直观性。另外书后还附有常用公式表，以方便学生使用。

本教材参考学时为 72 学时，包括四个情境，引用了以下数学知识：向量代数、一元函数的微分学、一元函数的积分学、微分方程。通过四个学习情境使学生具备专业所需的数学知识、数学能力、数学素质及培养学生自主学习的能力。

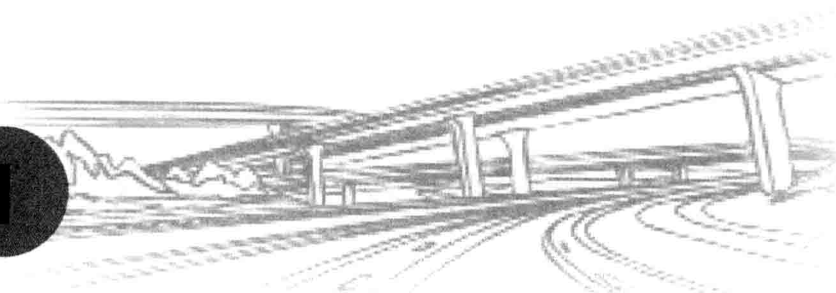
徐秀艳



目 录

CONTENT

学习情境 1



工程力学中向量的计算

任 务 单

<table>
<tr><td>学习领域</td><td colspan="4">土木工程应用数学</td></tr>
<tr><td>学习情境</td><td colspan="2">工程力学中向量的计算</td><td>学时</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="5">布 置 任 务</td></tr>
<tr><td>学习目标</td><td colspan="4">1. 掌握平面及空间直角坐标系的概念,会求两点间的距离.
2. 会求向量的模、方向角、方向余弦.
3. 会求向量在轴上的投影.
4. 掌握向量的线性运算及乘法运算,并能利用乘法运算求向量的夹角.
5. 会用向量知识解决工程力学中的实际问题.</td></tr>
<tr><td>任务阐述</td><td colspan="4">1. 利用对比法通过平面直角坐标系的概念学习空间直角坐标系的相关知识.
2. 通过工程力学中力的合成、分解及力的投影,学习向量的线性运算与向量的投影.
3. 通过力的做功及力矩,学习向量的数量积与向量积并解决实际问题.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">学习安排</td><td>资讯</td><td>实施</td><td>检查</td><td>评价</td></tr>
<tr><td>2 学时</td><td>5 学时</td><td>0.5 学时</td><td>0.5 学时</td></tr>
<tr><td>学习参考资料</td><td colspan="4">1. 侯风波主编《应用数学》.
2. 梁弘主编《高等教学基础》.
3. 侯兰茹主编《高等数学》.
4. 同济大学主编《高等教学》.</td></tr>
<tr><td>对学生的要求</td><td colspan="4">1. 学习态度端正,积极主动参与小组学习.
2. 能够掌握向量的基本数学运算.
3. 能够用向量知识解决工程力学中的有关问题.
4. 认真查找相关资料,学会独立解决学习中出现的问题,按时完成作业.
5. 认真对待每一阶段的成绩考核,找差距补不足.</td></tr>
</table>

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

资 讯 单

学习领域	土木工程应用数学		
学习情境	工程力学中向量的计算	学时	8
资讯方式	学生根据教师给出的资讯引导及讲解进行解答		
资讯问题	空间直角坐标系的构成.		
	两点间的距离公式.		
	向量的表示,向量的模、方向角、方向余弦公式.		
	向量的线性运算法则.		
	向量的投影及坐标表示.		
	向量数量积的定义及计算公式.		
	向量向量积的定义及计算公式.		
资讯引导	1. 侯兰茹主编《高等数学》第六章. 2. 同济大学主编《高等数学》第七章. 3. 侯风波主编《应用数学》第十章. 4. 梁弘主编《高等数学基础》第八章.		

