10年品牌　超实用

2014 百题大过关

修订版

中考数学

第三关

曾大洋　林顺民◎主编

上海市著名商标 ECNUP
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

2014 百题大过关

中考数学

第三关　压轴题（修订版）

主　编：曾大洋　林顺民

编写者：
曾大洋　林顺民　黄世民　杨进南

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学百题大过关．第三关：压轴题/曾大洋，林顺民主编．—修订版．—上海：华东师范大学出版社，2013．1
（百题大过关）
ISBN 978－7－5675－0271－0

Ⅰ．①中…　Ⅱ．①曾…②林…　Ⅲ．①中学数学课—初中—习题集—升学参考资料　Ⅳ．①G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 021427 号

百题大过关

中考数学·第三关　压轴题(修订版)

主　　编　曾大洋　林顺民
总 策 划　倪　明
项目编辑　舒　刊
审读编辑　石　岩
装帧设计　卢晓红
责任发行　高　峰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021－60821666　行政传真 021－62572105
客服电话　021－62865537　门市(邮购)电话 021－62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　13.25
字　　数　335 千字
版　　次　2013 年 4 月第三版
印　　次　2013 年 7 月第二次
印　　数　35001－46000
书　　号　ISBN 978－7－5675－0271－0/G·6159
定　　价　25.00 元

出 版 人　朱杰人

丛书前言

图书市场上有关小升初及中、高考的复习用书不胜其多,不少书的训练题或失之偏少,或庞杂无度.同时选择几种作参考,往往重复不少,空白依旧甚多,费时费钱还未必能完全过关.怎样在有限的时间里得到充分而有效的训练?怎样使训练达到量与质的最完美匹配?依据对小学毕业班、初三和高三优秀教师的调研,总结出“百题过关”的复习理念.为此,我们邀请经验丰富的教师担任作者,每本书或每个考点精心设计一百道互不重复且具有一定梯度的训练题,以求用最快的速度,帮助学生完全过关.

丛书共41种,涵盖小升初语文、数学、英语及中、高考语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理的全部题型.

丛书具有四大特点:

一、丰富性.丛书涉及的内容囊括了小升初及中、高考所有知识点,覆盖面广,内容丰富.

二、层次性.题目排列杜绝杂乱无章和随意性,一般分为三个层次:第一,精选历年来的相关考题;第二,难度稍小的训练题;第三,难度稍大的训练题.这样编排既能让读者了解近年来小升初及中、高考的命题特点及其走向,又能得到渐次加深的足够量的训练.

三、指导性.为了方便使用本丛书的老师和同学,对有一定难度的题目,丛书不仅提供参考答案,还力求作最为详尽的解说,目的在于让读者知其然,更知其所以然.同学们有了这套书,就等于请回了随时可以请教的老师.

四、权威性.丛书的编写者都是国内名校骨干教师,有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师,在各地享有盛名.他们丰富的教学实践经验和深厚的理论修养,为本丛书在同类书中胜人一筹打下扎实基础.

愿这套高质量的丛书能帮助考生顺利闯过小升初及中、高考大关,也愿考生以小升初及中、高考为新起点,步入美好的未来.

华东师范大学出版社教辅分社

编写说明

数学是中考学科“含金量”最重的一门学科，对需要参加中考，尤其是想升入高一级学校继续学习的初三学生来说，必须认真面对数学科中考，勇敢闯过中考数学这个重要关口. 机遇与挑战并存，希望与困难同在.

综观各地的中考数学卷，满分一般是120分或150分，考试用时大多是2小时，题量（包括解答题中的小题）大概为35题左右，题型有“选择题”、“填空题”、“解答题”三类，题目按难度区分又有“容易题”、“中档题”、“稍难题”三种（整卷“容易题”、“中档题”、“稍难题”的分值之比约为7∶2∶1）. 许多同学的中考成绩不理想，其原因不外有两个，或者因为自身基础知识薄弱，运算、推理、应用能力欠缺；或者由于对中考产生紧张、畏难情绪导致看错、理解错题意，对各种难度题目平均使用力量导致考试用时不够. 为了帮助初中毕业生更好地闯过中考数学这一大关，我们编写了这套《中考数学百题大过关》丛书，目的是让各位读者读完全套丛书，研究、做完书中的例题、练习题后，能了解中考数学卷的结构，发挥自己的最大潜能，顺利解答中考数学试卷，取得较好的成绩，考上理想的学校.

本着为考生服务的宗旨，丛书的编写尽量顺应初中毕业生的实际学习状况，选题力求全面性与典型性，注意根据中考数学命题的统计分布来确定各知识点、各题型的题量，尽量涵盖多年来中考常见的各种题型；同时注意中考数学命题的变化趋势，尽量选取近年来中考的创新题型.

