

高等学校教材

CAILIAOLIXUE

# 材料力学

王中元 主编

辽宁民族出版社

高等学校教材

# 材料力学

主 编 王中元

辽宁民族出版社

编写人员:王中元 周 俊 孙雅珍  
生 涛 王正浩

**图书在版编目(CIP)数据**

材料力学/王中元主编. —沈阳: 辽宁民族出版社,  
2002. 3

沈阳建工学院教材

ISBN 7-80644-602-8

I. 材…

II. 王…

III. 材料力学-高等学校-教材

IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007000 号

**辽宁民族出版社出版发行**

(沈阳市和平区十一纬路 25 号 邮政编码 110003)

沈阳市东实印刷厂印刷

---

字数: 180 千字 开本: 787×1092 1/16 印张: 10 1/4  
2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷

---

责任编辑: 权春哲  
封面设计: 杜 江

责任校对: 胡宝霞

---

印数: 1—1000

定价: 16.50 元

# 前 言

本教材是根据高等工业学校材料力学课程教学基本要求(50~60学时)编写的。可作为工科院校材料力学课程的教材,也可供函授、夜大、电大等作教材参考书。

本书力求内容适当、概念准确、推导严谨、讲解清楚、例题和习题的深度及类型恰当,使本书适合于教学。

参加本教材编写的人员有:王中元(第一、四、六、七章)、周俊(第二、三章)、孙雅珍(第五章)、生涛(第八、十、十一章)、王正浩(第九章),所有绘制的图都由生涛制作。全书由王中元统一组稿、编辑、修改。生涛教授对其他人编写的部分提出了许多宝贵意见,编者对此深表谢意。

限于编者水平,书中会有错误和疏漏之处,诚请教师和读者批评指正。

2001年11月

# 目 录

|                        |      |
|------------------------|------|
| 第一章 绪 论                | (1)  |
| 第一节 材料力学的任务和基本假设       | (1)  |
| 第二节 内力与截面法             | (2)  |
| 第三节 应力与应变的概念           | (2)  |
| 第二章 轴向拉伸与压缩            | (5)  |
| 第一节 拉伸和压缩的概念           | (5)  |
| 第二节 拉压杆的内力——轴力与轴力图     | (6)  |
| 第三节 拉压杆横截面及斜截面上的应力     | (7)  |
| 第四节 拉压杆的变形             | (10) |
| 第五节 材料在拉伸与压缩时的力学性质     | (13) |
| 第六节 强度计算 许用应力和安全系数     | (19) |
| 第七节 拉压杆的超静定问题          | (22) |
| 第八节 应力集中的概念            | (27) |
| 第九节 连接件的剪切与挤压强度计算      | (27) |
| 习 题                    | (30) |
| 第三章 扭 转                | (36) |
| 第一节 扭转的概念              | (36) |
| 第二节 扭转内力——扭矩与扭矩图       | (36) |
| 第三节 薄壁圆筒的扭转            | (38) |
| 第四节 圆轴扭转时横截面上的扭转剪应力    | (39) |
| 第五节 圆轴的扭转变形            | (42) |
| 第六节 圆轴扭转的强度计算和刚度计算     | (43) |
| 习 题                    | (46) |
| 第四章 弯曲内力               | (49) |
| 第一节 概 述                | (49) |
| 第二节 弯曲内力——剪力和弯矩        | (50) |
| 第三节 梁的内力方程和内力图         | (53) |
| 第四节 弯矩、剪力和荷载集度间的微、积分关系 | (56) |
| 第五节 用简便法作剪力图和弯矩图       | (58) |
| 习 题                    | (63) |
| 第五章 平面图形的几何性质          | (65) |
| 第一节 静矩和形心              | (65) |
| 第二节 惯性矩、惯性积和极惯性矩       | (66) |
| 第三节 惯性矩和惯性积的平行移轴公式     | (68) |

