医学物理学及电子技术

基础实验

戴鹏 肖俊 ◆主编

YIXUE WULIXUE
JI DIANZI JISHU
JICHU SHIYAN

四川大学出版社
SICHUAN UNIVERSITY PRESS

医学物理学及电子技术

基础实验

戴鹏 肖俊◆主编

四川大学出版社
SICHUAN UNIVERSITY PRESS

特约编辑：梁　平
责任编辑：楼　晓
责任校对：武慧智
封面设计：李金兰
责任印制：王　炜

图书在版编目(CIP)数据

医学物理学及电子技术基础实验 / 戴鹏，肖俊主编.
—成都：四川大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5614-6938-5

Ⅰ.①医…　Ⅱ.①戴…　②肖…　Ⅲ.①医用物理学
-实验-医学院校-教材②医用电子学-实验-医学
院校-教材　Ⅳ.①R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 154306 号

书名　**医学物理学及电子技术基础实验**

主　　编	戴　鹏　肖　俊
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
书　　号	ISBN 978-7-5614-6938-5
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	10.75
字　　数	272 字
版　　次	2013 年 8 月第 1 版
印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	28.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
电话：(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请
寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

前　　言

医学物理学和电子技术基础是高等医学院校学生的基础课，物理学实验及电子技术基础实验是医学物理学和电子技术基础课的重要组成部分，是理论课无法替代的，它可使学生在如何运用理论知识、实验方法和实验技能来解决科学技术问题方面得到必要的基本训练。

本书编入 17 个物理学实验和 12 个电子技术基础实验，可供高等医学院校临床、预防、医检、口腔、法医、妇儿、影像、生物技术和生物医学工程等专业使用。

此次编写，得到了贵阳医学院物理教研室前辈们的悉心指导，并参考了其他院校许多同行编写的书籍和材料，在此表示衷心的感谢。虽然各位编者花了大量的时间和精力，内容也经过充分的讨论，但仍不可避免地存在这样那样的缺点，殷切希望同行、专家以及使用本教材的师生们提出宝贵的意见，以使本教材更适合各专业的教学实际，在医学教育中发挥其应有的作用。

编者

2013 年 6 月于贵阳医学院

目　　录

绪　　论

一、物理实验的地位和任务

物理学从本质上说是一门实验科学，物理规律的发现和理论的建立，都必须以严格的实验为基础，并受到实验的检验。例如：物质波的假设，通过电子束的衍射得到证实；麦克斯韦的电磁场理论，经赫兹的电磁波实验得到了普遍承认。近代物理学的重大发现和发展，无一不是在复杂、精密、庞大的实验基础上取得的。因此，物理学的发展是在实验和理论两方面互相推动和密切结合下实现的。

物理学是医学、药学各专业的基础学科之一。物理学的理论、方法和技术对医药学科的发展起过重大作用。现代物理学的理论、方法和先进技术正在为医学、药学的进一步发展和提高提供更加强有力的支持。

物理实验是物理课程的重要组成部分，在学习物理时，要正确地处理理论课和实验课的关系，二者不可偏废。

医学院校的物理实验，是学生进入大学后学习实验技术、接受系统的实验技能训练的开端，是实践能力培养的重要手段，也是后继课程实验的基础。因此，物理实验课教学的任务是：

1. 培养并逐步提高学生观察和分析实验现象的能力以及理论联系实际的独立工作能力，通过对实验现象的观察、测量和分析，加深对物理学的概念、规律和理论的理解。

2. 在物理实验的基本知识、实验方法和实验技能等方面对学生进行基本的培养和训练。例如：掌握基本的误差理论、有效数字及其运算；掌握一些基本物理量的测量原理和方法；熟悉常用仪器的基本原理、性能和使用方法；正确记录、处理实验数据；分析判断实验结果，写出比较完整的实验报告。