学生在学习程度上有差异，有好、中、差之分，学习的过程从易到难. 为适合不同学生不同阶段的学习需要，我们按照中考数学试题的难易程度，把这套丛书分为三册书来编写，它们分别为《第一关　基础题》，《第二关　核心题》，《第三关　压轴题》. 各册简介如下：

《第一关　基础题》所选的题目为容易题，若按整卷满分150分计，中考容易题分值在100分左右，基础较差的考生认真用好该册书后，能确保拿到容易题（即基础题）的分数，中考成绩便超过100分. 该书按知识点来编排，对初中阶段数学基础知识进行全面的复习，总题量有600题.

《第二关　核心题》所选的题目为中档题，若按整卷满分150分计，中考中档题分值在30分左右，基础一般的考生认真用好该册书后，能确保拿到中档题（即核心题）的分数，中考成绩便可达到130分以上. 该书按数学思想方法和能力要求来编排，强调数学的核心本质与应用，总题量有400题.

《第三关　压轴题》所选的题目为稍难题，若按整卷满分150分计，中考稍难题分值在15分左右. 基础较好的考生认真用好该册书后，能确保拿到稍难题（即压轴题）的分数，中考成绩便可达140分以上. 该书按“题型”编排，对每一类型的压轴题做详尽的介绍，总题量有100题.

当然，上述各类同学在用完相应的一本书后，可根据自己的具体情况，再选取其他一本或两本书来研读，这对进一步夯实基础知识，提高解题能力，取得更好成绩大有裨益.

本书《第三关　压轴题》为丛书的第三册. 针对初中数学压轴题类型，本书分“实验操作类”、“猜想证明类”等八种题型进行评述. 在各题型的评述中，详尽讲解了该题型的压轴题在中考命题中的特点与趋势，并讲清该题型的解题策略，同时附典型例题加以说明。对每一道典型例题，详细阐述了它的命题意图、答题要旨（解题思路与得分关键）、满分解答过程、易错分析

(失分原因),还选取相应的变式训练题让读者练习巩固.相信大家认真阅读本书并做好相关变式训练题(书末附有答案与提示)后会受益匪浅,特别是基础较好的同学一定会过好“优秀”关.

吃透百题,胜券在握.愿读者增强信心,闯过“基础题”、“核心题”、“压轴题”三关,在数学中考中打个漂亮仗!

编　者

目录

专题一 实验操作类试题

命题特点与趋势

在近几年的中考压轴题中，数学实验操作类试题的命制往往是以几何图形为背景，通过剪切与拼图、折叠与翻转、平移与旋转构造出新图形，从图形的形状和位置的变化中去探求函数、方程、全等、相似、解直角三角形等知识间的内在联系.实验操作类试题是近几年来中考数学试卷中出现的一种新题型，随着新课程改革的不断深入，实验操作类试题作为考查学生分析、解决问题能力以及创新意识的良好载体，已逐渐成为中考的热点题型之一.

解题要领

实验操作类试题的题干分为动手操作和问题探究两部分，需要通过操作、观察、猜想、证明、计算等数学活动来完成解题.解决的过程要综合用到数形结合、函数与方程、运动变化、特殊与一般等数学思想，通过分类讨论、相似与全等、函数建模等方法实现问题的解决.下面列举范题说明此类问题的解题策略.

一、剪切与拼图

剪切与拼图型试题往往直接考查实际操作能力，就是在原来图形的基础上通过剪切后重新拼合成符合条件的新图形.这类题大多联系生活实际，内容开放，需要进行多方面、多角度、多层次探索，能检验思维的灵活性、发散性和创新性.

001 用一块边长为 60 cm 的正方形薄钢片制作一个长方体盒子：

(1) 如果要做成一个没有盖的长方体盒子，可先在薄钢片的四个角上截去四个相同的小正方形(如图 1 - 1)，然后把四边折合起来(如图 1 - 2).

① 求做成的盒子底面积 $y(\text{cm}^2)$ 与截去小正方形边长 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式；

② 当做成的盒子的底面积为 900 cm^2 时，试求该盒子的容积.

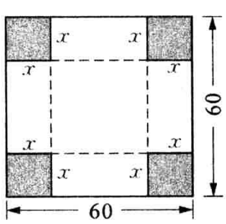

图 1 - 1

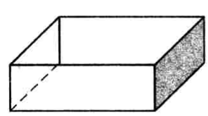

图 1 - 2

(2) 如果要做成一个有盖的长方体盒子，其制作方案要求同时符合下列两个条件：

① 必须在薄钢片的四个角上各截去一个四边形(其余部分不能裁截)；

② 折合后薄钢片既无空隙又不重叠地围成各盒面.

请你画出符合上述制作方案的一种草图(不必说明画法与根据)；并求当表面积为 $2800\ cm^2$ 时，该盒子的高.

【命题意图】试题以身边的题材为背景，重点考查方程应用能力及动手操作能力. 试题立意新，构思巧妙，突出学数学、用数学的课改理念. 同时，试题有力地促进数学教学由重视解题训练转向重视理论联系实际.