1.1 空间直角坐标系的构成

1.1.1 空间直角坐标系

在空间内取定一点 O，过点 O 作三条具有相同长度单位，且两两互相垂直的数轴，分别称为 x 轴，y 轴，z 轴，这样就称建立了**空间直角坐标系** $Oxyz$. 点 O 称为**坐标原点**，x 轴，y 轴，z 轴统称为**坐标轴**，又分别叫做**横轴**、**纵轴**和**竖轴**. 一般规定 x 轴，y 轴，z 轴的正向要遵循右手法则（见图 1－1），即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向是 z 轴的正向.

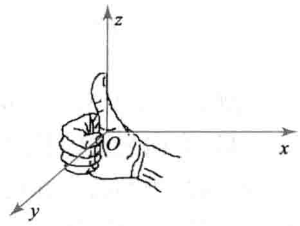


图 1－1

任意两条坐标轴确定的平面称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴，y 轴和 z 轴，z 轴和 x 轴所确定的坐标面分别叫做 xOy 面，yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分隔成八个部分，每个部分称为一个卦限，在 xOy 坐标面的上方，且在 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴一侧的空间称为第Ⅰ卦限，其余卦限按逆时针方向依次称为第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限、第Ⅳ卦限. 在 xOy 坐标面的下方与第Ⅰ卦限对应的空间称为第Ⅴ卦限，其余卦限按逆时针方向依次称为第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限、第Ⅷ卦限. 如图 1－2 所示.

1.1.2 空间内一点的坐标

设点 M 是空间一点，过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面，分别交 x 轴，y 轴，z 轴于 P,Q,R. 设点 P,Q,R 在三条坐标轴的坐标依次为 x,y,z，显然点 M 与有序数组 x,y,z 之间存在一一对应的关系. 有序数组 x,y,z 称为点 M 的**坐标**，又分别叫做**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 点 M 可用坐标表示为 $M(x,y,z)$，如图 1－3 所示.

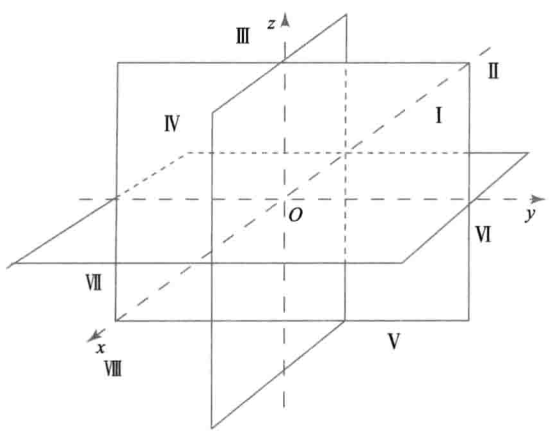


图 1－2

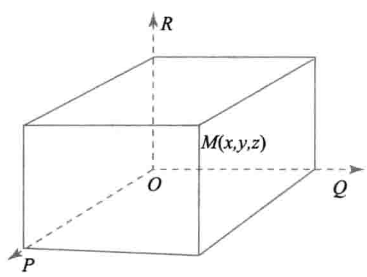


图 1－3

1.1.3 八个卦限中点的坐标符号

第Ⅰ卦限	$x>0,y>0,z>0$；	第Ⅴ卦限	$x>0,y>0,z<0$；
第Ⅱ卦限	$x<0,y>0,z>0$；	第Ⅵ卦限	$x<0,y>0,z<0$；
第Ⅲ卦限	$x<0,y<0,z>0$；	第Ⅶ卦限	$x<0,y<0,z<0$；
第Ⅳ卦限	$x>0,y<0,z>0$；	第Ⅷ卦限	$x>0,y<0,z<0$.

1.1.4 空间两点间的距离公式

设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，过 M_1 和 M_2 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 1－4 所示. 从图中可以看到，该长方体的各棱长分别为：$|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$. 由勾股定理可知点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

1.2 向量的线性运算

1.2.1 向量的概念

1. 向量的定义

既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 几何上常用的有向线段表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的起点和终点分别叫向量的**起点**和**终点**. 以点 A 为起点,点 B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 向量也常用一个字母表示,如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 等.

