GAODENGDAISHU
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等代数

全程学习指导与习题精解

（北大第三版）

毛　磊　寇冰煜　滕兴虎　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等代数

全程学习指导与习题精解

（北大第三版）

毛　磊　寇冰煜　滕兴虎　编著

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数全程学习指导与习题精解/毛磊，寇冰煜，滕兴虎编著. —南京：东南大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5641-4407-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①毛… ②寇… ③滕… Ⅲ.①高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 165798 号

高等代数全程学习指导与习题精解(北大第三版)

编　　著	毛　磊　寇冰煜　滕兴虎	责任编辑	刘　坚　戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	电子邮件	press@seu.edu.cn
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	880mm×1230mm　1/32	印　　张	15　字　数　645千
版　　次	2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-4407-4		
定　　价	24.00 元		

前　言

高等代数是数学学科中一门重要基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目。高等代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和广泛的应用性。大多数学生在学习过程中感到高等代数抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路、难以下手。为了帮助读者掌握高等代数的基本理论和基本方法，掌握综合运用各种解题的技巧和方法、提高分析问题和解决问题的能力，我们根据北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写的《高等代数》(第三版)编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：列出相应各章的基本要求、重点、难点内容，以帮助读者总体把握本章内容。

2. 主要概念与公式：列出各章的基本概念、定理与公式，突出必须掌握和理解的核心内容。

3. 典型例题分析：精选历年各院校研究生入学考试试题中具有代表性的试题进行了详细的解答，这些例题涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三、触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握高等代数的基本内容和解题方法。

4. 课后习题全解：教材中课后习题数量大、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助理解基本概念和基本理论，锤炼读者基本的解题方法，许多层次较高的问题有助于广大读者进一步的提高和应用，不少问题具有独特的解题思路和方法。针对以上两点，我们对教材课后全部习题给出了详细的解答，出于高等代数解题方法千变万化，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

本书由毛磊、寇冰煜、滕兴虎、王璞、张瑰、张燕、刘希强等同志编写。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

目　录

第六章　线性空间

第七章　线性变换

第八章　λ-矩阵

第九章　欧几里得空间

第十章　双线性函数与辛空间

第一章　多项式

基本要求、重点与难点

基本要求：

1. 掌握数域上一元多项式的概念、运算及带余除法，并能熟练地运算；

2. 正确理解多项式的整除概念和性质；

3. 掌握最大公因式的概念和性质，以及多项式互质的概念和性质，并能熟练地求出两个多项式的最大公因式；

4. 掌握不可约多项式的概念和多项式的因式分解问题；

5. 掌握重因式的概念以及运用多项式的导数来判断重因式的方法；

6. 掌握多项式的根的概念及性质；

7. 掌握整系数多项式的有理根的求法，并能熟练地求出有理系数多项式的有理根.

重点：

多项式的因式分解理论。

难点：

最大公因式的定义，多项式的整除、互质、不可约等概念的联系与区别，以及因式分解定理的证明.

主要概念与公式

(一) 数域

1. 定义　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 如果 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个**数域**.

【注】在高等代数中，我们一般用 **N、Z、Q、R、C** 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，则有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

2. 性质　任何数域都包含有理数域作为它的一部分.

(二) 一元多项式

1. 定义　设 x 是一个符号(或称文字)，n 是一非负整数，形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

($a_0, a_1, \cdots, a_n$ 全属于数域 P)称为**系数在数域 P 中的一元多项式**，或者简称为**数域 P 上的一元多项式**.

2. 多项式相等

对于两个多项式 $f(x)$和 $g(x)$，如果除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则 $f(x)$和 $g(x)$就称为**相等**，记为 $f(x)=g(x)$.

3. 多项式的运算律

(1) 加法交换律　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$

(2) 加法结合律　$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$

(3) 乘法交换律　$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

(4) 乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

(5) 乘法对加法的分配律　$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$

(6) 乘法消去律　如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则有 $g(x)=h(x)$.

4. 多项式环　所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的**一元多项式环**，记作 $P[x]$.

(三) 整除的概念

1. 带余除法　对于 $P[x]$中的两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，一定有 $P[x]$中的多项式 $q(x)$，$r(x)$存在，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，并且 $r(x)$和 $q(x)$是唯一确定的.