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| 第四节 形心主惯性轴 .....                | (70)  |
| 习 题 .....                       | (71)  |
| 第六章 弯曲应力 .....                  | (73)  |
| 第一节 概 述 .....                   | (73)  |
| 第二节 弯曲正应力 .....                 | (73)  |
| 第三节 梁的弯曲正应力强度计算 .....           | (77)  |
| 第四节 弯曲剪应力 .....                 | (79)  |
| 第五节 梁的弯曲剪应力强度计算 .....           | (83)  |
| 习 题 .....                       | (86)  |
| 第七章 弯曲变形 .....                  | (89)  |
| 第一节 概 述 .....                   | (89)  |
| 第二节 梁的挠曲线近似微分方程 .....           | (89)  |
| 第三节 用积分法计算梁的位移 .....            | (90)  |
| 第四节 用叠加法计算梁的位移 .....            | (94)  |
| 第五节 梁的刚度计算 .....                | (99)  |
| 第六节 弯曲的几个问题 .....               | (100) |
| 习 题 .....                       | (102) |
| 第八章 应力状态与强度理论 .....             | (104) |
| 第一节 应力状态的概念 .....               | (104) |
| 第二节 平面应力状态分析的解析法 .....          | (105) |
| 第三节 应力状态分析的图解法 .....            | (108) |
| 第四节 广义胡克定律 .....                | (110) |
| 第五节 强度理论 .....                  | (114) |
| 习 题 .....                       | (117) |
| 第九章 组合变形 .....                  | (122) |
| 第一节 概 述 .....                   | (122) |
| 第二节 弯曲与拉伸(压缩)组合变形 .....         | (123) |
| 第三节 弯扭组合变形 .....                | (131) |
| 习 题 .....                       | (133) |
| 第十章 压杆稳定 .....                  | (137) |
| 第一节 压杆稳定的概念 .....               | (137) |
| 第二节 压杆临界力的欧拉公式 .....            | (138) |
| 第三节 欧拉公式的适用范围 .....             | (139) |
| 第四节 超过比例极限后压杆的临界应力 临界应力总图 ..... | (142) |
| 第五节 压杆的稳定计算 .....               | (142) |
| 习 题 .....                       | (145) |
| 第十一章 动荷载 .....                  | (148) |
| 第一节 动荷载的概念 .....                | (148) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 第二节 等加速和等角速运动杆件的应力 ..... | (148) |
| 第三节 冲击应力 .....           | (150) |
| 习 题 .....                | (154) |
| 附录 型钢表 .....             | (156) |
| 习题答案 .....               | (164) |

# 第一章 绪 论

## 第一节 材料力学的任务和基本假设

机械和结构物的元件和零件,如梁、柱、轴、齿轮、滚珠和板等统称为构件。按着长、宽、高间的关系,构件可分为块件、板件和杆件。长、宽、高相当的构件为块件;厚度远小于长度和宽度的构件为板件;长度远大于宽度和高度的构件为杆件。与杆件长度方向垂直的截面为横截面,横截面的形心连线为杆的轴线。轴线与杆的横截面是垂直的。轴线为直线的杆称为直杆,轴线为曲线的杆称为曲杆。横截面的形状和大小沿轴线不变的直杆为等截面直杆,简称为等直杆。横截面沿轴线变化的杆称为变截面杆。材料力学研究的主要物体对象为杆件,大部分是等直杆。

固体受力后会发生变形,此固体称为变形固体。去掉外力后消失的变形称为弹性变形,去掉外力后不能消失的变形称为塑性变形。

为了保证受力杆件能够安全工作,要求杆件有足够的承载能力,即要求杆件有足够的强度、刚度和稳定性。

强度:是指杆件抵抗破坏的能力。破坏也称失效,是指杆件断裂或产生塑性变形。杆件在工作中不能破坏。

刚度:是指杆件抵抗弹性变形的能力。杆件在工作中一般要求不能产生较大的弹性变形。

稳定性:是指杆件抵抗失稳的能力。如有些直杆在两端受压力作用时,当轴向压力较大时就会突然变弯,这种失去保持原有(直线)平衡状态的现象称为失稳。压杆在工作中不能失稳。很多构件有失稳现象。

杆件的截面尺寸越大,材料越好,就会越安全,承载能力越高。但是还必须考虑经济方面的要求。材料力学的任务是通过理论和实验来研究杆件在荷载作用下的强度、刚度和稳定性,为即安全又经济地设计杆件提供理论基础和计算方法。

杆件的强度、刚度和稳定性是属于杆件的宏观力学性质,不是原子、分子及晶粒级的微观属性。因此,对杆件的固体材料的性质作一些假设:

1. 连续性假设:认为组成杆件的物质毫无空隙地充满杆件的体积。
2. 均匀性假设:认为杆件各点处材料的宏观力学性质是一样的。
3. 各向同性假设:认为杆件内同一点处的各个方向都具有相同的力学性质。符合该假设的固体材料称为各向同性材料。也存在着各向不同性的材料,这样的材料称为各向异性材料。如木材,其顺纹和横纹有不同的力学性质。

对杆件的变形作如下假设:

1. 小变形:杆件受力后产生的变形与杆件的原始尺寸相比小得多。
2. 线弹性变形:杆件受力后变形是弹性的,且变形与受力呈线性关系。

实际工程中的杆件的变形绝大部分是小变形,和线弹性变形。这使一些研究工作大大简化。

对杆件的研究是在这五条假设基础上进行的。对绝大部分实际情况这些假设是适用的,

如果有些假设不适用,如各向异性,大变形,塑性变形或非线性变形等情况,则会另有说明。

杆件的变形形式是多种多样的,但其基本变形有四种:拉伸或压缩、剪切、扭转和平面弯曲。以后将分别讨论。

## 第二节 内力与截面法

一根两端受拉力的橡皮筋会伸长,而且整个橡皮筋各个部分都会伸长,因此各部分之间相互必须有力的作用才能保持橡皮筋各部分的变形。物体由外力引起的各部分之间的相互作用力称为内力。这是一般的变形体力学中内力的概念。在材料力学中的内力指的更具体一些:杆件在外力作用下产生的各横截面上分布力系合力的特定的六个分量。有三个力的分量,有三个力偶的分量,共有六个内力。如果内力是力,则每个内力都有特定的作用点和特定的作用线,如果内力是力偶,则每个内力偶都有其特定和作用平面。一个内力对应杆的一个基本变形。

在材料力学中,为了叙述简单,根据使用情况的不同,内力有时表示力或力偶,有时表示力值或力偶矩。其实,在材料力学中外力也有类似的情况。因为内力的作用线或作用面都是固定的,所以力值或力偶矩都是代数值。每个内力都有专有的名称,专有的符号和正负规定。从根本上讲,内力的正负是根据杆的变形确定的。

求内力的最基本的方法称为截面法。截面法可分为三步:(1)在欲求内力的截面处假想地切开,任取一部分作为分离体,如实地画上外力(不能有任何移动);(2)在假想被切的截面处假设(画)内力,以表示去掉部分对保留部分(分离体)的作用;(3)根据平衡方程求出真实内力的大小和正负号。以后将给出用截面法求内力的具体例子。

## 第三节 应力与应变的概念

### 一、应力的概念

图 1—1 所示材料相同、截面面积不同的两根杆受拉力作用。若二杆外力相同,横截面上的内力也相同。显然粗杆被拉断比细杆被拉断时的外力大,即粗杆拉断时的内力大,细杆拉断时内力小。所以不能以杆件横截面的内力达到某值来确定是否破坏。为了讨论强度问题必须引入一个新量——应力。

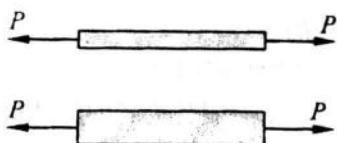


图 1—1

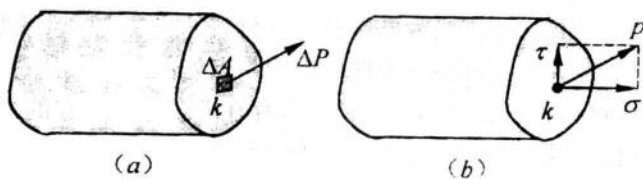


图 1—2

如图 1—2a 所示,围绕杆件横截面上一点  $k$  取一小面积  $\Delta A$ ,作用  $\Delta A$  上的合力为  $\Delta P$ ,于是  $\Delta A$  上内力的平均集度为

$$p_m = \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

$p_m$  也称为  $\Delta A$  上的平均应力。在一般情况下,由于内力并非均匀分布,故平均应力  $p_m$  还不能真实地表示  $k$  点处的内力集度。为了表示  $k$  点的内力集度,令  $\Delta A$  无限地向  $k$  点缩小,取  $p_m$  的极限值,即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

$p$  即为截面上  $k$  点处的应力——截面一点处的内力集度。

将  $p$  分解为与截面垂直的分量和与截面相切的分量,垂直于截面的应力分量称为正应力,用  $\sigma$  表示,与截面相切的应力分量称为剪应力,用  $\tau$  表示(图 1—2b)。

应力的量纲为[力]/[长度]<sup>2</sup>,其国际单位制单位为“帕斯卡”,简称“帕”(Pa), $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$ ,由于单位“帕”很小,应力单位常用兆帕(MPa), $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa}$ 。

## 二、应变的概念

在杆件变形前围绕  $k$  点取一小正六面体,如图 1—3a。设在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴方向的边长分别为  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  和  $\Delta z$ 。杆件变形后  $k$  点在  $x$  方向的位移为  $u$ ,小六面体在  $x$  方向长度改变了  $\Delta u$ (图 1—3b), $\Delta u$  与原长  $\Delta x$  之比值

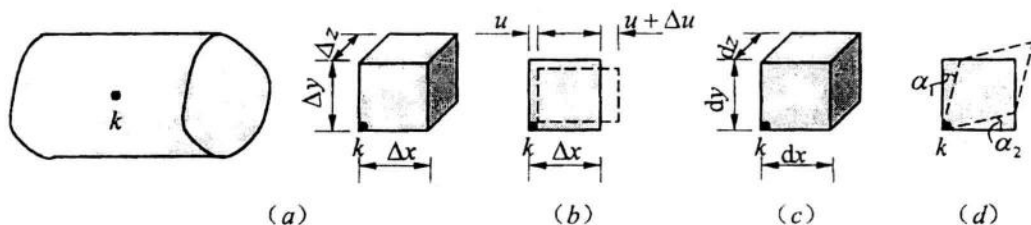


图 1—3

$$\epsilon_{xm} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\epsilon_{xm}$  称为线段  $\Delta x$  上各点  $x$  向的平均线应变。取平均线应变的极限