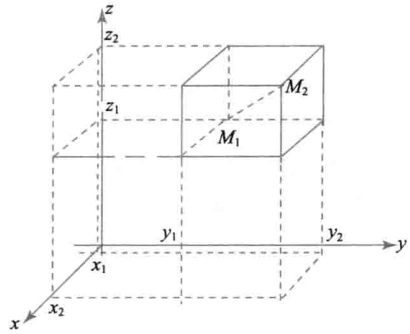


图 1-4

2. 向量的模

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小又称为向量的**模**,记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称做**单位向量**;模为零的向量称做**零向量**.

3. 向量相等

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

4. 向量的夹角

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移到同一起点,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 并规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$(或0) 时,就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,如图 1-5 所示.

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时,就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,如图 1-6 所示.

规定零向量 0 与任意向量都平行或垂直.

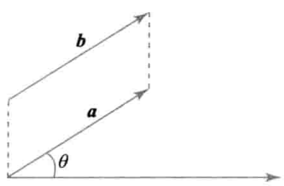


图 1-5

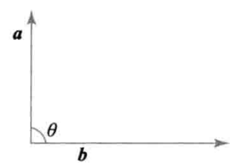


图 1-6

1.2.2 向量在轴上的投影

1. 向量在轴上的投影

设有向量 $\overrightarrow{AB}$ 及轴 u,则起点 A 与终点 B 在轴 u 上的投影 A', B' 所确定的有向线段 $A'B'$ 的值 $A'B'$ 如图1-7所示,并称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影,记 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

注意:$A'B'$ 表示其绝对值为 $|A'B'|$,符号:当 $A'B'$ 与 u 同向时为"+";当 $A'B'$ 与 u 反向时为"-".

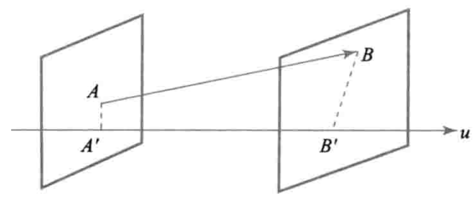


图 1-7

2. 投影定理

定理 1 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, φ 为向量 AB 与轴 u 的夹角. 显然有:若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, 则 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{CD}$.

定理 2 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$.

定理 3 $\mathrm{Prj}_u\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

案例 1.1

如图 1-8 所示,已知作用在 A 点的四个力, $F_1=0.5\text{kN}, F_2=1\text{kN}, F_3=0.4\text{kN}, F_4=0.3\text{kN}$, 求力系的合力 $\boldsymbol{F}$.

【案例分析】

力是有大小有方向的量,也就是数学中的向量,力系的合力就是数学中向量的加法,根据向量的四边形法

则可作出合成向量,注意平面汇交力系平衡的充要条件是:“力系的合力为零”.

在力学中像这种力系问题可以采用两种解法.

(1)几何法. 选取适当的比例尺,作出向量的图,再利用平行四边形法则或三角形法则作出力系的合力.

(2)解析法. 将所给的力分别投影于 x 与 y 轴上,再由投影定理求出力系的合力.

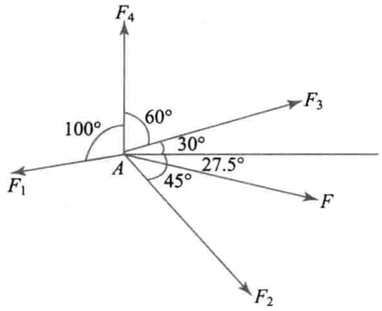


图　1－8

【案例解答】

(1)几何法.

选取1cm代表0.25kN的比例尺按 F_1、F_2、F_3、F_4 的顺序首尾相连地依次画出各力,可得力的多边形,如图1－9所示,由力的多边形封闭边,量得合力 F 长为2.49cm,所以合力的大小为 F =2.49cm × 0.25kN/cm =0.6225kN.