【答题要旨】解题思路"实际问题——数学问题——求解". 问题(1)的解题关键是用含 x 的代数式表示底面的边长，然后利用面积公式求出 y 与 x 的函数关系式；问题(2)是本题的难点，解题的关键是准确把握长方体盒子的对称性设元并列出方程. 经分析，问题(2)所截去的四个四边形中必有 2 个同样形状、同样大小的矩形和 2 个同样形状、同样大小的正方形，且当正方形的边长为 x 时，矩形的两边分别为 x 和 30，把握这个特征，于是问题轻松求解.

【满分解答】

解 (1) ①由题意得：盒子底面的边长为 $(60-2x)$，所以 $y=(60-2x)^2$. ②当 $y=900$ 时，即 $(60-2x)^2=900$，解得 $x_1=15$，$x_2=45$，但当 $x=45$ 时，$60-2x=-30$，所以 $x=45$ 不符合题意，舍去. 所以当 $y=900$ 时，小正方形边长为 $x=15$，此时盒子的容积 $=900\times15=13\ 500(cm^3)$.

(2) 由题意得：截去的四个四边形的各边如图 1－3 所示. 所以有 $60^2-2x^2-2\times30x=2800$，整理得：$x^2+30x-400=0$，解得：$x_1=10$，$x_2=-40$ (不合题意，舍去). 即 $x=10$.

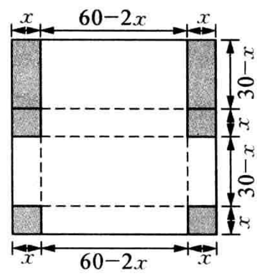

图 1－3

答：当表面积为 $2800\ cm^2$ 时，该盒子的高为 10 cm.

【易错分析】草图各边比例不规范，各边必要的标注欠缺；表面积概念不清，导致不能准确找到等量关系.

【变式训练】

001 探索研究：如图 1－4，把一张长 10 cm，宽 8 cm 的矩形硬纸板的四周各剪去一个同样大小的正方形，再折合成一个无盖的长方体盒子(纸板的厚度忽略不计).

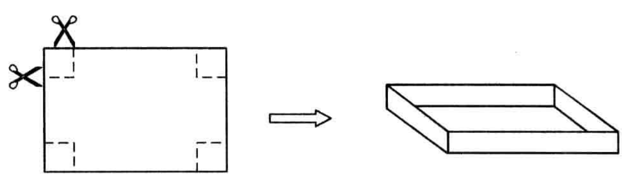

图 1－4

(1) 要使长方体盒子的底面积为 $48\ cm^2$，那么剪去的正方形的边长为多少？

(2) 你感到折合而成的长方体盒子的侧面积会不会有最大的情况？如果有，请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长；如果没有，请你说明理由；

(3) 如果把矩形硬纸板的四周分别剪去 2 个同样大小的正方形和 2 个同样形状、同样大小的矩形，然后折合成一个有盖的长方体盒子，当长方体的高等于所剪去的正方形的边长时，是否有侧面积最大的情况？如果有，请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长；如果没有，

请你说明理由.

002 已知：如图 2－1，图形①满足 $AD=AB$，$MD=MB$，$\angle A=72°$，$\angle M=144°$. 图形②与图形①恰好拼成一个菱形(如图 2－2). 记 AB 的长度为 a，BM 的长度为 b.

(1) 图形①中 $\angle B=$ ________°，图形②中 $\angle E=$ ________°；

(2) 小明有两种纸片各若干张，其中一种纸片的形状及大小与图形①相同，这种纸片称为“风筝一号”；另一种纸片的形状及大小与图形②相同，这种纸片称为“飞镖一号”.

① 小明仅用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形，需要这种纸片________张；

② 小明若用若干张“风筝一号”纸片和“飞镖一号”纸片拼成一个“大风筝”(如图 2－3)，其中 $\angle P=72°$，$\angle Q=144°$，且 $PI=PJ=a+b$，$IQ=JQ$. 请你在图 2－3 中画出拼接线并保留画图痕迹.（本题中均为无重叠、无缝隙拼接）

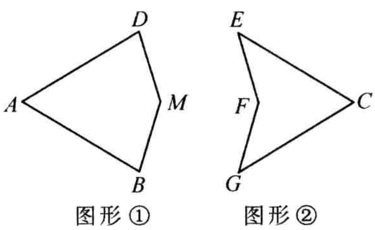

图 2－1

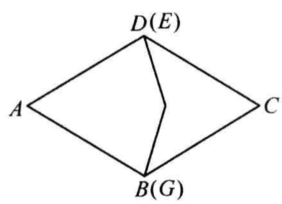

图 2－2

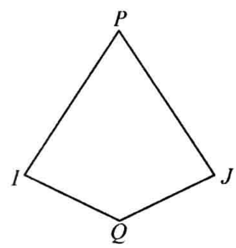

图 2－3

【命题意图】试题呈现方式新颖，突出动手操作能力. 要解答好此题，除必须掌握菱形的性质、三角形全等的性质、三角形(或四边形)的内角和及密铺地面的秘诀外，还应具备较强的观察、分析及探索能力. 作为压轴题，它的难度有所降低，但更实用，充分体现“玩中学，学中做”的课改理念.