3. 培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和爱护国家财产、遵守纪律的良好品德。

以上三项任务，是物理学理论课不能代替的，因此，除努力学好理论知识外，还必须认真学好物理实验课。

二、物理实验课的基本程序

（一）实验前做好预习

为了在有限的时间内，顺利地、高质量地完成实验，学生应当做好实验前的预习。预习时，要完成预习报告，明确本次实验的目的，了解该实验依据的原理和应注意的事项，根据实验要求设计好数据记录表格，供实验时记录数据。指导教师要在课前收齐学生预习

报告，并对学生的预习情况进行课堂提问检查。

（二）进行实验

实验操作前，应先熟悉仪器，了解仪器的工作原理和使用方法，然后按实验要求将仪器安装调整好。经指导教师检查后，方可进行实验。

实验过程中，必须认真操作，测量数据时要特别仔细，以保证读数准确。因为实验数据的优劣，往往决定实验的成败，每次测量后，要将数据及时准确地记录在数据表格上，或有规律地排列记录在记录纸上，并注意实验数据的有效数字位数。若实验结果与温度、湿度或气压有关时，还要记下实验时的温度、空气湿度或大气压强。实验中获得的这份“原始记录”是作实验报告的依据，要求用钢笔或水性笔记录数据，原始数据不得改动，更不能伪造，要养成实事求是的科学作风。最后，实验数据还应交指导教师审查、签字认可。原始记录要贴到实验报告的后面作为附件，没有原始记录的实验报告不能得分。

实验进行中，若发现仪器出现故障或其他异常情况，应立即停止实验（若是电学实验，要立即切断电源），并报告指导教师。实验完毕，整理还原实验仪器，在实验登记表上签名，并请指导教师检查后，方可离开实验室。每次实验完毕，由实验组长安排，留2～3人打扫实验室清洁。

（三）完成实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整、真实地反映出来。撰写报告，要求文字通顺、字迹工整、图表规范、结果正确、分析讨论认真。实验报告的内容主要包括：

（1）实验名称；

（2）实验目的；

（3）主要仪器；

（4）原理简述（依据的原理及相关计算公式）；

（5）实验记录与数据处理（包括以原始记录为依据的正规实验数据记录、实验中观察到的现象、计算结果或作图、误差的计算、用文字表述的实验结论等）；

（6）误差分析与讨论。

写实验报告要求用统一印制的实验、实习报告纸或实验报告册，每人完成一份，并按规定时间交指导教师评阅。

第一部分　物理实验基本知识

一、测量和误差

（一）测量

物理实验离不开对物理量的测量。测量是以确定待测对象的量值为目的的一系列操作。为了进行测量，必须规定一些物理量的标准单位，如质量单位千克、长度单位米、时间单位秒、电流强度单位安培等。一般情况下，测量过程就是将待测量与被选作标准单位的同类物理量进行比较从而确定待测量是标准单位的倍数的过程。通过测量，才能对客观事物获得数量的把握，经过分析和归纳，总结出一般规律。

测量的种类很多，根据获得测量结果的方法不同分为直接测量和间接测量。在测量中，待测量的值可以从仪器或仪表上直接读出的这类测量，称为直接测量，相应的物理量为直接测得量。例如米尺测长度，天平称质量，秒表测时间，等等。间接测量则是指需要将一个或几个直接测得量，通过特定的函数关系计算出被测量量值的测量，相应的物理量称为间接测得量。例如：测量钢球的密度时，可先用游标卡尺测出球的直径 d，再用天平称出球的质量 m，借助公式 $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}d\right)^3}=\frac{6m}{\pi d^3}$，从而得出钢球的密度。

根据待测量的实际情况，又可把测量分为单次测量和多次测量。有的待测量一次测量即可获得较好的测量结果，或具体情况不易或不能进行多次测量，测量只进行一次，称为单次测量。有的待测量一次测量不能获得较好的测量结果，需要进行几次、几十次或更多次，称为多次测量。多次测量通常用相同的仪器在相同条件下进行，称为“等精度测量”，以便对测量数据进行科学的分析从而得到较好的测量结果。