因为合力 F 的指向为下方,量得该合力与水平间的夹角为 q = 27.5°, 且合力作用于各力的交汇点 A.

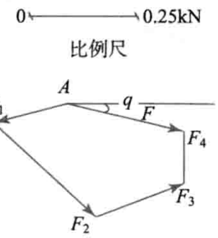


图　1－9

(2)解析法.

我们将 F_1、F_2、F_3、F_4 分别投影于 x 与 y 轴上,则

$F_{1x} = -0.5 \times \cos 10° = -0.492\text{kN}$

$F_{2x} = 1 \times \cos 45° = 0.707\text{kN}$

$F_{3x} = 0.4 \times \cos 30° = 0.4 \times 0.866 = 0.346\text{kN}$

$F_{4x} = 0.3 \times \cos 90° = 0\text{kN}$

$F_{1y} = -0.5 \times \sin 10° = -0.5 \times 0.1726 = -0.0868\text{kN}$

$F_{2y} = -1 \times \sin 45° = -0.707\text{kN}$

$F_{3y} = 0.4 \times \sin 30° = 0.4 \times 0.5 = 0.2\text{kN}$

$F_{4y} = 0.3 \times \sin 90° = 0.3\text{kN}$

由投影定理: $F_x = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = 0.561\text{kN}$; $F_y = \sum_{i=1}^{4} F_{jy} = -0.294\text{kN}$.

合力 $\boldsymbol{F} = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 0.633\text{kN}$, $\tan q = \left|\dfrac{F_y}{F_x}\right| = \dfrac{0.294}{0.561} = 0.524$; $q = 27.6°$.

由 $F_x > 0$　$F_y < 0$ 可见 F 通过原点汇交,方向指向下方.

案例1.2

如图1－10所示,一个固定在墙壁上的圆环,受三条绳的拉力作用, F_1 沿水平方向, F_2 与水平方向成40°角, F_3 沿铅垂方向. 三个力的大小分别为 F_1 =200kN, F_2 =250kN, F_3 =150kN. 求此三力的合力.

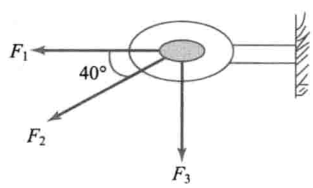


图　1－10

【案例解答】

(1)几何法.

选取1cm代表500kN的比例尺. 按 F_1、F_2、F_3 的顺序首尾相连地依次画出各力,可得力的多边形,如图1－11所示,由力的多封闭边,量得合力 F 长为0.9986cm,所以合力的大小为

$$0.9986\text{cm} \times 500\text{kN/cm} = 499.3\text{kN}$$

量得合力与水平方向成 α = 38.5°, 具体作用在力的交汇点上.

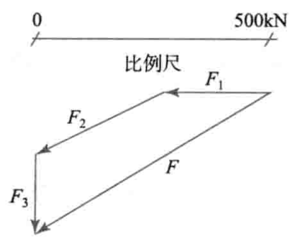


图　1－11

(2)解析法.

将 F_1、F_2、F_3 分别投影于 x 与 y 轴上.

由投影定理$F_x = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = F_1\cos0° + F_2 \times \cos 40° + F_3 \times \cos 90°$

$$= -200 - 250 \times 0.766 = -391.5\text{kN}$$

$$F_y = \sum_{j=1}^{3} F_{jy} = F_1\cos 90° + F_2 \times \cos 50° + F_3 \times \cos0°$$

$$= -250 \times 0.642 - 150 \times 1 = -310.5\text{kN}$$

合力 $F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = 499.7\text{kN}$;$\tan q = \left|\dfrac{F_y}{F_x}\right| = \dfrac{310.5}{391.5} = 0.793$;$q = 38.4°$.

由 $F_x < 0, F_y < 0$ 可见 F 通过原点汇交,方向指向下方.

1.2.3 向量的线性运算

向量的加法,数与向量的乘法,统称为向量的**线性运算**.