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (a)$$

$\epsilon_x$  称为  $k$  点  $x$  向的线应变。同样可定义  $k$  点  $y$  向和  $z$  向的线应变  $\epsilon_y$  和  $\epsilon_z$ 。

当  $\Delta x \rightarrow 0$ 、 $\Delta y \rightarrow 0$ 、 $\Delta z \rightarrow 0$  时,小六面体变为微小的六面体,称为单元体(图 1—3c),其边长为  $dx$ 、 $dy$  和  $dz$ 。由于单元体非常微小,其中每一点的应变(应力等量)都可认为是一样的。因此,单元体的平均线应变  $\epsilon_x$ (式 a)就可以认为是单元体中任一点(如  $k$  点)的线应变  $\epsilon_x$ ,等等。可以认为杆件由许多单元体组成,单元体上的应变和应力就表示了杆中相应点的应变和应力。

单元体变形后,不仅边长有变化,其各边夹角也可以有变化。图 1—3d 所示平面单元体(单元体的  $z$  向投影)的  $dx$  边与  $dy$  边变形前夹角为直角,变形后直角改变了  $\alpha_1 + \alpha_2$ 。将单元体的  $dx$  边与  $dy$  边间的直角改变量记为  $\gamma_{xy}$ ( $= \alpha_1 + \alpha_2$ ),则  $\gamma_{xy}$  为  $k$  点的  $xy$  方位的剪应变,它表示  $k$  点  $x$  方向与  $y$  方向间的直角改变量。同样可定义  $k$  点的  $yz$  方位和  $zx$  方位的剪应变  $\gamma_{yz}$  和  $\gamma_{zx}$ 。

线应变和剪应变都是无量纲量。

应力与点,同时也与截面有关;线应变与点,同时也与方向有关;剪应变与点,同时也与直角的方位有关。

应力表示一点受力的强弱程度,应变表示一点变形的强弱程度。材料是否破坏,由应力确定。

实验表明,正应力与线应变有关(图 1—4a),剪应力与剪应变有关(图 1—4b)。当一个单元体三个相互垂直方向的线应变为零时,单元体中与这些线应变垂直的面上就没有正应力;当单元体某方位直角没有改变时,即剪应变为零,就没有相应的剪应力。应力与应变的关系将在后面的有关章节讨论。

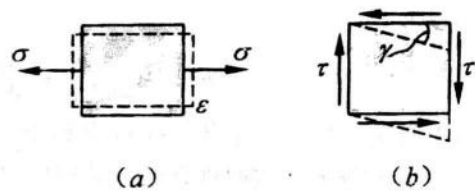


图 1—4

## 第二章 轴向拉伸与压缩

### 第一节 拉伸和压缩的概念

轴向拉伸或轴向压缩变形是杆件的基本变形之一。它的受力特点是：各外力的作用线与杆件的轴线重合。其变形特点是：横截面沿杆件轴向平行移动。若横截面距离变大，则为轴向拉伸变形；若横截面距离变小，则为轴向压缩变形。图 2—1、图 2—2 所示的分别是直杆最简单的拉伸变形和最简单的压缩变形。

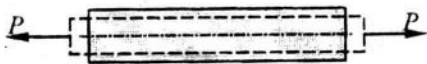


图 2—1

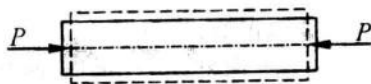
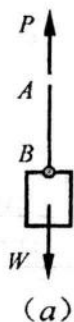
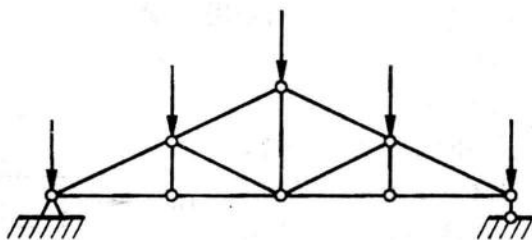


图 2—2

受轴向拉伸或压缩的杆件在工程中经常见到，如起吊重物  $W$  时(图 2—3a)，吊索  $AB$  受拉力  $P$  的作用；屋架中的各杆受拉力或压力作用(图 2—3b)。再如，联结两块钢板用的螺栓(图 2—4a)，当螺母拧紧时，螺栓杆将受到拉力的作用(图 2—4b)。