【答题要旨】这是一道操作探索题，解决此类试题通常应先通过观察，然后借助度量、猜想或辅助线发现结论. 问题(1)的解题关键是连结 AM，然后借助$\triangle ADM \cong \triangle ABM$ 的性质及三角形(或四边形)的内角和求出$\angle B$ 的度数，而$\angle E$ 可借助图 2－2 菱形的性质求解；问题(2)第①小题应将实际问题转化为图形的镶嵌；第②小题主要考查基本作图的应用，其画法为：如图 2－4，以 P 为圆心，a 为半径画弧，与 PI 和 PJ 分别交于 M、N 两点，然后分别以点 M、点 N 为圆心，b 为半径在$\angle IPJ$ 的内部画弧，取两弧交点中离点 P 较近的一点，连结这点与点 Q，画出满足题意的拼接线.

【满分解答】

解 (1) 72，36.

(2) ① 5(提示：要用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形，由正十边形性质可知“风

筝一号"纸片的点 A 与正十边形的中心重合，又 $\angle A=72^\circ$，则需要这种纸片的数量 $=\frac{360^\circ}{72^\circ}=5$）.

② 依题意，可用两张"风筝一号"纸片和一张"飞镖一号"纸片拼成一个"大风筝"，其拼接线如图 2－4 所示.

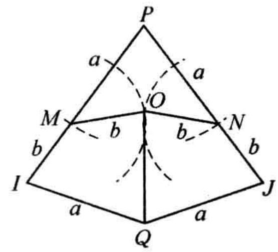

图 2－4

【易错分析】问题(1)因不会添加辅助线导致解题困难；问题(2)或所画图形不规范（如画图痕迹欠缺，各边缺少必要的标注等）；或因对无重叠、无缝隙拼接的理解不清而找不到问题解答的切入点.

【变式训练】

002 如图 2－5，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB \parallel DC$，由 4 个这样的等腰梯形可以拼出图 2－6 所示的平行四边形.

(1) 求四边形 $ABCD$ 四个内角的度数；

(2) 试探究四边形 $ABCD$ 四条边之间存在的等量关系，并说明理由；

(3) 现有图 2－5 中的等腰梯形若干个，利用它们你能拼出一个菱形吗？若能，请你画出大致示意图.

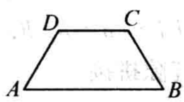

图 2－5

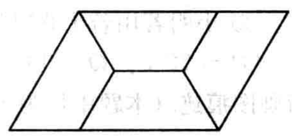
图 2－6

003

操作示例：

对于边长为 a 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$，按图 3－1 所示的方式摆放，在沿虚线 BD、EG 剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为图 3－1 中的四边形 $BNED$.

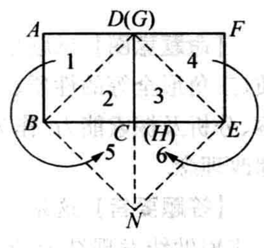

图 3－1

从拼接的过程中容易得到结论：

① 四边形 $BNED$ 是正方形；② $S_{\text{正方形}ABCD}+S_{\text{正方形}EFGH}=S_{\text{正方形}BNED}$.

实践与探究：

(1) 对于边长分别为 a、b ($a>b$) 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$，按图 3－2 所示的方式摆放，连结 DE，过点 D 作 $DM\perp DE$，交 AB 于点 M，过点 M 作 $MN\perp DM$，过点 E 作 $EN\perp DE$，MN 与 EN 相交于点 N.

① 证明四边形 $MNED$ 是正方形，并用含 a、b 的代数式表示正方形 $MNED$ 的面积；

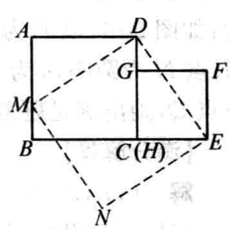

图 3－2

② 在图 3-2 中，将正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 沿虚线剪开后，能够拼接为正方形 $MNED$，请简略说明你的拼接方法(类比图 3-1，用数字表示对应的图形)．

(2) 对于 n(n 是大于 2 的自然数)个任意的正方形，能否通过若干次拼接，将其拼接成为一个正方形？请简要说明你的理由．

【命题意图】试题给出两个正方形的组合图形，采用了类似于勾股定理探究时使用的图形割补拼接法，将动手操作与演绎推理有机结合．该题不仅可以加强对思维能力的培养，而且使创新教育和实践能力的培养落到了实处，充分地体现了新课程的理念．

【答题要旨】解题关键是把握拼图变换过程中“面积不变”这一特征，围绕着构造全等三角形进行割补拼接，最后从特殊到一般得到结论：任意的两个正方形，按照一定的条件通过若干次拼接，均能拼接成为一个正方形．

