高等院校数学专业教材

XIANXING DAISHU

线性代数

胡万宝 舒阿秀 蔡改香 宛金龙 胡翔 编著

$$\begin{matrix} a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

线性代数是数学的
分支,它的研究对象
量空间(或称
空间),线性变换和
维的线性方程组.

中国科学技术大学出版社

高等院校数学专业教材

线 性 代 数

胡万宝 舒阿秀 蔡改香 宛金龙 胡 翔 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

线性代数的理论是计算技术的基础，随着计算技术的发展和计算机的普及，线性代数作为理工科的一门基础课程日益受到重视.线性代数这门课程的特点是概念比较抽象，概念之间联系很密切.

本书共分6章，内容包括行列式、矩阵、线性空间、线性变换、特征值和二次型.

本书内容的编排由浅入深、循序渐进，更加符合现今二本学生的教学实际，可以作为高等学校统计学类、信息类等专业的教科书，也可供相关理工科专业师生和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/胡万宝等编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2014.1
（高等院校数学专业教材/祝东进主编）
ISBN 978-7-312-03408-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第018582号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　14.25
字数　279千
版次　2014年1月第1版
印次　2014年1月第1次印刷
定价　26.00元

高等院校数学专业教材
编　委　会

主　编　祝东进

副主编（按姓氏笔画排序）

王信松　叶淼林　姚云飞

编　委（按姓氏笔画排序）

王先超　张节松　周其生

胡万宝　侯为波　郭明乐

唐小峰　黄旭东

前　　言

目前，国内的线性代数教材主要有两种类型，一类是内容很多、很深，这样的教材只能在“985”院校使用；另外一类就是一般工科院校使用的，这类教材内容较少，特别是其中数域上的向量空间是定义在实数域上的，降低了对学生数学品质培养的要求．这对于偏理科的如统计学等专业学生来说是不能满足需要的．本教材克服了以上两个极端，有合适的深度和广度，适合二本学校理科学生使用．

本书内容由浅入深、由易到难，习题的组织更加有层次且覆盖每个章节，在具体授课时，可以根据学时数以及实际需要，有选择地练习．考虑到在教学中培养学生实践能力和创新能力的需要，在大部分章节中，引入适量的背景来导入理论知识，同时在掌握理论之后，再通过实际例子将理论知识融会贯通．本书精选出一些具有代表性的例题，给出了解题思路和分析方法，题后提示了解题中应注意的问题，目的在于启发学生并培养学生的自学能力．

本书的章节编排顺序与其他教材有所不同，特别是将“线性方程组的解法和结构”放在“线性空间”一章里，主要是基于：① 用矩阵的秩来判别解的存在，而矩阵的秩在该章中有详细讨论；② 从线性空间的角度来理解线性方程组的解的结构．另外，本书将“二次型”这一章放在“特征值”内容之后，是为了将二次型的标准化与矩阵的正交化融合，使学生对这两部分有一个整体统一的认识．

学数学做习题无疑是重要的．书中习题按难度分 A、B 两类，A 类是为教材理论知识的掌握而设计的，在内容上重视基础理论，覆盖课程全部基本教学要求；B 类稍有难度，是为学生能力的提高而设计的，帮助学生加深理解基本理论并融会贯通，熟练掌握基本分析计算方法并举一反三，不断提高应试水平和知识的综合应用能力．但本书由于受篇幅所限，不能面面俱到，考研的学生还应视报考目标而选择

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

考研类资料去训练,以实现自己的目标.

本书内容主要参考了中国科学技术大学出版社出版的《高等代数》,其中包含了陈素根老师和汪志华老师的大量辛勤劳动,在此深表感谢.

由于编者水平和经验有限,加之编写时间仓促,本书难免会有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

胡万宝

2013 年 11 月

于安庆师范学院

目　　录

第1章 行 列 式

1.1 若干准备知识

1.1.1 数域

数是数学的一个最基本的概念.我们的讨论就从这里开始.在历史上,数的概念经历了一个长期发展的过程,大体上看,是由自然数到整数、有理数,然后是实数,再到复数.这个过程反映了人们对客观世界认识的不断深入.按照所研究的问题,我们通常需要明确规定所考虑的数的范围.譬如说,任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,限制在整数的范围内,除法不是普遍可以做的,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以做的.因此,在数的不同范围内同一个问题的回答可能是不同的.我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数,它们显然具有一些不同的性质.当然,它们也有很多共同的性质,在代数中经常是将有共同性质的对象统一进行讨论.关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**.代数所研究的问题主要涉及数的代数性质,这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的.有时我们还会碰到一些其他的数的范围,为了方便起见,当我们把这些数当作整体来考虑时,常称它为一个数的集合,简称数集.有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质.为了在讨论中能够把它们统一起来,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是某些复数所组成的集合,如果 P 中至少包含两个不同的复数,且 P 对复数的加、减、乘、除四则运算是封闭的,即对 P 内任意两个数 a,b(a 可以等于 b),必有 $a\pm b\in P$,$ab\in P$,且当 $b\neq 0$ 时,$a/b\in P$,则称 P 为一个**数域**.

