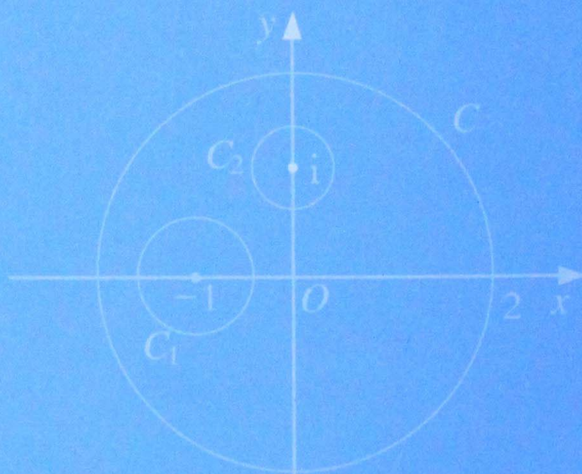
普 通 高 等 教 育 “十 二 五” 规 划 教 材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

樊孝菊 刘 华 宋朝红 吴昭君 ◎主编



$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z+1)(z-i)}\mathrm{d}z$$

华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

复变函数与积分变换

主　编：樊孝菊　刘　华
宋朝红　吴昭君

华中师范大学出版社

内 容 简 介

《复变函数与积分变换》是电气工程、电子信息、通信工程、自动化、物理学等理工科专业的必修课，其理论方法在自然科学和工程技术领域有着广泛的应用。

本书包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换共八章。此外，附录部分的复变函数与积分变换的数学实验可供学有余力和对这部分感兴趣的学生参考学习。

本书力求贯彻“强化概念、淡化理论、加强训练、学以致用”的原则，可作为普通高等学校本科理工类相关专业的教材，也可作为工程技术人员的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/樊孝菊 刘华 宋朝红 吴昭君 主编. —武汉：华中师范大学出版社，2013.8

(普通高等教育“十二五”规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6088-2

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①樊… ②刘… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材 ②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 099041 号

复变函数与积分变换

© 樊孝菊 刘华 宋朝红 吴昭君 主编

编 辑 室：第二编辑室
电 话：027－67867362
责任编辑：熊军军 袁正科
责任校对：易 雯
封面设计：胡 灿
出版发行：华中师范大学出版社
社 址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号
邮 编：430079
销售电话：027－67863426/67863280(发行部)
邮购电话：027－67861321
传 真：027－67863291
网 址：http://www.ccnupress.com
电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn
印 刷：武汉理工大印刷厂
督 印：章光琼
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：12.5
字 数：280 千字
版 次：2013 年 8 月第 1 版
印 次：2013 年 8 月第 1 次印刷
印 数：1－3000
定 价：22.80 元

欢迎上网查询、购书

普通高等教育“十二五”规划教材

新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书总序

未来社会是信息化的社会，以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展，信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中，正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中，我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段，更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标："全面提高高等教育质量"、"提高人才培养质量"、"提升科学研究水平"、"增强社会服务能力"、"优化结构办出特色"。这些目标的实现，有赖于各高校进一步推进数学教学改革的步伐，借鉴先进的经验，构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业，承担着培养高素质人才的重要作用。因此，新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题，不仅是值得关注的，更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化，加强各高校教学经验的广泛交流，构建高校数学院系的合作平台，华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势，由华中师范大学数学与统计学学院发起，诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校，面向全国共同开发这套"新世纪新理念高等院校数学系列精品教材"，并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望，这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛，切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来，这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学，要求教师少

讲、精讲，重点讲思路、讲方法，鼓励学生的探究式自主学习，教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者，学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点已不能满足这种新教学改革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战，传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此，我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点：

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际的数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向，设置大量的研讨性、探索性、应用性问题，鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用，以加深对所学数学知识的理解、反思，提高其实际应用能力。

二是内容精选、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上，对课堂教学内容进一步精炼浓缩，以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革；与此同时，教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫，使教材的内容逻辑更清晰，便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求，我们在教材编写的过程中，要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化，如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达，用实例和示例加深对概念、方法的理解，尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化，降低学生自主学习的难度。

当然，教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求，同时也受限于我们的水平，这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离，敬请各位教师，特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见！