2. 整除　数域 P 上的多项式 $g(x)$称为**整除** $f(x)$，如果有数域 P 上的多项式$h(x)$，使得等式

$$f(x)=g(x)h(x)$$

成立. 用“$g(x)\mid f(x)$”表示 $g(x)$整除 $f(x)$.

3. 整除的充要条件　对于 $P[x]$中的任意两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$g(x)\mid f(x)$的充要条件是 $g(x)$除 $f(x)$的余式为零.

4. 整除的性质

(1) 如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则有 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为非零常数.

(2) 如果 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则有 $f(x)\mid h(x)$.

(3) 若 $g(x)\mid f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,k$，则任意 $u_i(x)\in P[x]$，$i=1,2,\cdots,k$，都有

$$g(x)\Big|\sum_{i=1}^{k}u_i(x)f_i(x).$$

(四) 最大公因式

1. 公因式

设 P 是一个数域，$h(x)$，$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，如果 $h(x)$既是 $f(x)$的因式，又是 $g(x)$的因式，即

$$h(x)\mid f(x),\ h(x)\mid g(x)$$

则称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**公因式**.

2. 最大公因式

若 $d(x)$, $f(x)$, $g(x) \in P[x]$, 且 $d(x) \neq 0$, 如果 $d(x)$ 满足下列条件:

1) $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$;

2) 若 $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$, 有 $h(x) \mid d(x)$,

则称 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式**.

3. 最大公因式的性质

(1) 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 则 $d_1(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式当且仅当 $d_1(x) = cd(x)$, $c \in P$, $c \neq 0$.

(2) 若 $g(x) \mid f(x)$, 则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

4. 最大公因式的存在性

(1) 设有等式 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立, 又 $(g(x), r(x))$ 存在, 则 $(f(x), g(x))$ 存在, 且

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$$

(2) 设 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $r(x)$, 且 $r(x) \mid g(x)$, 则 $r(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

(3) $P[x]$ 中两个非零多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$ 存在, 且为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合, 即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x)$, $v(x)$, 使得

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$$

5. 用辗转相除法求最大公因式

如果 $f(x)$, $g(x) \in P[x]$, $g(x) \neq 0$, 且有 $q_i(x)$, $r_i(x) \in P[x]$, 使

$$\begin{aligned}
f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\
g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\
r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\
&\cdots\cdots \\
r_{s-2}(x) &= q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x) \\
r_{s-1}(x) &= q_{s+1}(x)r_s(x) + 0
\end{aligned}$$

其中 $\partial(r_i(x)) \geqslant 0$, 则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

6. 互素

(1) 定义　$P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 称为**互素**(也称**互质**), 如果 $f(x)$, $g(x)$ 的最大公因式 $(f(x), g(x)) = 1$.

(2) 性质　① $P[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是 $P[x]$ 中有多项式 $u(x)$, $v(x)$, 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

② 若 $(f(x), g(x))=1$，且 $f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|h(x)$.

③ 若 $f_1(x)|g(x)$，$f_2(x)|g(x)$，且 $(f_1(x), f_2(x))=1$，那么 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

(五) 因式分解定理

1. 不可约多项式

数域 P 上次数$\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$，如果它不能表示成数域 P 上的两个次数比 $p(x)$ 低的多项式的乘积，那么称 $p(x)$ 为数域 P 上的**不可约多项式**.

【注】一个多项式是否不可约是依赖于系数域的. 如 x^2+2 是实数域上的不可约多项式，但它在复数域上可以分解成两个一次多项式的乘积，因而不是不可约多项式.

2. 不可约多项式的性质

如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)|f(x)g(x)$，一定推出 $p(x)|f(x)$ 或者 $p(x)|g(x)$.

3. 因式分解及唯一性定理

数域 P 上每一个次数$\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积. 如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x).$$

那么必有 $s=t$，并且适当排列因式次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),\ i=1, 2, \cdots, s.$$

其中 $c_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 是一些非零常数.

标准分解式为 $$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}(x).$$

其中 c 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ 是不同的首项系数为 1 的不可约多项式，r_i 是正整数.

(六) 重因式

1. 重因式　如果 $p^k(x)|f(x)$，而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，那么不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 **k 重因式**，其中 $k\in \mathbf{N}_+$. 当 $k=1$ 时，$p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**单因式**；如果 $k>1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的**重因式**.