设 R 是一个非空数集,如果 R 中的任意两个元素的和、差、积仍属于 R,则称 R 是一个**数环**.

例如,整数集就是一个数环,称为**整数环**,记为 $\mathbf{Z}$;全体偶数集也是一个数环,称为**偶数环**;显然,$\{0\}$ 也是一个数环.

数域是一个比较广泛的概念.我们看下面的例子.

例 1.1.1 典型的数域举例:复数域 $\mathbf{C}$;实数域 $\mathbf{R}$;有理数域 $\mathbf{Q}$;Gauss 数域:$Q(\mathrm{i})=\{a+b\cdot\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

例 1.1.2 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 F 是一个数域. 首先,容易看出,F 中至少有两个不同的数(例如,$0=0+0\sqrt{2}\in F$,$1=1+0\sqrt{2}\in F$),且 F 中任意两个数的和、差、积都在 F 中. 现设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$,那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$,否则在 $d=0$ 的情形下将得出 $c=0$,这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾;在 $d\neq 0$ 的情形下将得出 $\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}\in\mathbf{Q}$,这与 $\sqrt{2}$ 是无理数的事实矛盾. 因此

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.\end{aligned}$$

这就证明了 F 是一个数域.

命题 1.1.1 任意数域 P 都包括有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 P 为任意一个数域,由定义可知,存在一个元素 $a\in P$,且 $a\neq 0$. 于是

$$0=a-a\in P,\quad 1=\frac{a}{a}\in P;$$

进而对 $\forall\, m\in\mathbf{Z}, m>0$,有

$$m=1+1+\cdots+1\in P;$$

最后,$\forall\, m,n\in\mathbf{Z}, m>0, n>0$, $\dfrac{m}{n}\in P$, $-\dfrac{m}{n}=0-\dfrac{m}{n}\in P$. 这就证明了 $\mathbf{Q}\subseteq P$. 证毕.

1.1.2 连加号与连乘号

在数学教学中常常会碰到若干个数连加或连乘的式子,为了把加法和乘法表达得更简练,我们引进连加号和连乘号.

设给定某个数域 P 上 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,我们使用如下记号:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i;\tag{1.1.1}$$

$$a_1a_2\cdots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i.\tag{1.1.2}$$

"$\sum$"称为连加号,"$\prod$"称为连乘号,a_i 表示一般项,i 表示求和指标与求积指标,而连加号和连乘号上下的写法表示 i 的取值由 1 到 n. 例如

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2; \tag{1.1.3}$$

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i; \tag{1.1.4}$$

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)=\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i-1). \tag{1.1.5}$$

引入了记号后，我们先研究一下它们有哪些性质. 容易证明

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i; \tag{1.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i; \tag{1.1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}. \tag{1.1.8}$$

事实上，最后一条性质的证明只需要把各个元素排成如下形状：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{matrix}$$

分别先按行和列求和，再求总和即可.

最后，再对求和号加几点说明：

(1) 在求和表达式中，用什么字母作为求和指标是任意的，如

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{it}=\sum_{j=1}^{n}a_{jt}=a_{1t}+a_{2t}+\cdots+a_{nt}.$$

(2) 有时相加的数虽然是用两个指标编号，但是相加的并不是它们的全部，而是指标适合某些条件的那一部分，这时就在连加号下写出指标适合的条件. 例如

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i<j}a_{ij}=a_{12}+(a_{13}+a_{23})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{(n-1)n}).$$

(3) 当相加的数是用多个指标编号时，我们可以类似地使用多重连加号. 例如

$$\sum_{i+r=t}\ \sum_{j+k=r}a_ib_jc_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k.$$

1.2　二阶与三阶行列式

行列式是一个数，它由一些数字按一定方式排成的阵列所确定. 这个思想早在

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1683 年与 1693 年就分别由日本数学家关孝和德国数学家莱布尼茨独立提出，大约比形成独立体系的矩阵理论要早 160 年. 多年以来，行列式主要出现在线性方程组的讨论中. 在中学代数中，我们学过二元、三元线性方程组，但在生产实际中所遇到的线性方程组，它的未知量往往不止两个或三个. 就未知量个数和方程个数相等的线性方程组来说，一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这里 n 是正整数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未知量，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的系数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是常数项. 形如方程组(1.2.1)的线性方程组称为 **n 元线性方程组**. 在求解 n 元线性方程组的过程中便产生了行列式的概念. 下面我们先讨论二元与三元这两种比较简单的线性方程组的公式解.