朱长江
于武昌桂子山
2013 年 7 月

前　言

新世纪以来，我国高等教育倡导高校要国际化，教学要信息化，要将研究性教学、创新性教学、实用性教学与传统性教学相结合。

“十二五”开局之初，国家将提高人才培养质量，加强素质教育等多个人才培养目标提高到了一个前所未有的高度，这也引起了全国几乎所有高校的课程设置的改革和调整，导致了传统的数学课时被大量的压缩和削减。但是，作为一本优秀的数学教材，其完整的学科体系又要求必须要包含那么多的内容和深度，这与高校数学教学的现状必然相矛盾。在这样的新形式下，我们的教材编写思路必然要作出调整。

针对当前高校教学改革的现状和发展趋势，我们在总结多年教学教研成果的基础上，深思熟虑，对传统的内容进行了优化、精简和取舍，特编写了面向普通高等院校本科学生的《复变函数与积分变换》一书，以期在这方面做一些尝试，主要想突出以下特色：

1. 贯彻“强化概念、淡化理论、加强训练、学以致用”的原则，引入基本概念时尽量采用与实际问题密切联系的引例或引言，理论推导力求简明，注重直观性，突出应用性。

2. 在保证科学性的基础上，对传统内容进行优化、精简，减少某些理论推导，注重学生的基本运算能力和实际应用能力的培养。

3. 讲述条理清晰、推证简洁、通俗易懂、易教易学。

4. 例题、习题丰富。每一节后都有习题，每一章后都有综合练习题供学生练习和自测。例题的求解尽量给出多种解法，力求反映不同的思考方法及其联系。

5. 每一章的本章小结可帮助学生更清楚明了地把握学习要点，更深刻地理解本章的主要学习内容。每一章的思考题可培养学生独立思考问题、解决问题的能力，帮助学生理清较易混淆的一些概念。

《复变函数与积分变换》是电气工程、电子工程、通信工程、自动化、物理学等理工科专业一门重要的数学基础课，通过对本课程的学习，不仅能使学生学到复

变函数与积分变换中的基本理论及其在工程技术中的常规应用，而且还可以巩固他们以前所学习的高等数学知识，为后续相关课程的学习奠定坚实的基础。

本教材由樊孝菊、刘华、宋朝红、吴昭君共同编写。具体分工为：第 1 章、第 2 章由刘华编写，第 4 章、第 5 章由宋朝红编写，第 7 章、第 8 章及附录由吴昭君编写，樊孝菊负责第 3 章、第 6 章的编写及全书的统稿及校对工作。在本书的编写过程中，得到了华中师范大学数学与统计学学院领导的热情指导与帮助，得到了姜海波老师的鼎力相助，还得到了华中师范大学出版社袁正科编辑的大力支持，在此对他们一并表示感谢！