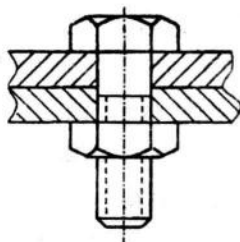
(a)



(b)

图 2—3

本章着重研究杆件受轴向拉伸或压缩时的内力、应力及变形的计算。同时还将通过拉伸和压缩实验，来研究工程材料受拉伸和压缩时所表现的性质——材料的力学性质。



(a)



(b)

图 2—4

## 第二节 拉压杆的内力——轴力与轴力图

### 一、轴力

以图 2—5a 所示杆件为例,现运用截面法求横截面  $m-m$  上的内力。假想在横截面  $m-m$  处切开,取左侧为分离体,如实画上外力。由平衡条件可知,截面上仅存在一个与力  $P$  平衡的内力,此内力称为轴力,用  $N$  表示。此内力值也称轴力,用  $N$  表示。轴力通过横截面的形心,且与横截面垂直。产生拉伸变形的轴力(拉力)为正,产生缩短变形的轴力(压力)为负。图 2—5b 中所假设的轴力  $N$  为正。根据平衡条件  $\sum X = 0$ ,得

$$N - P = 0, \quad N = P$$

得值为正,说明真实的轴力与假设的轴力指向相同。真实的轴力取正值,为拉力。

若取右侧为分离体(图 2—5c) 求轴力,得到的结果是一样的,即轴力  $N$  的大小和正负号相同。因此,同一截面的轴力是唯一的,即大小和正负是唯一的。但截面两侧面上的轴力的指向是相反的。

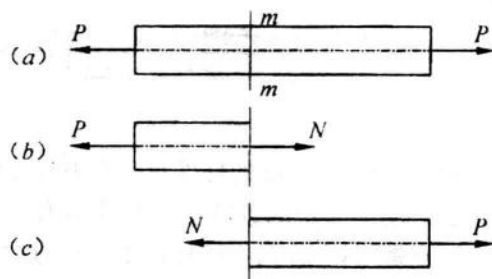


图 2—5

例 2—1 图 2—6a 所示直杆受轴向外力作用,试求 1—1, 2—2, 3—3 截面上的轴力。

解 当杆件受多个轴向外力作用时,求轴力时应分段进行。

1—1 截面的轴力  $N_1$

取 1—1 截面的左段为分离体,如实画外力,假设轴力  $N_1$  为拉力(图 2—6b)。以杆的轴线为  $x$  轴,由平衡条件  $\sum X = 0$ ,得

$$N_1 - 3 = 0$$

$$N_1 = 3\text{kN}$$

所得  $N_1$  为正值,说明  $N_1$  的实际方向与所设方向相同,即  $N_1$  为拉力。

2—2 截面的轴力  $N_2$

取 2—2 截面左段为分离体,画外力,假设轴力  $N_2$  为拉力(图 2—6c),由平衡条件  $\sum X = 0$  得

$$N_2 + 4 - 3 = 0$$

$$N_2 = -1\text{kN}$$

所得  $N_2$  为负值,说明  $N_2$  的实际方向与所设拉力的方向相反,即  $N_2$  为压力。

3—3 截面的轴力  $N_3$

取 3—3 截面右段为分离体,画外力,假设  $N_3$  为拉力(图 2—6d)。由平衡方程  $\sum X = 0$ ,得

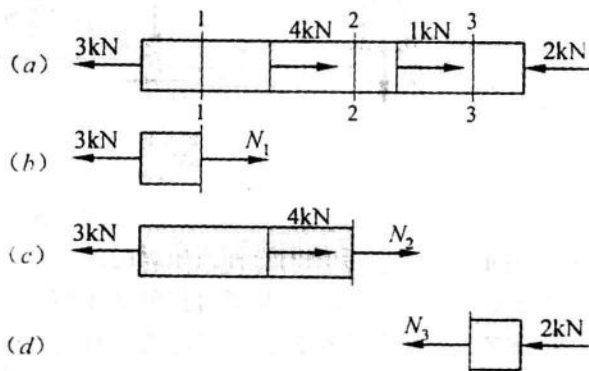


图 2—6

$$N_3 = -2\text{kN}$$

所得数值为负值,说明  $N_3$  的实际方向与所设拉力的方向相反,即  $N_3$  为压力。

由上述计算知,在计算杆件轴力时,先假设所求截面的轴力为拉力,即假设轴力取正值时,根据平衡条件,最终求出的数值若为正,说明该截面真实轴力为拉力,若为负值,则该截面的轴力为压力。即当假设的轴力取正值时,可用得数的正负表示真实轴力的正负,而不必再做判断,也不必另外注明该截面的轴力是拉力或是压力。