2. 微商　设有多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

我们规定它的微商是比 $f(x)$ 低一次的多项式.

$$f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

3. 多项式微商的基本公式

(1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

(2) $(cf(x))'=cf'(x)$

(3) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4) $(f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$

4. 微商的性质

(1) 如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式 $(k \geqslant 1)$，那么它是微商 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.

(2) 如果不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式 $(k \geqslant 1)$，那么 $p(x)$是 $f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式.

(3) 不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充分必要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

(4) 多项式 $f(x)$没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素.

(七) 多项式函数

1. 定义　设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是 $P[x]$中的多项式，α 是 P 中的数，用 α 代替 x 所得的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

称为 $f(x)$当 $x=\alpha$ 时的值，记为 $f(\alpha)$. 这样一来，多项式 $f(x)$就定义了一个数域 P 上的函数. 可以由一个多项式来定义的函数称为数域 P 上的**多项式函数**.

2. 余数定理

用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$. 如果 $f(x)$在 $x=\alpha$ 时函数值 $f(\alpha)=0$，那么 α 就称为 $f(x)$的一个**根**或**零点**.

【注】α 是 $f(x)$的根的充分必要条件是 $(x-\alpha)\mid f(x)$.

3. 重根及其性质

(1) α 称为 $f(x)$的 **k 重根**，如果 $(x-\alpha)$是 $f(x)$的 k 重因式. 当 $k=1$ 时，α 称为**单根**；当 $k>1$ 时，α 称为**重根**.

(2) $P[x]$中的 n 次多项式 $(n \geqslant 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计算)

(3) 如果多项式 $f(x)$，$g(x)$的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 α_1，α_2，…，α_{n+1}有相同的值，即

$$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$$

其中 $i=1, 2, \cdots, n+1$，那么 $f(x)=g(x)$.

(八) 复系数与实系数多项式的因式分解

1. 代数基本定理　每个次数≥1 的复系数多项式在复数域中有一根.

【注】此定理可以等价地表示为每个次数≥1 的复系数多项式，在复数域上一定有一次因式. 同时这个定理也表明在复数域上所有次数大于 1 的多项式全是可约的，换句话说，不可约多项式只有一次多项式.

2. 复系数多项式因式分解定理

每个次数≥1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积. 标准分解式为

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$$

其中 α_1，α_2，…，α_s 是不同的复数，l_1，l_2，…，l_s 是正整数.

3. 实系数多项式分解定理

每个次数≥1的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

标准分解式 $f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$，其中 $p_i^2-4q_i<0$，$i=1,2,\cdots,r$；$p_i,q_i,c_j(j=1,2,\cdots,s)\in\mathbf{R}$，$l_j,k_i\in\mathbf{N}_+$.

(九) 有理系数多项式

1. 本原多项式 如果一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ 的系数 b_n，b_{n-1}，…，b_0 没有异于±1的公因子，也就是说，它们是互素的，它就称为一个**本原多项式**.

【注】任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$都可以表示成一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$的乘积，即

$$f(x)=rg(x),$$

并且这种表示法除了差一个正负号是唯一的.

2. 高斯(Gauss)引理 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

3. 本原多项式的性质

(1) 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且 $g(x)$是本原的. 如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$是有理系数多项式，那么 $h(x)$一定是整系数的.

(3) 艾森斯坦(Eisenstein)判别法

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

是一个整系数多项式，如果有一个素数 p，使得

1) $p\nmid a_n$；

2) $p\mid a_i$，$i=0,1,\cdots,n-1$；

3) $p^2\nmid a_0$.

那么 $f(x)$在有理数域上是不可约的.

***(十) 多元多项式**

1. 单项式和多项式

设 P 是一个数域，设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个文字，则形式为 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的式子称为**单项式**，其中 $a\in P$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数. 如果两个单项式中相同的文字的幂全一样，则称之为**同类项**. 而一些单项式的和

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

就称为 ***n* 元多项式**，或者简称**多项式**.

2. 多项式环

所有系数在 P 中的 n 元多项式的全体，称为**数域 P 上的 n 元多项式环**，记为

$$P[x_1, x_2, \cdots, x_n].$$

3. 首项及其性质

(1) 按照字典排列法写出来的第一个系数不为零的单项式称为**多项式的首项**.

(2) 性质　如果 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$，则乘积 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项等于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项与 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项的乘积.