【满分解答】

解 (1) ① 证明：由作图的过程可知四边形 $MNED$ 是矩形．

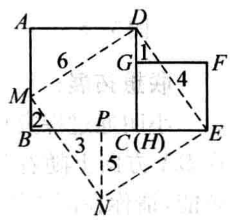

图 3-3

在$\triangle ADM$与$\triangle CDE$中，$\because \angle ADM+\angle MDC=\angle CDE+\angle MDC=90°$，$\therefore \angle ADM=\angle CDE$. $\because AD=CD$，$\angle A=\angle DCE$，$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CDE$. $\therefore DM=DE$，$\therefore$ 四边形 $MNED$ 是正方形. $\because DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2$，$\therefore$ 正方形 $MNED$ 的面积为 a^2+b^2．

② 过点 N 作 $NP\perp BE$，垂足为 P，如图 3-3．

可以证明图中 6 与 5 位置的两个三角形全等，4 与 3 位置的两个三角形全等，2 与 1 位置的两个三角形也全等．所以将 6 放到 5 的位置，4 放到 3 的位置，2 放到 1 的位置，恰好拼接为正方形 $MNED$．

(2) 答：能．

理由是：由上述的拼接过程可以看出：对于任意的两个正方形都可以拼接为一个正方形，而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形……依此类推．由此可知：对于 n 个任意的正方形，可以通过$(n-1)$次拼接，得到一个正方形．

【易错分析】错误的原因是对割补拼接拼图的基本常识没有掌握，不能构造全等三角形进行割补拼接，演绎推理能力有待提高．

【变式训练】

003 在图 3-4 至图 3-8 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，等腰直角三角形 FAE 的斜边 $AE=2b$，且边 AD 和 AE 在同一直线上．

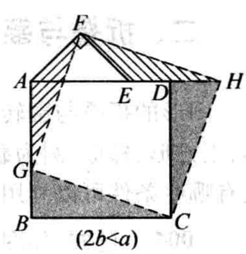

图 3-4

操作示例：

当 $2b<a$ 时，如图 3-4，在 BA 上选取点 G，使 $BG=b$，连结 FG 和 CG，裁掉$\triangle FAG$和$\triangle CGB$并分别拼接到$\triangle FEH$和$\triangle CHD$的位置构成四边形 $FGCH$．

思考发现：

小明在操作后发现：从剪拼方法易知 EH 与 AD 在同一直线上，且$\triangle FAG\cong\triangle FEH$，$\therefore AG=EH$．过点 F 作 $FM\perp AE$ 于点 M(图略)，则 $AM=ME=b$，$\therefore MD=a-b$．又 $EH=AG=a-b$，$\therefore MD=EH$，则 $DH=ME=BG$．故将$\triangle CGB$拼接到$\triangle CHD$的位置时，点 G 与点 H 重合．这样，对于剪拼得到的四边形 $FGCH$(如图 3-4)，利用 SAS 公理可判断$\triangle HFM\cong\triangle CHD$，易得 $FH=HC=GC=FG$，$\angle FHC=90°$．进而根据正方形的判定方法，可以判断出四边形 $FGCH$ 是正方形．

实践探究：

(1) 正方形 $FGCH$ 的面积是________；(用含 a，b 的式子表示)

(2) 类比图 3－4 的剪拼方法，请你就图 3－5 至图 3－7 的三种情形分别画出剪拼成一个新正方形的示意图.

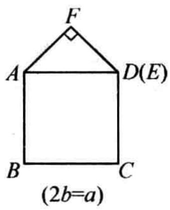

图 3－5

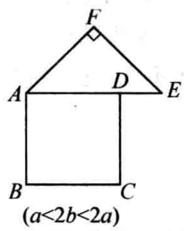

图 3－6

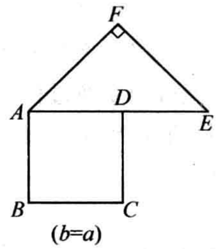

图 3－7

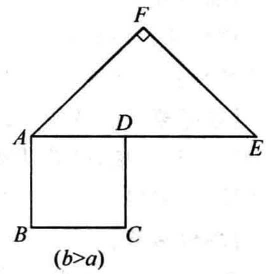

图 3－8

联想拓展：

小明通过探究后发现：当 $b \leqslant a$ 时，此类图形都能剪拼成正方形，且所选取的点 G 的位置在 BA 方向上随着 b 的增大不断上移. 当 $b > a$ 时，如图 3－8 的图形能否剪拼成一个正方形？若能，请你在图中画出剪拼的示意图；若不能，简要说明理由.

二、折叠与翻转

图形的折叠与翻转实际上就是全等变换，其实质就是轴对称. 折叠、翻转型试题通常以矩形、正方形、梯形、圆为载体. 其解题关键为：分清折叠前后哪些量变了、哪些量没有变，折叠后又有哪些条件可以利用.