例 1.2.1 探求二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

的公式解.

解 用加减消元法，为消去 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以方程组的两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

这样，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组(1.2.2)的公式解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.3}$$

虽然有了公式解，但是看上去比较复杂，不容易记忆. 为此我们引入记号.

我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2.4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2; j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行下标，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列下标，表示该元素位于第 j 列.

利用二阶行列式的概念，(1.2.3)式中 x_1, x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}.$$

那么解(1.2.3)可很方便地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}.\tag{1.2.5}$$

我们仔细观察用行列式形式表示的公式解(1.2.5),可以发现这样表示的解有一定的规律:

(1) x_1 与 x_2 的分母 D 都是由原方程组(1.2.2)的系数按原顺序所确定的二阶行列式(称为系数行列式).

(2) x_1 的分子 D_1 的第一列是原方程组的常数列,第二列由 x_2 的系数构成,因此这个行列式可以看成是将行列式 D 中的第一列换成常数列而得到的;同时,x_2 的分子 D_2 可以看成是将行列式 D 中的第二列换成常数列而得到的.

显然,这样的公式解更容易记忆.我们自然希望用同样的公式来得到三元线性方程组的公式解,乃至 n 元线性方程组的公式解.为此,先引入三阶行列式的概念.

我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.\tag{1.2.6}$$

例 1.2.2 探求三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.2.7}$$

的公式解.

解 同例 1.2.1 一样,用加减消元法,先从前面两式中消去 x_3,再从后两式中消去 x_3,得到只含 x_1 与 x_2 的二元线性方程组,然后再用消元法消去 x_2,就得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.$$

若 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0$,则得到

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3);$$

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31});$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

这就是三元线性方程组(1.2.7)的公式解.同样,利用三阶行列式的概念,我们可以很方便地表示出方程组(1.2.7)的公式解.

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

则 $D\neq0$ 时,方程组(1.2.7)的公式解就可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

观察上述公式解,可以看出此解有类似于二元线性方程组公式解的规律.

例 1.2.3 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+y_1+z_1=0,\\2x_1-5y_1-3z_1=10,\\4x_1+8y_1+2z_1=4.\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-5&-3\\4&8&2\end{vmatrix}=34\neq0,\quad D_1=\begin{vmatrix}0&1&1\\10&-5&-3\\4&8&2\end{vmatrix}=68,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&10&-3\\4&4&2\end{vmatrix}=0,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&-5&10\\4&8&4\end{vmatrix}=-68,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-2.$$

通过二阶和三阶行列式,我们就可以把系数行列式不为零的线性方程组(1.2.2)与(1.2.7)的解很简单地表示出来.于是,我们自然就想,一般的 n 元线性

方程组(1.2.1)的解能否用 n 阶行列式表示出来？为此，我们首先要定义 n 阶行列式.

1.3　n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，必须先弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此需要先介绍一下排列的概念.

1.3.1　排列

定义 1.3.1　由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 元排列**.

例如，3214 是一个 4 元排列，324615 是一个 6 元排列. 事实上，n 元排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!.$$

例 1.3.1　由数码 1,2,3 构成的全部 3 元排列共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

在所有的 n 元排列中，排列 $123\cdots n$ 称为**标准排列**，它的特点是较大的数码排在较小的数码之后. 而在其他 n 元排列中，都可以找到一个较大的数码排在较小的数码前面. 例如，在排列 321 中，3 排在 2 的前面，2 排在 1 的前面，这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序).

定义 1.3.2　在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果其中一个较大的数码排在某个较小的数码前面，则称这两个数码构成一个**反序(或逆序)**. 一个排列中的全部反序的个数称为这个排列的**反序数**，记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

说明　($N(j_1j_2\cdots j_n)$的算法)给定 n 个自然数，按大小顺序排列：

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n,$$

现在把它们按任意次序重排，得 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$，这个排列的反序数可用下法计算：先找出排在 i_1 前面的数字有多少，设为 $\tau(i_1)$，然后划去 i_1，再看 i_2 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_2)$，然后划去 i_2，再看 i_3 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_3)$，然后划去 i_3，…，经过 n 次后，即得

$$N(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(i_1)+\tau(i_2)+\cdots+\tau(i_n).$$

例 1.3.2　在排列 2431 中，21,43,41,31 是反序，2431 的反序数就是 4，即 $N(2431)=4$. 而 $N(3421)=5$.

定义 1.3.3　反序数为偶数的排列称为**偶排列**；反序数为奇数的排列称为**奇**

排列.