***(十一) 对称多项式**

1. 定义　n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果对于任意的 $i, j, 1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

则此多项式称为**对称多项式**.

2. 对称多项式基本定理

对于任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都有一个 n 元多项式 $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

典型例题分析

【例 1】 假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式，假设 x^4+x^2+1 整除 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$，试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

【解】 由于

$$x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

这里假设它的 4 个根分别为 w_1, w_2, w_3, w_4，且

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, w_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, w_3 = \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, w_4 = \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

令 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3) = (x^4+x^2+1)g(x)$，于是有方程组

$$\begin{cases} f_1(1)+w_1f_2(1) = 0 \\ f_1(1)+w_2f_2(1) = 0 \\ f_1(-1)-w_3f_2(-1) = 0 \\ f_1(-1)-w_4f_2(-1) = 0 \end{cases}$$

解方程组，得

$$f_1(1) = f_2(1) = 0, \quad f_1(-1) = f_2(-1) = 0$$

于是有

$$(x+1)(x-1) \mid f_1(x),\ (x+1)(x-1) \mid f_2(x)$$

而 $f_1(x)$，$f_2(x)$是互异的次数不超过 3 的首系数为 1 的多项式，所以

$$(f_1(x),\ f_2(x)) = x^2 - 1.$$

【例 2】 设两个多项式 $f(x)$和 $g(x)$不全为零，求证：对于任意的正整数 n，有 $(f(x),\ g(x))^n = (f^n(x),\ g^n(x))$.

【证明】 令 $(f(x),\ g(x)) = d(x)$，$f(x) = d(x)f_1(x)$，$g(x) = d(x)g_1(x)$

则
$$(f_1(x),\ g_1(x)) = 1$$

那么
$$(f_1^n(x),\ g_1^n(x)) = 1,$$

又
$$f^n(x) = d^n(x)f_1^n(x),\ g^n(x) = d^n(x)g_1^n(x)$$

于是

$$(f^n(x),\ g^n(x)) = d^n(x) = (f(x),\ g(x))^n.$$

【例 3】 设 $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$，证明：对任意的非负整数 n，

$$(x^2+x+1,\ f_n(x)) = 1.$$

【证明】 x^2+x+1 是有理数域上的不可约多项式，于是 $x^2+x+1 \mid f_n(x)$或者 $(x^2+x+1,\ f_n(x)) = 1$，假定 $x^2+x+1 \mid f_n(x)$，令 ε 是三次本原单位根，则

$$\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0,\ 且\ f_n(\varepsilon) = 0.$$

但
$$f_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n+2} - (\varepsilon+1)^{2n+1} = \varepsilon^{n+2} - (-\varepsilon^2)^{2n+1} = \varepsilon^{n+2} + \varepsilon^{4n+2}$$
$$= \varepsilon^{n+2}(1+\varepsilon^{3n}) = 2\varepsilon^{n+2} \neq 0$$

矛盾，于是 $(x^2+x+1,\ f(x)) = 1$.

【例 4】 设 $f(x)$是整系数多项式，若 $g(x) = f(x)+1$ 至少有三个互不相等的整数根，证明：$f(x)$没有整数根.

【证明】 反证法. 假设 $f(x)$有整数根 m，则

$$f(x) = (x-m)h(x)$$

由于 $x-m$ 是本原多项式，所以 $h(x)$是整系数多项式，令 x_1，x_2，x_3 是 $g(x)$的 3 个互不相等的整数根，则

$$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)p(x)$$

其中 $p(x)$是整系数多项式，进而

$$g(m) = f(m)+1 = 1 = (m-x_1)(m-x_2)(m-x_3)p(m)$$

于是 $m-x_1$，$m-x_2$，$m-x_3$，$p(m)$只能是 1 或 -1，那么 $m-x_1$，$m-x_2$，$m-x_3$ 中至少有两个同为 1 或同为 -1，与 x_1，x_2，x_3 互不相等矛盾，所以 $f(x)$没有整数根.

【例 5】 设 $f(x)$是一个整系数多项式，证明：如果存在一个偶数 m 和一个奇数 n，使

得 $f(m)$和 $f(n)$都是奇数，则 $f(x)$没有整数根.