## 二、轴力图

在多个力作用时,由于各段杆轴力的大小及正负号各异,所以为了形象地表明各截面轴力的变化情况,通常将其绘成轴力图。图中用横坐标  $x$  轴表示横截面位置,用纵坐标  $N$  轴表示对应截面的轴力值。画轴力图时, $N$  轴不必画出, $x$  轴可用基线代替。基线是表示横截面位置的内力零值线,与  $x$  轴重合,与横截面对齐。正值画在基线上方,负值画在基线下方。

画轴力图的步骤是:画基线,画轴力图线,画图线与基线间的连接竖线,加  $\oplus$ 、 $\ominus$  号,在图内画竖线,写出各段轴力值(不带正负号)和单位,标出内力图的标志符。轴力图的标志符是  $\odot$ 。

图 2—7a 所示杆件,由例 2—1 知,在  $AB$ 、 $BC$  和  $CD$  三段内,截面上的轴力分别为  $N_1 = 3\text{kN}$ ,  $N_2 = -1\text{kN}$ ,  $N_3 = -2\text{kN}$ 。以此可绘出该轴的轴力图,如图 2—7b 所示。

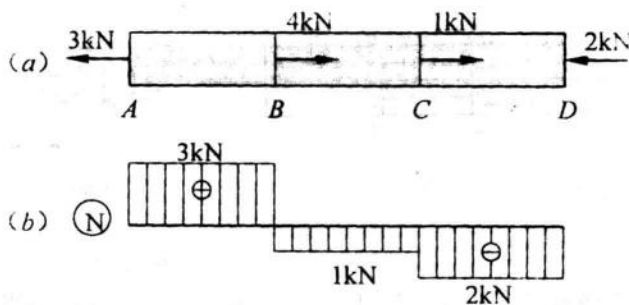


图 2—7

## 第三节 拉压杆横截面及斜截面上的应力

### 一、横截面上的应力

内力或应力均发生在杆件内部,是看不到的。而变形是可以直接观察到的。由于内力与变形有关,因此,可以通过观察变形推测应力在截面上的分布规律,进而确定应力的计算公式。

取一任意截面等直杆,在杆件表面画上与轴线垂直的横截面周线  $aa$ 、 $bb$  和平行于轴线的纵向线段  $cc$ 、 $dd$ (图 2—8a),然后,在杆端作用一对沿轴线的拉力  $P$ 。杆件变形后,可以看到,横截面周线  $aa$ 、 $bb$  分别仍在一个平面内,且分别平移到  $a'a'$ 、 $b'b'$ ,仍然垂直于轴线;纵向线  $cc$ 、 $dd$  都产生相同的伸长,成为  $c'e'$  和  $d'd'$ ,并仍平行于轴线(图 2—8b)。

根据上述现象,可作如下假设:

变形前的横截面,变形后仍为横截面,即仍为平面,且仍与轴线垂直。但之间的距离发生了变化。这个假设称为平面假设。

因横截面上有轴力,所以对应在横截面上必有正应力。但这时还不能说横截面上没有剪应力。为讨论横截面上正应力的分布规律及是否有剪应力,可设想从杆上取一微段  $efhg$ ,其变形前长为  $dx$ ,如图 2—8c 中实线所示,变形后到虚线位置  $e'f'h'g'$ 。根据平面假设,虚线与实线平行。从  $x$  截面  $k$  点处取单元体如图 2—8d 所示。单元体变形后,直角没有变化,说明没有剪应变;单元体有变形  $du$ ,说明有线应变,横截面上存在正应力。因为从  $x$  截面上各点取的单元体都相

同,所以横截面上各点都没有剪应力,而且各点正应力都是相同的。即正应力在横截面上均匀分布(图 2—8e)。

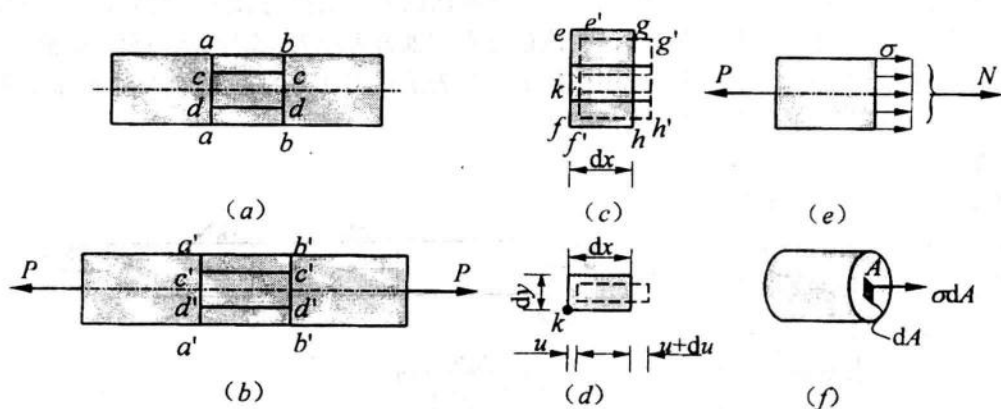


图 2—8

在横截面上取微面积  $dA$  (图 2—8f), 作用在  $dA$  上的内力为  $dN = \sigma dA$ 。由静力学条件, 整个横截面  $A$  上的内力的总和应等于轴力  $N$ , 即