限于编者水平，书中难免有诸多不足之处，敬请各位专家、学者不吝指教，并欢迎广大读者批评指正。

编者

2013 年 5 月 10 日

目　　录

第 1 章　复数与复变函数 …… 1

1.1　复数与复平面 …… 1

1.1.1　复数的概念 …… 1

1.1.2　复数的几何表示 …… 1

1.1.3　复数的运算 …… 2

1.1.4　复数的三角表示与指数表示 …… 3

1.1.5　复数的乘方和开方 …… 5

1.1.6　无穷远点和复球面 …… 8

习题 1.1 …… 10

1.2　复平面点集 …… 10

1.2.1　点集的概念 …… 10

1.2.2　区域 …… 11

1.2.3　平面曲线 …… 11

1.2.4　单连通区域和多(复)连通区域 …… 12

习题 1.2 …… 13

1.3　复变函数 …… 14

1.3.1　复变函数的概念 …… 14

1.3.2　复变函数的极限与连续 …… 15

习题 1.3 …… 19

本章小结 …… 19

综合练习题 1 …… 20

第 2 章　解析函数 …… 22

2.1　解析函数的概念 …… 22

2.1.1　复变函数的导数 …… 22

2.1.2　复变函数可导的充分必要条件 …… 23

2.1.3　求导的运算法则 …… 25

2.1.4　解析函数概念 …… 25

2.1.5　解析函数的充分必要条件 …… 26

习题 2.1 …… 27

2.2 解析函数与调和函数 …… 27
2.2.1 调和函数 …… 27
2.2.2 共轭调和函数 …… 28
2.2.3 解析函数与调和函数的关系 …… 29
习题 2.2 …… 30
2.3 初等函数 …… 31
2.3.1 指数函数 …… 31
2.3.2 对数函数 …… 32
2.3.3 幂函数 …… 33
2.3.4 三角函数 …… 34
2.3.5 反三角函数 …… 35
2.3.6 双曲函数与反双曲函数 …… 36
习题 2.3 …… 37
本章小结 …… 37
综合练习题 2 …… 38
第 3 章 复变函数的积分 …… 40
3.1 复变函数的积分 …… 40
3.1.1 复变函数积分的概念 …… 40
3.1.2 复变函数积分的基本性质 …… 41
3.1.3 复变函数积分存在的条件及其计算方法 …… 42
习题 3.1 …… 45
3.2 柯西积分定理 …… 45
3.2.1 柯西积分定理 …… 45
3.2.2 复合闭路定理 …… 47
3.2.3 解析函数的原函数 …… 49
习题 3.2 …… 51
3.3 柯西积分公式 …… 52
3.3.1 柯西积分公式 …… 52
3.3.2 解析函数的高阶导数 …… 55
习题 3.3 …… 58
本章小结 …… 58
综合练习题 3 …… 59
第 4 章 级数 …… 61
4.1 复数项级数 …… 61
4.1.1 复数序列 …… 61
4.1.2 复数项级数 …… 62

4.1.3 复变函数项级数 …… 64
4.1.4 幂级数 …… 65
4.1.5 幂级数的运算性质 …… 68
习题 4.1 …… 70
4.2 泰勒(Taylor)级数 …… 70
4.2.1 解析函数的泰勒展开式 …… 70
4.2.2 一些初等函数的泰勒展开式 …… 73
习题 4.2 …… 74
4.3 罗朗(Laurent)级数 …… 74
4.3.1 双边幂级数 …… 74
4.3.2 解析函数的罗朗展开式 …… 75
习题 4.3 …… 77
本章小结 …… 77
综合练习题 4 …… 77
第 5 章 留数 …… 79
5.1 孤立奇点 …… 79
5.1.1 孤立奇点及分类 …… 79
5.1.2 复变函数的零点与极点的关系 …… 81
5.1.3 函数在无穷远点的性态 …… 82
习题 5.1 …… 83
5.2 留数 …… 83
5.2.1 留数的概念 …… 83
5.2.2 留数的计算 …… 83
5.2.3 无穷远点的留数 …… 85
习题 5.2 …… 85
5.3 留数定理及其应用 …… 86
5.3.1 留数定理 …… 86
5.3.2 计算沿简单闭曲线的复积分 …… 88
5.3.3 留数在定积分计算中的应用 …… 89
习题 5.3 …… 93
本章小结 …… 93
综合练习题 5 …… 94
第 6 章 共形映射 …… 96
6.1 导数的几何意义与共形映射 …… 96
6.1.1 导数的几何意义 …… 96
6.1.2 共形映射的概念 …… 98

