

线性代数同步训练习题

辽宁科技大学高等数学部 组编

郑维英 宋介珠 主编

清华大学出版社

线性代数同步训练习题

郑维英 宋介珠 主编

邢 军 卢飞龙 洪丽莉 贾 睿 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是与辽宁科技大学所编的《线性代数》(高等教育出版社)配套的同步训练习题. 内容包括: 行列式、矩阵、 n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型. 同时, 本书的形式为学生的作业本, 比较规范, 既便于学生书写, 又便于教师批改. 本书适用于工科本科生.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步训练习题/郑维英, 宋介珠主编; 邢军等编. --北京: 清华大学出版社, 2013

ISBN 978-7-302-33794-2

I. ①线… II. ①郑… ②宋… ③邢… III. ①线性代数—高等学校—习题集 IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 204126 号

责任编辑: 佟丽霞

封面设计: 常雪影

责任校对: 王淑云

责任印制: 王静怡

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

社 总 机: 010-62770175

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

邮 编: 100084

邮 购: 010-62786544

印 刷 者: 三河市君旺印装厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 260mm × 185mm

印 张: 2.75

字 数: 57 千字

版 次: 2013 年 9 月第 1 版

印 次: 2013 年 9 月第 1 次印刷

印 数: 1~3500

定 价: 7.00 元

前 言

本书是与辽宁科技大学所编的《线性代数》(高等教育出版社)配套的同步训练习题,内容包括:行列式、矩阵、 n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量和二次型.

本书以《线性代数》的章节为顺序,结合本校实际情况与现行教学计划同步,按教学大纲的要求,参照期末考试常见题型分配习题.书后还配备了两套期末模拟试题,旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容.同时,本书采取作业本形式,比较规范,既便于学生书写、保留,又便于

教师批改.书后不配备解答,有利于培养学生独立思考和解决问题的能力,有助于学生的期末复习,提高学习成绩.本书由郑维英、宋介珠主编,郑维英、宋介珠、邢军、卢飞龙、洪丽莉和贾睿编写.

本书适用于工科本科生.

目 录

第一章 行列式	1	第四节 n 维向量的内积 正交性	18
第一节 行列式的定义	1	第四章 线性方程组	20
第二节 行列式的性质	1	第一节 线性方程组解的判定定理	20
第三节 行列式的展开定理	3	第二节 齐次线性方程组	20
第四节 克拉默法则	3	第三节 非齐次线性方程组	22
第二章 矩阵	5	第五章 矩阵的特征值与特征向量	24
第一节 矩阵概念及其运算	5	第一节 矩阵的特征值与特征向量	24
第二节 矩阵的转置、矩阵乘积的行列式	5	第二节 相似矩阵及矩阵的相似对角化	24
第三节 逆矩阵与伴随矩阵	7	第三节 实对称矩阵的对角化	28
第四节 矩阵初等变换与初等变换求逆	7	第六章 二次型	30
第五节 矩阵的秩	9	第一节 二次型及其标准形	30
第六节 分块矩阵及其运算	9	第二节 满秩线性变换化标准型、惯性定理	30
第三章 n 维向量	11	第三节 正交变换化二次型为标准形	31
第一节 n 维向量及其线性运算	11	第四节 正定二次型	31
第二节 向量组的线性相关性	11	模拟试题一	35
第三节 向量组的秩	14	模拟试题二	38

第一章 行列式

重点: 行列式的性质、展开定理及行列式的计算.

难点: 行列式的定义及计算.

第一节 行列式的定义

第二节 行列式的性质

1. 填空选择题

(1) $\tau(634521) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 当 $i = \underline{\hspace{2cm}}$, $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 排列 $5314i7k$ 为偶排列.

(3) 在四阶行列式 $|a_{ij}|_4$ 中, $a_{31} a_{24} a_{43} a_{12}$ 项的符号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 三阶行列式的展开式有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 项.

(5) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$, 则 $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} =$

().

(A) $-6D$ (B) $6D$ (C) $4D$ (D) $-4D$

(6) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, 则 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 + 2c_1 & a_1 - b_1 \\ c_2 & b_2 + 2c_2 & a_2 - b_2 \\ c_3 & b_3 + 2c_3 & a_3 - b_3 \end{vmatrix} =$

().