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

得

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2-1)$$

此式为拉压杆横截面上正应力  $\sigma$  的计算公式。正应力  $\sigma$  的正负号规定为拉应力为正, 压应力为负。也可以计算出应力的大小, 再说明是拉应力或压应力。

例 2—2 图 2—9a 所示变截面杆件, 已知  $P = 25\text{kN}$ , 横截面面积  $A_1 = 2000\text{mm}^2$ ,  $A_2 = 1000\text{mm}^2$ , 试作轴力图, 并计算杆件各段横截面上的正应力。

解 由截面法求得  $AC$  段和  $CD$  段的轴力分别为

$$N_{AC} = -50\text{kN}, N_{CD} = 25\text{kN}$$

作轴力图如图 2—9b 所示。

正应力分三段计算, 由式(2—1), 得

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \frac{N_{AC}}{A_1} = \frac{-50 \times 10^3}{2000 \times 10^{-6}} = -25 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= -25 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{BC} &= \frac{N_{AC}}{A_2} = \frac{-50 \times 10^3}{1000 \times 10^{-6}} = -50 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= -50 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{CD} &= \frac{N_{CD}}{A_2} = \frac{25 \times 10^3}{1000 \times 10^{-6}} = 25 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= 25 \text{ MPa} \end{aligned}$$

## 二、斜截面上的应力

对于图 2—10a 所示拉杆, 用一个与横截面成  $\alpha$  角的斜截面  $m-m$ , 假想地将杆件截为两

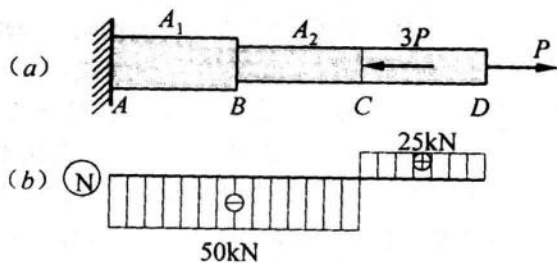


图 2—9

段,以左段为分离体(图 2—10b),由平衡条件,得该截面上的内力

$$N_a = P$$

仿照分析横截面上正应力分布规律的过程,可以得出斜截面上各点的总应力  $p_a$  也为均匀分布的,方向如图所示,于是有

$$p_a = \frac{N_a}{A_a} = \frac{P}{A_a} \quad (a)$$

式中  $A_a$  为斜截面面积。设横截面面积为  $A$ , 则有  $A_a = \frac{A}{\cos \alpha}$ 。将其代入式(a),并由式(2—1),可得

$$p_a = \sigma \cos \alpha \quad (b)$$

式中  $\sigma$  为横截面上的正应力。

将斜截面上任一点处的总应力  $p_a$  分解为正应力  $\sigma_a$  和剪应力  $\tau_a$  (图 2—10c),并由式(b),得

$$\sigma_a = p_a \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (2-2)$$

和

$$\tau_a = p_a \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (2-3)$$

式(2—2)和式(2—3)为拉压杆斜截面上的正应力  $\sigma_a$  和剪应力  $\tau_a$  的计算公式。这两式表明:斜截面上正应力  $\sigma_a$  和剪应力  $\tau_a$  都随斜截面的方位角  $\alpha$  的变化而改变。

当  $\alpha = 0$  时,截面为横截面,这时  $\sigma_a$  达到最大值,  $\sigma_{a\max} = \sigma$ ; 当  $\alpha = \pm 45^\circ$  时,  $|\tau_a|$  达到最大值,  $|\tau_a|_{\max} = \sigma/2$ ; 当  $\alpha = \pm 90^\circ$  时,  $\sigma_a = \tau_a = 0$ , 表明在平行于杆轴的纵向截面上无任何应力。

最后,应当指出,在推导式(2—1)时,并没有考虑杆件两端的轴向力是如何作用的。也就是说,我们现在看到的外力,实际上是在杆端以不同方式加载的静力等效荷载。那么,当杆端外力的作用方式不同时,式(2—1)是否都适用呢?研究表明,不论轴向力  $P$  以何种方式作用,在距力作用点稍远处横截面上的应力都是均匀分布的,都可以按式(2—1)计算正应力。而由于杆端非均匀受力所引起的应力非均匀分布的轴向尺寸,与杆端截面短边尺寸为同一量级,所加荷载的分布方式对应力的大小及分布规律的影响是局部的。这一结论称为圣维南原理。