004 已知：如图 4－1 所示的一张矩形纸片 $ABCD$($AD > AB$)，将纸片折叠一次，使点 A 与点 C 重合，再展开，折痕 EF 交 AD 边于点 E，交 BC 边于点 F，交 AC 于点 O，分别连结 AF 和 CE.

(1) 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形；

(2) 若 $AE = 10$ cm，$\triangle ABF$ 的面积为 24 cm^2，求 $\triangle ABF$ 的周长；

(3) 在线段 AC 上是否存在一点 P，使得 $2AE^2 = AC \cdot AP$？若存在，请说明点 P 的位置，并予以证明；若不存在，请说明理由.

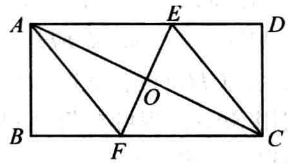

图 4－1

【命题意图】试题以大家熟悉的矩形为载体，以折叠变换为切入点，文字简洁，但考查的内容丰富，有勾股定理、特殊四边形的证明、三角形相似的判定及性质等.三个问题的设计由浅入深，既能较好地考查分析问题、解决问题的能力，又为大家提供了自主探索、充分施展才能的空间.

【答题要旨】问题(1)为基本题，解答此类问题通常先证四边形 $AFCE$ 是平行四边形，然后由平行四边形进一步得出菱形.问题(2)可将问题转化为求 $AB+BF$ 的和，于是巧用勾股定理及三角形的面积可得 $(AB+BF)^2=196$. 解答问题(3)时自然会想到三角形相似的判定及性质，通常情况下，$2AE^2=AC\cdot AP$ 应变为 $AE^2=\frac{1}{2}AC\cdot AP=AO\cdot AP$，于是过点 E 作 AD 的垂线，交 AC 于点 P，再由三角形相似的判定及性质可得出相应的结论.

【满分解答】

解 (1) 如图 4-1，由题意可知 $OA=OC$，$EF\perp AO$. $\because$ $AD\parallel BC$，$\therefore$ $\angle AEO=\angle CFO$，$\angle EAO=\angle FCO$，$\therefore$ $\triangle AOE\cong\triangle COF$. $\therefore$ $AE=CF$. 又 $AE\parallel CF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形. $\because$ $AC\perp EF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

(2) $\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，$\therefore$ $AF=AE=10\,\text{cm}$. 设 $AB=a\,\text{cm}$，$BF=b\,\text{cm}$，$\because$ $\triangle ABF$ 的面积为 $24\,\text{cm}^2$，$\therefore$ $a^2+b^2=100$，$ab=48$，即得 $(a+b)^2=196$，$a+b=14$ 或 $a+b=-14$(不合题意，舍去)，$\therefore$ $\triangle ABF$ 的周长为 $a+b+10=24(\text{cm})$.

(3) 存在，过点 E 作 AD 的垂线，交 AC 于点 P，点 P 就是符合条件的点.

$\because$ $\angle AEP=\angle AOE=90^\circ$，$\angle EAO=\angle EAP$，$\therefore$ $\triangle AOE\backsim\triangle AEP$. $\therefore$ $\frac{AE}{AP}=\frac{AO}{AE}$.

$\therefore$ $AE^2=AO\cdot AP$. $\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，$\therefore$ $AO=\frac{1}{2}AC$，$\therefore$ $AE^2=\frac{1}{2}AC\cdot AP$，即 $2AE^2=AC\cdot AP$.

【易错分析】问题(1)为常规题，思路直观，失分少；问题(2)答题并不繁，但解法巧妙，试题对数形结合、方程思想及转化思想要求较高，因而容易导致切入困难而失分；问题(3)貌似简单，但切入极其困难，其探究过程对分析能力的要求较高，因此得满分不易.

【变式训练】

004 已知：矩形 $ABCD$ 中，$AD>AB$，O 是对角线的交点，过 O 任作一直线分别交 BC、AD 于点 M、N(如图 4-2).

(1) 求证：$BM=DN$；

(2) 如图 4-3，四边形 $AMNE$ 是由四边形 $CMND$ 沿 MN 翻折得到的，连结 CN，求证：四边形 $AMCN$ 是菱形；

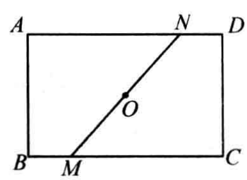

图 4-2

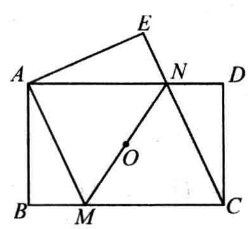

图 4-3

(3) 在(2)的条件下，若 $\triangle CDN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积比为 $1:3$，求$\dfrac{MN}{DN}$的值.

005 已知矩形纸片 $ABCD$，$AB=2$，$AD=1$，将纸片折叠，使顶点 A 与边 CD 上的点 E 重合.