【证明】 用反证法，假定 $f(x)$有整数根 k，则 $f(x)=(x-k)g(x)$，而 $x-k$ 是本原多项式，那么 $g(x)$是整系数多项式，由于

$$f(m)=(m-k)g(m),\ f(n)=(n-k)g(n),$$

且 $f(m)$，$f(n)$都是奇数，那么 $m-k$，$n-k$ 都是奇数，与 m 是偶数且 n 为奇数矛盾，所以 $f(x)$没有整数根.

【例 6】 设 $f(x)=x^{n+1}+x^n-2\ (n\geqslant 1)$，求 $f(x)$在有理数域上的不可约因式并说明理由.

【解】
$$\begin{aligned}f(x)&=x^{n+1}+x^n-2=(x^{n+1}-1)+(x^n-1)\\&=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\\&=(x-1)(x^n+2x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+2x+2)\\&=(x-1)g(x)\end{aligned}$$

对 $g(x)$，令 $p=2$，用 Eisenstein 判别法容易证明 $g(x)$在有理数域上不可约，因此 $f(x)$在有理数域上的不可约因式为 $x-1$ 及 $x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+2$.

【例 7】 设 $p(x)$是次数大于零的多项式，如果对于任何多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$，可以推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$，试证 $p(x)$是不可约多项式.

【证明】 用反证法. 假定 $p(x)$可约，令 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$

且

$$\partial(p_1(x))<\partial(p(x))$$

$$\partial(p_2(x))<\partial(p((x)))$$

$$p(x)\mid p_1(x)p_2(x)$$

而 $p(x)$不能整除 $p_1(x)$，$p(x)$不能整除 $p_2(x)$，矛盾，所以假设不成立，即 $p(x)$是不可约多项式.

【例 8】 证明多项式 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^p}{p!}$ 在有理数域上不可约，其中 p 为一素数.

【证明】 由

$$p!\cdot f(x)=p!+p!x+3\cdots(p-1)px^2+4\cdots(p-1)px^3+\cdots+px^{p-1}+x^p$$

可知存在素数 p，使得

1) p 不能整除 1，

2) $p\mid p$，…，$3\cdots(p-1)p$，$p!$，$p!$，

3) p^2 不能整除 $p!$，

由 Eisenstein 判别法，$p!\cdot f(x)$在有理数域上不可约，于是 $f(x)$在有理数域上不可约.

【例 9】 设 $P[x]$为数域 P 上的多项式环，$f_1(x)$，$f_2(x)\in P[x]$，且 $f_1(x)$，$f_2(x)$互素. 证明：对于任意 $g_1(x)$，$g_2(x)\in P[x]$，存在 $g(x)\in P[x]$，使得

$$f_i(x) \mid g(x)-g_i(x),\ i=1,\ 2.$$

【证明】 由 $f_1(x)$, $f_2(x)$互素,那么存在 $u_1(x)$, $u_2(x) \in P[x]$, 使

$$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)=1$$

于是

$$f_1(x)u_1(x)g_1(x)+f_2(x)u_2(x)g_1(x)=g_1(x)$$

$$f_1(x)u_1(x)g_2(x)+f_2(x)u_2(x)g_2(x)=g_2(x)$$

令

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)-f_1(x)u_1(x)g_1(x)-f_2(x)u_2(x)g_2(x)$$

于是

$$\begin{aligned} g(x)-g_1(x) &= f_1(x)u_1(x)g_2(x)+f_2(x)u_2(x)g_2(x) \\ &\quad -f_1(x)u_1(x)g_1(x)-f_2(x)u_2(x)g_2(x) \\ &= f_1(x)(u_1(x)g_2(x)-u_1(x)g_1(x)) \\ &= f_1(x)u_1(x)(g_2(x)-g_1(x)) \end{aligned}$$

所以 $f_1(x) \mid g(x)-g_1(x)$,同理 $f_2(x) \mid g(x)-g_2(x)$.

【例 10】 设 R, Q 分别表示实数域和有理数域,$f(x)$, $g(x) \in Q[x]$. 证明:

(1) 若在 $R[x]$中有 $g(x) \mid f(x)$,则在 $Q[x]$中也有 $g(x) \mid f(x)$.

(2) $f(x)$与 $g(x)$在 $Q[x]$中互素,当且仅当 $f(x)$与 $g(x)$在 $R[x]$中互素.