例如,排列 2431 为偶排列,排列 3421 为奇排列.

由例 1.3.2 知,排列 2431 与 3421 仅是交换了 2 与 3 的位置,但它们却一个是偶排列,一个是奇排列.这不是偶然的.关于排列的奇偶性,有如下基本事实.

我们把一个排列中某两个数码的位置互换,而其余的数码保持不动,就得到一个新的排列,这样的一个变换称为**对换**.

定理 1.3.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证明 **情形 1** 被对换的两个数码在排列中是相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots j\,k\cdots, \tag{1.3.1}$$

经过 j,k 对换变成

$$\cdots k\,j\cdots, \tag{1.3.2}$$

这里"…"表示那些不动的数.显然,在排列(1.3.1)与(1.3.2)中,j,k 与前后不动的数码构成的反序或顺序都是相同的,不同的只是 j 与 k 的次序变了.若原来构成反序,经过对换后,则 k 与 j 不构成反序,这样排列(1.3.2)比排列(1.3.1)的反序数少 1.反之,则排列(1.3.2)比(1.3.1)的反序数多 1.无论是减少 1 还是增加 1,排列的奇偶性都发生改变.

情形 2 被对换的两个数码在排列中不相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots j i_1 i_2\cdots i_s k\cdots, \tag{1.3.3}$$

对换 j 与 k,得到新的排列

$$\cdots k i_1 i_2\cdots i_s j\cdots, \tag{1.3.4}$$

不难看出,这样一个不相邻的两个数码的对换可以通过若干个相邻的两个数码的对换来实现.从排列(1.3.3)出发,将 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换,…,与 i_1 对换,最后与 j 对换,共经过 $s+1$ 次相邻数码的对换,排列(1.3.3)变成

$$\cdots k j i_1 i_2\cdots i_s\cdots. \tag{1.3.5}$$

再从排列(1.3.5)出发,把 j 与 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 一个一个地对换,共经过 s 次相邻数码的对换,排列(1.3.5)就变成了排列(1.3.4).因此,j 与 k 的直接对换可经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现.由于 $2s+1$ 是奇数,根据情形 1,排列(1.3.3)与(1.3.4)的奇偶性不同.证毕.

推论 1.3.1 奇数次对换改变排列的奇偶性,偶数次对换不改变排列的奇偶性.

定理 1.3.2 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 元排列中,奇偶排列的个数相等,各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设在这 $n!$ 个 n 元排列中,有 p 个互不相同的奇排列,有 q 个互不相同

的偶排列，则有 $p+q=n!$. 对这 p 个互不相同的奇排列都施行同一个对换(例如都对换数码 1 和 2)，则由定理 1.3.1 得到 p 个互不相同的偶排列，而互不相同的偶排列一共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$. 同理，对这 q 个互不相同的偶排列都施行同一个对换，得到 q 个互不相同的奇排列，于是，$q\leqslant p$. 因此，$p=q=\dfrac{n!}{2}$. 证毕.

定理 1.3.3 由数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的任意一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可以经过若干次对换变成标准排列，并且所做对换的次数与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性.

证明 对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 讲，若 $i_n\neq n$ 时，对换 i_n 与 n 得到新排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}n$，这里 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是数码 $1,2,\cdots,n-1$ 构成的排列. 若 $j_{n-1}\neq n-1$，对换 j_{n-1} 与 $n-1$ 得到新排列 $k_1\cdots k_{n-2}(n-1)n$，这里 $k_1k_2\cdots k_{n-2}$ 是数码 $1,2,\cdots,n-2$ 构成的排列. 因 n 是有限数，如此下去，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 就变成了标准排列 $1,2,\cdots,n$.

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是偶排列，由于标准排列 $1,2,\cdots,n$ 也是偶排列，则由推论 1.3.1 可知，所作的对换次数一定是偶数.

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列，则将 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成标准排列 $1,2,\cdots,n$ 时，改变了排列的奇偶性，于是，由推论 1.3.1 可知，所作的对换次数一定是奇数. 证毕.

1.3.2 n 阶行列式的定义

我们现在来给出 n 阶行列式的定义. 在给出定义之前，先来回顾一下二、三阶行列式的定义. 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{1.3.6}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.3.7}$$

从二、三阶行列式的定义中可以看出，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成. 在 $n=2$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项，正好是全部二元排列的个数，在 $n=3$ 时，由不同行不同列的元素构成的乘积只有式(1.3.7)中的 6 项，正好是全部三元排列的个数，这是二、三阶行列式特征的一方面. 另一方面，每一项乘积都带有符号，不是正号就是负号，它们是根据什么规律确定的? 可以看出，每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号是由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性来确定的，所带的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$. 于是，二、三阶行列式的定

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com