6.1.3 共形映射的基本问题 …… 99
习题 6.1 …… 100
6.2 分式线性映射 …… 100
6.2.1 分式线性函数的分解 …… 100
6.2.2 分式线性映射的性质 …… 103
6.2.3 唯一决定分式线性映射的条件 …… 107
6.2.4 两类典型的分式线性映射 …… 109
习题 6.2 …… 111
6.3 几个初等函数构成的共形映射 …… 112
6.3.1 幂函数 $w=z^n(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$ 与根式函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 构成的映射 …… 112
6.3.2 指数函数 $w=e^z$ 与对数函数 $w=\ln z$ 构成的映射 …… 114
习题 6.3 …… 116
本章小结 …… 117
综合练习题 6 …… 117
第 7 章 傅里叶变换 …… 119
7.1 傅里叶变换的概念 …… 119
7.1.1 傅里叶级数 …… 119
7.1.2 傅里叶积分公式 …… 121
7.1.3 傅里叶变换的概念 …… 123
习题 7.1 …… 125
7.2 单位脉冲函数及其傅里叶变换 …… 125
7.2.1 单位脉冲函数的概念及其性质 …… 125
7.2.2 单位脉冲函数的傅里叶变换 …… 127
习题 7.2 …… 129
7.3 傅里叶变换的性质 …… 129
7.3.1 傅里叶变换的基本性质 …… 130
7.3.2 卷积与卷积定理 …… 133
7.3.3 傅里叶变换的应用 …… 136
习题 7.3 …… 138
本章小结 …… 138
综合练习题 7 …… 139
第 8 章 拉普拉斯变换 …… 140
8.1 拉普拉斯变换的概念 …… 140
8.1.1 拉普拉斯变换的定义和存在定理 …… 140
8.1.2 一些常用函数的拉普拉斯变换 …… 142
8.1.3 反演积分公式 …… 143

8.1.4　留数法计算反演积分公式 …… 144
习题 8.1 …… 145
8.2　拉普拉斯变换的性质 …… 146
8.2.1　拉氏变换的线性性质与相似性质 …… 146
8.2.2　拉氏变换的延迟与位移性质 …… 147
8.2.3　拉氏变换的微分性质 …… 148
8.2.4　拉氏变换的积分性质 …… 149
8.2.5　周期函数的像函数 …… 150
8.2.6　卷积与卷积定理 …… 151
习题 8.2 …… 152
8.3　拉普拉斯变换的应用举例 …… 152
8.3.1　求解常系数微分方程(组) …… 153
8.3.2　求解积分方程 …… 155
8.3.3　计算无穷积分 …… 157
习题 8.3 …… 158
本章小结 …… 158
综合练习题 8 …… 159
习题参考答案 …… 160
附录 …… 171
附录 1　复变函数与积分变换的数学实验 …… 171
附录 2　傅里叶变换简表 …… 178
附录 3　拉普拉斯变换简表 …… 181
参考文献 …… 186

第 1 章 复数与复变函数

自变量和因变量都为复数的函数是复变函数，它是本课程的研究对象。复数是复变函数的基础。本章主要回顾和补充了中学所学的复数的概念和基本运算，然后引入了平面点集、区域的概念，最后介绍了复变函数的概念、极限与连续等知识内容，为后面解析函数理论的学习作准备。

1.1 复数与复平面

1.1.1 复数的概念

定义 1.1 **对于任意两个实数 x、y，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数。称 i(其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$) 为虚数单位，规定 $\mathrm{i}^2=-1$；x 与 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$。**

当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$ 看作实数 x，因此复数是实数的推广；全体复数构成的集合称为复数集，记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbf{R}\}。$$

定义 1.2 **设两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，称** $z_1=z_2$。

注意　与实数不同，一般两个复数不能比较大小，只能说两个复数相等或不相等。

定义 1.3 **称 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$。易知 $\bar{\bar{z}}=z$。**

1.1.2 复数的几何表示

1. 复数与复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和一个有序实数对 (x,y) 是一一对应的，而有序实数对和坐标平面上的点是一一对应的，因而可用平面上坐标为 (x,y) 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，那么平面上的点与复数构成了一一对应的关系。此时的平面称为**复平面**或 **z 平面**。在复平面上，x 轴上的点表示的是实数，称 x 轴为**实轴**；y 轴上的点表示的是纯虚数，称 y 轴为**虚轴**。这样，复数和复平面上的点构成了一一对应的关系，这就是复数的几何表示，以后把“点 z”看作“复数 z”的同义词，从而我们可以借助几何的语言和方法研究复变函数问题，也为复变函数应用于实际奠定了基础。

2. 复数的模和辐角

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 除了与复平面内的点 $P(x,y)$ 一一对应外，与始点是 $O(0,0)$、终点是 $P(x,y)$ 的向量也是一一对应的。这样，复数和平面上的向量 $\overrightarrow{OP}$ 建立了一一对应关系，这