(1) 如果折痕 FG 分别与 AD、AB 交于点 F、G(如图 5-1)，$AF=\dfrac{2}{3}$，求 DE 的长；

(2) 如果折痕 FG 分别与 CD、AB 交于点 F、G(如图 5-2)，$\triangle AED$ 的外接圆与直线 BC 相切，求折痕 FG 的长.

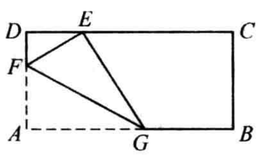

图 5-1

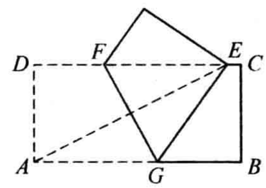

图 5-2

【命题意图】 试题以矩形为载体，借助折叠变换考查轴对称的性质、勾股定理、直线与圆相切的性质等知识以及运用数形结合、化归思想分析问题、解决问题的能力.

【答题要旨】 问题(1)为基本题，答题的关键是理解轴对称的性质；问题(2)为提高部分，解题的关键是利用中点构造中位线，利用勾股定理构造方程求出 DE. 因此，利用 $90°$ 的圆周角所对的弦是直径是问题(2)的突破口. 而当直线 BC 与圆相切时，圆心 O 到直线 BC 之距等于 $\triangle AED$ 的外接圆的半径长，利用这一特殊性质并运用勾股定理构造方程是解答本题的核心思想.

【满分解答】

解 (1) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，$AF=\dfrac{2}{3}$，$\angle D=90°$. 根据轴对称的性质，得 $EF=AF=\dfrac{2}{3}$，$\therefore DF=AD-AF=\dfrac{1}{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$DE=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 如图 5-3，设 AE 与 FG 的交点为 O，根据轴对称的性质，得 $AO=EO$，取 AD 的中点 M，连结 MO，则 $MO=\dfrac{1}{2}DE$，$MO\parallel DC$，设 $DE=x$，则 $MO=\dfrac{1}{2}x$，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle C=\angle D=90°$，$\therefore AE$为$\triangle AED$ 的外接圆的直径，O 为圆心.

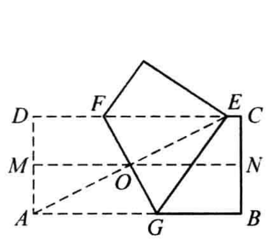

图 5-3

延长 MO 交 BC 于点 N，则 $MN \parallel CD$，$\therefore \angle CNM = 180° - \angle C = 90°$. $\therefore ON \perp BC$，四边形 $MNCD$ 是矩形.

$\therefore MN = CD = AB = 2$，$\therefore ON = MN - MO = 2 - \frac{1}{2}x$. $\because \triangle AED$ 的外接圆与 BC 相切，$\therefore ON$ 是 $\triangle AED$ 的外接圆的半径，$\therefore OE = ON = 2 - \frac{1}{2}x$，$AE = 2ON = 4 - x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，$AD^2 + DE^2 = AE^2$，$\therefore 1^2 + x^2 = (4 - x)^2$.

解这个方程，得 $x = \frac{15}{8}$，$\therefore DE = \frac{15}{8}$，$OE = 2 - \frac{1}{2}x = \frac{17}{16}$.

根据轴对称的性质，得 $AE \perp FG$，$\therefore \angle FOE = \angle D = 90°$.

又 $\because \angle FEO = \angle AED$，$\therefore \triangle FEO \backsim \triangle AED$，$\therefore \frac{FO}{AD} = \frac{OE}{DE}$，$\therefore FO = \frac{OE}{DE} \cdot AD$.

可得 $FO = \frac{17}{30}$，又 $\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle EFO = \angle AGO$，$\angle FEO = \angle GAO$，$\therefore \triangle FEO \cong \triangle GAO$，$\therefore FO = GO$，$\therefore FG = 2FO = \frac{17}{15}$，$\therefore$ 折痕 FG 的长是$\frac{17}{15}$.

【易错分析】①忽视轴对称的性质，不懂利用 $OA = OE$ 和线段 AD 的中点构造三角形的中位线；②当 $\triangle AED$ 的外接圆与直线 BC 相切时，ON 是 $\triangle AED$ 的外接圆的半径被忽视，并导致错失利用勾股定理构造方程的机会. 错误的根源是忽视知识形成过程.

【变式训练】

005 已知：如图 5-4，把矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使得顶点 A 与边 DC 上的动点 P 重合（P 不与点 D、C 重合），MN 为折痕，点 M、N 分别在边 BC、AD 上，连结 AP、MP、AM，AP 与 MN 相交于点 F. $\odot O$ 过点 M、C、P.

(1) 请你在图 5-5 中作出 $\odot O$（不写作法，保留作图痕迹）；

(2) $\frac{AF}{AN}$与$\frac{AP}{AD}$是否相等？请你说明理由；

(3) 如图 5-5，随着点 P 的运动，若 $\odot O$ 与 AM 相切于点 M 时，$\odot O$ 又与 AD 相切于点 H. 设 AB 为 4，请你通过计算求出此时 $\odot O$ 的直径 MP.