(3) 设 $f(x)$在 $Q[x]$中不可约多项式,则 $f(x)$的根都是单根.

【证明】 (1) 反证法. 设在 $Q[x]$中 $g(x)$不能整除 $f(x)$,那么

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),\text{其中 } q(x),\ r(x) \in Q[x]$$

且

$$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$$

以上等式在 $R[x]$中也成立,所以在 $R[x]$中 $g(x)$不能整除 $f(x)$,矛盾. 因此,结论成立.

(2) 如果 $f(x)$与 $g(x)$在 $Q[x]$中互素,那么存在 $u(x)$, $v(x) \in Q[x]$, 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

以上等式在 $R[x]$中也成立,所以 $f(x)$与 $g(x)$在 $R[x]$中互素. 如果 $f(x)$与 $g(x)$在 $Q[x]$中不互素,那么存在 $d(x) \in Q[x]$, $\partial(d(x)) \geqslant 1$,使得

$$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x),\ f_1(x),\ g_1(x) \in Q[x]$$

以上两个等式在 $R[x]$中成立,因此,$f(x)$, $g(x)$在 $R[x]$中不互素.

(3) $f(x)$是 $Q[x]$中的不可约多项式,则 $(f(x),\ f'(x))=1$,否则 $(f(x),\ f'(x))=d(x) \neq 1$,则 $f(x)$有重因式,与 $f(x)$不可约矛盾. 于是 $f(x)$没有重因式,所以 $f(x)$的根都是单根.

【例 11】 设 $p(x)$是数域 P 上的次数大于零的多项式,证明:$p(x)$是一个不可约多项式的充分必要条件是对任意的 $f(x)$, $g(x) \in P[x]$, 由 $p(x) \mid f(x)g(x)$一定推出

$p(x)|f(x)$或 $p(x)|g(x)$.

【证明】 充分性.(反证法)若 $p(x)$不是一个不可约多项式,则 $p(x)$可分解成次数低于 $p(x)$的多项式的乘积

$$p(x)=h_1(x)h_2(x),\ \partial(h_i(x))<\partial(p(x)),\ i=1,2 \qquad ①$$

令 $f(x)=h_1(x)$, $g(x)=h_2(x)$, 则有

$$p(x)\mid f(x)g(x)\Rightarrow p(x)\mid g(x) \text{ 或 } p(x)\mid f(x)$$

这与假设①矛盾,所以 $p(x)$是一个不可约多项式.

必要性. 如果 $p(x)|f(x)$,结论显然成立.

如果 $p(x)\nmid f(x)$,则 $(p(x),\ f(x))=1$, 而 $p(x)|f(x)g(x)$,所以 $p(x)|g(x)$.

【例 12】 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不同的整数,证明

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$$

在有理数域上不可约或是某一有理系数多项式的平方.

【证明】 如果 $f(x)$在有理数域上不可约,则结论成立. 如果 $f(x)$在有理数域上可约,则 $f(x)$可以写成两个次数比它低的整系数多项式的乘积.

令　　$f(x)=f_1(x)f_2(x),\ \partial(f_1(x))<n,\ \partial(f_2(x))<n$

由 $f(a_i)=1$, $i=1, 2, \cdots, n$ 则

$$f_1(a_i)f_2(a_i)=1$$

又 $f_1(a_i),\ f_2(a_i)\in\mathbf{Z}$, 于是

$$f_1(a_i)=f_2(a_i),\ i=1,\cdots,n$$

可以

$$f_1(x)=f_2(x)$$

所以

$$f(x)=f_1^2(x)$$

【例 13】 设 n 是大于等于 2 的正整数. 证明:整系数多项式 x^n+2 不能分解为两个次数小于 n 的整系数多项式的乘积.

【证明】 令 $f(x)=x^n+2$, 只需证明 $f(x)$在有理数域上不可约即可. 因为 $f(x)$的首项系数为 1,常数项为 2,所有可能的有理根为$\pm1,\pm2$. 又

$$f(1)=3\neq0,\ f(-1)=(-1)^n+2\neq0$$

$$f(2)=2^n+2\neq0,\ f(-2)=(-2)^n+2\neq0\ (n>2)$$

所以 $f(x)$无有理根,即在有理数域上不可约,所以在整数域上也不可约,故整系数多项式 x^n+2 不能分解为两个次数小于 n 的整系数多项式的乘积.