就是复数的向量表示，如图 1-1 所示。

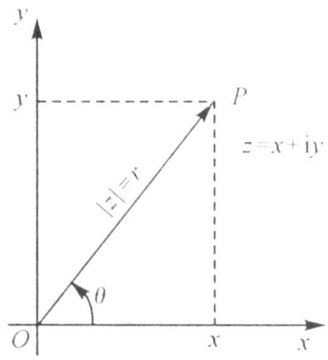


图 1-1

我们把向量$\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的**模**或**绝对值**，记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}。$$

显然有

$$|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, |z| \leqslant |x| + |y|。$$

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以向量$\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$。显然 θ 有无穷多个值，且任两个值之间相差 2π 的整数倍。若设 θ_0 是 z 的一个辐角，则 z 的辐角的全体为

$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)。$$

通常将满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记作 $\arg z = \theta_0$。

当 $z = 0$ 时，模 $|z| = 0$，辐角不确定。

当 $z \neq 0$ 时，由于 $\tan(\arg z) = \dfrac{y}{x}$ 和 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 表示$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$内正切值为$\dfrac{y}{x}$ 的一个角，于是有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, y \text{ 为任意的实数}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0。\end{cases}$$

1.1.3 复数的运算

定义 1.4 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，定义两个复数的加、减、乘法如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)。$$

定义 1.5　称满足 $z_2 z = z_1 (z_2 \neq 0)$ 的复数 $z = x + iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z = \frac{z_1}{z_2}$。由复数乘法和相等的定义可知

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}。$$

注意　两个复数相除较简捷的方法是分母实数化。即分式的分子和分母同乘以分母的共轭复数，使分母变为实数。

不难证明，复数运算满足以下运算律：

(1) 交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$；

(2) 结合律：$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$；

(3) 分配律：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$。

接下来，我们介绍有关共轭复数的运算性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$；

(2) $z\overline{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = x^2 + y^2$；

(3) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z = 2x, z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}z = 2iy$。

例 1　设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，证明 $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$。

证明　$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$。

由于复数和向量构成了一一对应的关系，再由复数的运算可知，两个复数的加减运算和相应向量的加减运算是一致的。它们可以用平行四边形及三角形法则来表示。复数加减法的几何意义如图 1-2 所示。

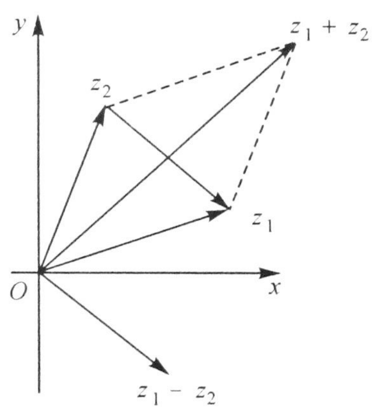


图 1-2

由复数加、减法的几何意义和构成三角形的条件有下列不等式：

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|。$$

当且仅当 z_1 和 z_2 同向时，上两式等号成立。其中 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 的距离。

1.1.4　复数的三角表示与指数表示

利用模 $|z| = r$ 和辐角 $\mathrm{Arg}z = \theta$，可表示出复数 z 的实部 x 和虚部 y，即

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta。$$

从而复数

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.1}$$

可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)。\tag{1.2}$$

根据欧拉公式：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}。\tag{1.3}$$

我们把式(1.1)、(1.2)、(1.3) 分别称为复数的**代数表示式**、**三角表示式**、**指数表示式**。

复数的三种表示式根据讨论不同问题的需要可以相互转换。

例 2 将复数 $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ 化为三角表示式和指数表示式。

解 由于复数 $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ 位于第二象限，从而

$$\arg z = \arctan\frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = \frac{5}{6}\pi,$$

且 $|z| = 2$，故三角表示式和指数表示式为

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}。$$

例 3 将复数 $z = 1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ 化为三角表示式和指数表示式。

解法一 由 $1 - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{i}}。$$

解法二 $|z| = r = \sqrt{(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2\sin\frac{\varphi}{2}$。

由于复数 z 对应的是第一、四象限的点，故

$$\arg z = \arctan\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \arctan\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}。$$

从而

$$z = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{i}}。$$

接下来我们利用复数的几何表示研究复数的乘幂和开方。