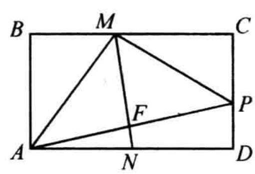

图 5-4

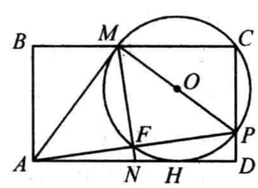

图 5-5

006 如图 6－1 所示，现有一张边长为 4 的正方形纸片 $ABCD$，点 P 为正方形 AD 边上的一点（不与点 A、点 D 重合）. 将正方形纸片折叠，使点 B 落在 P 处，点 C 落在 G 处，PG 交 DC 于 H，折痕为 EF，连结 BP、BH.

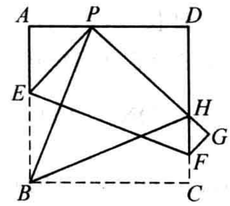

图 6－1

(1) 求证：$\angle APB = \angle BPH$；

(2) 当点 P 在边 AD 上移动时，$\triangle PDH$ 的周长是否发生变化？并证明你的结论；

(3) 设 AP 为 x，四边形 $EFGP$ 的面积为 S，求出 S 与 x 的函数关系式，试问 S 是否存在最小值？若存在，求出这个最小值；若不存在，请说明理由.

【命题意图】 试题以大家熟悉的正方形为背景，借助折叠变换探究轴对称的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、二次函数的最值等核心知识. 其中问题(1)、(2)为递进关系，重点考查知识的迁移能力，而问题(3)重点渗透方程思想、数学建模及函数思想.

【答题要旨】 折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的对应边和对应角相等是解答此题的关键. 问题(1)可利用折叠的性质及等角的余角相等证得 $\angle APB = \angle BPH$；问题(2)欲判定 $\triangle PDH$ 的周长为定值，可过 B 作 $BQ \perp PH$ 于 Q，再利用(1)中结果证得 $\triangle ABP \cong \triangle QBP$ 及 $\triangle BCH \cong \triangle BQH$，最后将 $\triangle PDH$ 的周长转化为 $AD + CD$ 的值得出结论；问题(3)可过 F 作 $FM \perp AB$ 于 M，再构造三角形全等得到 $CF = BE - x$，从而求出 S 与 x 的函数关系式.

【满分解答】

解 (1) 如图 6－2，由折叠的性质得 $\angle EPH = \angle EBC = 90°$，$PE = BE$，$\therefore \angle EBP = \angle EPB$，$\therefore \angle EPH - \angle EPB = \angle EBC - \angle EBP$，即 $\angle BPH = \angle PBC$. 又 $\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle APB = \angle PBC$，$\therefore \angle APB = \angle BPH$.

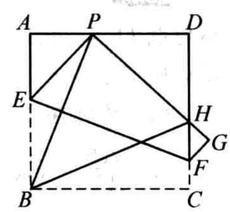

图 6－2

(2) $\triangle PHD$ 的周长不变，为定值 8. 证明如下：

如图 6－3，过 B 作 $BQ \perp PH$，垂足为 Q.

由(1)知 $\angle APB = \angle BPH$，又 $\because \angle A = \angle BQP = 90°$，$BP = BP$，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle QBP$(AAS)，$\therefore AP = QP$，$AB = BQ$.

又 $\because AB = BC$，$\therefore BC = BQ$.

又 $\because \angle C = \angle BQH = 90°$，$BH = BH$，

$\therefore \triangle BCH \cong \triangle BQH$(HL)，$\therefore CH = QH$.

$\therefore \triangle PHD$ 的周长为：

$PD + DH + PH = AP + PD + DH + HC = AD + CD = 8$.

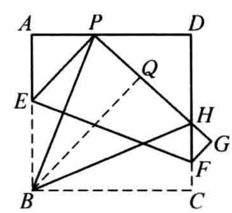

图 6－3

(3) 如图 6－4，过 F 作 $FM \perp AB$，垂足为 M，则 $FM = BC = AB$.

又 $\because EF$ 为折痕，$\therefore EF \perp BP$.

$\therefore \angle EFM + \angle MEF = \angle ABP + \angle BEF = 90°$，$\therefore \angle EFM = \angle ABP$.

又 $\because \angle A = \angle EMF = 90°$，$FM = AB$，$\therefore \triangle EFM \cong \triangle PBA$(ASA)，

$\therefore EM = AP = x$.

在 Rt$\triangle APE$ 中，由勾股定理得：$AE^2 + AP^2 = EP^2$，

即 $(4 - BE)^2 + x^2 = BE^2$，

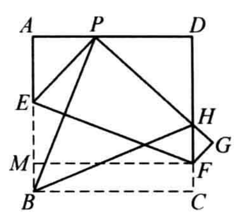

图 6－4