1. 向量的加、减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,按图 1-12 的方法确定(称为**平行四边形法则**),或按图 1-13 的方法确定(称为**三角形法则**). 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,按图 1-14 的方法确定(三角形法则).

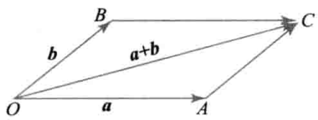


图 1-12

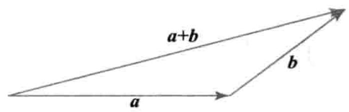


图 1-13

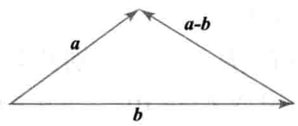


图 1-14

2. 数与向量的乘法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积 $\lambda\boldsymbol{a}$, 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 平行的一个向量. 当 $\lambda > 0$ 时,它与 a 方向相同;当 $\lambda < 0$ 时,它与 a 方向相反;当 $\lambda = 0$ 时,它为零向量. 它的模为 $|\lambda a| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

向量的线性运算满足:

(1)交换律:$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

(2)结合律:$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;$\lambda,\mu$ 是实数.

(3)分配律:$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;$\lambda,\mu$ 是实数.

3. 向量平行的充分必要条件

定理 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是:存在唯一的数 λ,使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

4. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量的计算公式

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

1.3 向量的坐标表示

1.3.1 向径的坐标表示

在空间直角坐标系中,记向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为与 x,y,z 轴的正向相同的单位向量,它们称为直角坐标系 $Oxyz$ 的**基本单位向量**. 空间内任一向量都能用基本单位向量表示.

设点 $M(x,y,z)$ 是空间内一点,向量 OM 称为点 M 的**向径**. 过点 M 分别作与坐标轴垂直的平面,交 x,y,z 轴于 P,Q,R, 如图 1-15 所示,根据向量做线性运算,容易证明:

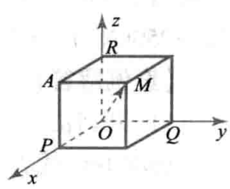


图 1-15

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

1.3.2 向量 $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点和终点的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 由图 1-16 可看出

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} - x_1\boldsymbol{i} - y_1\boldsymbol{j} - z_1\boldsymbol{k} \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

令　$a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$

则有 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$，简写成 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

上两式分别称为向量 a 的基本单位向量的分解表达式与坐标表示式．有序数组 a_x, a_y, a_z 称为向量 a 的**坐标**（又称 a 在三坐标轴上的投影）.

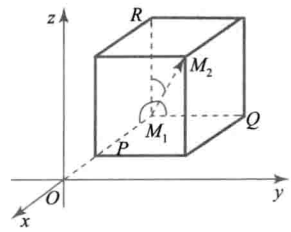


图　1－16

1.3.3　向量的线性运算

设向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$

1. $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$；

2. $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$；

3. 向量平行的充要条件.

前面已提到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件为，存在唯一的数 λ 使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 引入向量坐标以后，此条件又能写成 $(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

即
$$b_x = \lambda a_x, b_y = \lambda a_y, b_z = \lambda a_z$$

即
$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda.$$

1.3.4　向量的模、方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，由两点距离公式知，$\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴 x, y, z 轴正向的夹角 α, β, γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，三个方向角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．当 α 是锐角时，直角三角形 M_1M_2P 中，$|M_1P| = |x_2 - x_1| = a_x$，于是 $\cos\alpha = \dfrac{|M_1P|}{|M_1M_2|} = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

同理　$\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$，　$\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$

可以证明当 α 是钝角时，上式也成立.

方向余弦的特点　$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

由方向余弦所构成的向量 $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量.

案例 1.3

已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模，方向余弦和方向角及与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量.

【案例解答】

解：因为　$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$，所以向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}, \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}.$$

与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.4　向量的乘法运算

1.4.1　向量的数量积

1. 定义

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，它们的模及夹角余弦的乘积为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（又称**点积**或**内积**），记做 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com