**例 2—3** 图 2—11 所示两块钢板由斜焊缝焊接成整体,受拉力  $P$  作用。已知;  $P = 20\text{kN}$ ,  $b = 200\text{mm}$ ,  $t = 10\text{mm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ 。试求焊缝内的应力。

**解** 此题实际上是求板的斜截面  $AB$  上的应力。可应用公式(2—2)和(2—3),但需先求出横截面上的应力。根据式(2—1),横截面上的应力为

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

式中  $N = P$ ,  $A = bt$ ,

所以

$$\sigma = \frac{P}{bt} = \frac{20 \times 1000}{200 \times 10 \times 10^{-6}} = 10\text{MPa}$$

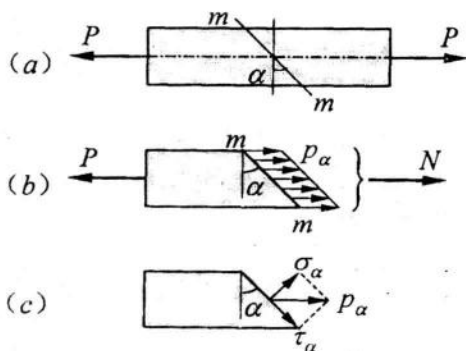


图 2—10

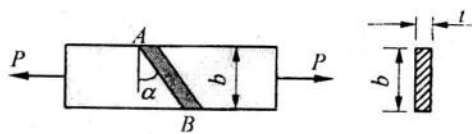


图 2—11

然后分别代入式(2—2) 和式(2—3),得

$$\sigma_{\alpha=30^\circ} = \sigma \cos^2 \alpha = 10 \times (\cos 30^\circ)^2 = 7.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha=30^\circ} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \times 10 \times \sin(2 \times 30^\circ) = 4.33 \text{ MPa}$$

## 第四节 拉压杆的变形

实验表明,杆件在轴向拉力或压力的作用下,沿轴线方向将发生伸长或缩短,同时,横向(与轴线垂直的方向)必发生缩短或伸长,如图 2—12 所示,图中实线为变形前的形状,虚线为变形后的形状。

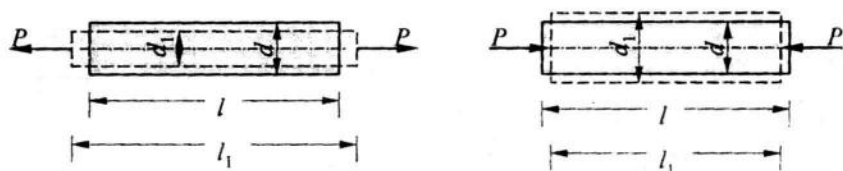


图 2—12

设  $l$  与  $d$  分别为杆件变形前的长度与横向尺寸,  $l_1$  与  $d_1$  为变形后的长度与横向尺寸,则变形后的长度改变量  $\Delta l$  和横向尺寸改变量  $\Delta d$  将分别为

$$\Delta l = l_1 - l$$

$$\Delta d = d_1 - d$$

$\Delta l$  称为拉压杆的轴向变形,  $\Delta d$  称为杆的横向变形。 $l(d)$  伸长时,  $\Delta l(\Delta d)$  为正,  $l(d)$  缩短时,  $\Delta l(\Delta d)$  为负。将轴向变形和横向变形除以杆件的初始尺寸,得

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2-4)$$

$$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d} \quad (2-5)$$

$\epsilon$  称为轴向线应变,  $\epsilon'$  称为横向线应变。它们都是无量纲的量。 $\epsilon$  和  $\epsilon'$  的正负号分别与  $\Delta l$  和  $\Delta d$  一致。正的应变为拉应变,负的应变为压应变。图示杆中各点的线应变是相同的,即杆中各点的轴向线应变都为  $\epsilon$ ,各点的横向线应变都为  $\epsilon'$ 。

实验表明,在弹性变形范围内,杆件的轴向变形  $\Delta l$  与轴力  $N$  及杆长  $l$  成正比,与截面面积  $A$  成反比,即

$$\Delta l \propto \frac{Nl}{A}$$

引入比例常数  $E$ ,把上式写成

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2-6)$$

$E$  值与材料性质有关,由实验测定,称为弹性模量,其量纲与应力相同。

式(2—6)表明,  $\Delta l$  与乘积  $EA$  成反比,即该乘积越大,轴向变形  $\Delta l$  越小,所以  $EA$  表示杆件抵抗拉伸(压缩)的能力,称为抗拉(压)刚度。用式(2—6)时,要求在  $l$  上  $N$ 、 $EA$  皆为常量。

若将  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ,  $\sigma = \frac{N}{A}$  代入式(2—6),可得