(A) $-2D$ (B) $-D$ (C) D (D) $2D$

2. 用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}_n.$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix};$$

3. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

第三节 行列式的展开定理

第四节 克拉默法则

1. 填空选择题

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & a_2 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & a_3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & a_4 \end{vmatrix} \text{ 的 } a_1 \text{ 的代数余子式的值等于}$$

_____.

$$(2) \text{ 设 } D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}, \text{ 则 } -2A_{21} - 3A_{22} + A_{23} =$$

_____, $-2A_{31} - 3A_{32} + A_{33} =$ _____.

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (\quad).$$

(A) $a^n - 1$ (B) $a^n + 1$ (C) $a^{n-2} - 1$ (D) $a^n - a^{n-2}$

2. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_n;$$

$$(3) \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}_n ;$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_n ;$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2a & 4a^2 & 8a^3 \\ 1 & 3a & 9a^2 & 27a^3 \\ 1 & -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} .$$

3. 用克拉默法则解下列方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \text{ 有非零解?}$$

第二章 矩 阵

重点：矩阵的概念、运算；逆矩阵及矩阵的秩的概念、性质及计算。

难点：矩阵运算、逆矩阵求法。

第一节 矩阵概念及其运算

第二节 矩阵的转置、矩阵乘积的行列式

$$1. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

求：(1) $2A - B$ ； (2) $A^2 - B^2$ ； (3) $(A+B)(A-B)$ 。

2. 计算题

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

问: (1) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 对吗?

(2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ 对吗?

(3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ 对吗?

$$4. \text{ 设 } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \mathbf{PQ}, \text{ 求 } \mathbf{A}^{100}.$$

第三节 逆矩阵与伴随矩阵

第四节 矩阵初等变换与初等变换求逆

1. 填空选择题

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = d \neq 0$, 则 $|2A| =$ _____;
 $|2A^{-1}| =$ _____; $|A^*| =$ _____.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, E 是三阶单位阵, 则 $(A - 2E)^{-1}$
 $=$ _____.

(3) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维列向量, 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,
 $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$, 若 $|A| = 1$, 则 $|B|$
 $=$ _____.

(4) 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足等式 $AB = 0$, 则必有().

(A) $A = 0$ 或 $B = 0$

(B) $A + B = 0$

(C) $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$

(D) $|A + B| = 0$

2. 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A = B + E$, E 是三阶单位阵,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 计算行列式 } |B|.$$

3. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^k = \mathbf{0}$ (k 为正整数), 证明: $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

4. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = \mathbf{0}$, 证明: A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

5. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

第五节 矩阵的秩

第六节 分块矩阵及其运算

1. 选择题

设 A 为三阶方阵, 将 A 的第二行加到第一行得 B , 再将 B 的

第一列的 -1 倍加到第二列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则有().

(A) $C = P^{-1}AP$

(B) $C = PAP^{-1}$

(C) $C = P^TAP$

(D) $C = PAP^T$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, X 满足 $AX = 2X + B$,

求 X .

4. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

第三章 n 维向量

重点: 向量组的极大无关组与向量组的秩.

难点: n 维向量的概念、线性相关性、向量组的极大线性无关组.

第一节 n 维向量及其线性运算

第二节 向量组的线性相关性

1. 填空题

(1) 设 $\alpha = (1, 1, 0)^T$, $\beta = (0, 1, 1)^T$, $\gamma = (3, 4, 0)^T$. 则 $\alpha - \beta =$ _____; $3\alpha + 2\beta - \gamma =$ _____.

(2) 设 A 是四阶方阵, 且 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中().

- (A) 必有一列元素全为 0
- (B) 必有两列元素对应成比例
- (C) 必有一列向量可由其余列向量线性表示
- (D) 任一列向量都可由其余列向量线性表示

(3) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充要条件是().

- (A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

$$+ \dots + k_s\alpha_s \neq 0$$

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是().

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

(B) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

(D) $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

(5) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 则().

(A) α_1 必可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出

(B) α_2 必不可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出

(C) α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

(D) α_4 必不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

2. 已知向量 $\beta = (1, k, 5)$ 可由向量 $\alpha_1 = (1, -3, 2)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1)$ 线性表示. 求常数 k .

4. 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 2, 5)$, $\alpha_3 = (1, 3, 6)$ 是否线性相关.

3. 设 $\beta = (5, 1, 1, -3)^T$, $\alpha_1 = (2, 2, 3, 1)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, -1, -1)^T$. 判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 若能, 写出一种表示.

5. 设向量组 $\alpha_1 = (1, k, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, k)$, $\alpha_3 = (k, 1, 1)$ 线性相关, 求常数 k .