（二）误差

1. 误差的定义、误差公理。

待测物理量在一定条件下客观存在的真实数值称为真值。量的真值是一个理想的概念，它是客观存在的，但一般说来，任何测量都不可能测得真值。为了使用上的需要，有些情况下，可以把高一级标准器测得的结果作为用低一级标准器测量所得测量值的相对真值。此外，还有计量学约定真值，如国际计量大会决议的七个基本物理量值。在测量某一物理常数时，该常数的标准值（公认值）或理论值常作为理论真值。

测量的目的就是要力图得到真值，但在测量过程中，由于任何实验仪器、测量方法都不可能绝对严密，或受测量人员观察能力的局限性、环境的不稳定性或测量理论的近似性等因素的影响，测量值总是真值的近似值。测量值与真值之间的差异称为误差，即：误差

=测量值－真值。若用 X 表示测量值，X_0表示真值，ΔX 表示误差，则为：

$$\Delta X = X - X_0 \tag{1}$$

实践证明，不论实验者操作多么细心，使用的仪器多么精密，实验条件多么完善，测量结果都必然包含着误差。这一事实已为从事科学实验的人们所公认，并总结为误差公理：实验结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验过程中。

2. 误差的分类。

误差的产生有多方面的原因。根据误差的性质及产生的原因，可将误差分为系统误差、随机误差和过失误差三类。

（1）系统误差。在同一条件下，多次测量同一量值时，误差的绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差，称为系统误差，也叫恒定误差。它的特征是其具有确定性。系统误差的产生有多种原因。

①设备误差：用来进行直接测量或间接测量的仪器、仪表本身具有误差（天平不等臂、仪表刻度不准等等）；作为标准器具的标准砝码、标准电池、标准电阻等本身含有误差；测量附件引入的误差，如电测量中的转换开关、电源连接导线等。

仪器误差是仪器设计和制作时引入的误差，一般由制造厂商或计量部门给出，通常在仪器的铭牌上标明或在说明书上写明。读数误差是由观测者读数引入的误差。读数误差与仪器的刻度和观测者的分辨能力都有关，例如图 1 所示的毫安表，分度值是 1 mA，若观测者能分辨分度值的 1/10，则读数误差是 0.1 mA。实际上在仪器设计时，分度和表盘的设计总是与仪器误差相适应的。仪器精度越高，刻度越细越密；有的还采用在刻度盘上加镜子的办法防止观察的偏差，有的采用光学放大或机械放大办法来提高读数的分辨率。因此只要正确地仔细读数，一般可以忽略读数误差而只用仪器误差作为测量结果的误差（原则上，仪器误差和读数误差是相互独立的，测量结果的误差应为两者之和）。由此可见，学会正确使用仪器，注重实验能力的提高是很重要的。

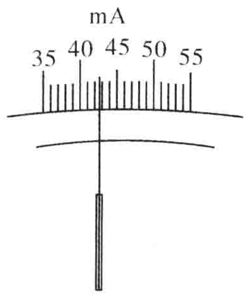

图 1　仪器读数示意图

研究和确定某种仪器的仪器误差是专业性很强的工作，在基础物理实验中通常把仪器的示值误差限或基本误差限取作仪器误差。例如最小分度为 0.02 mm 的游标卡尺，其示值误差为 0.02 mm；最小分度为 0.01 mm 的螺旋测微计，其示值误差为 0.004 mm；量程为 5 V 的 0.5 级电压表，其基本误差限为 5 V×0.5%=0.025 V。

下面列出一些常用仪器的仪器误差（后面的实验中要用到）。

米尺：最小分度 1 mm，仪器误差取 0.5 mm（最小分度之半）。

游标卡尺：取游标最小分度值（或称游标卡尺精度）。

螺旋测微计：一般取 0.004 mm。

电子秒表：显示到 0.01 s，取 0.01 s。

温度计：取分度值。

比重计：取分度值。

②方法误差：实验所依据的理论和方法的近似性所引起的误差，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求引起的误差等。

③人员误差：测量者生理上的最小分辨力的限制、感觉器官的生理变化、反应速度和

固有习惯等引起的读数误差。如用秒表计时，有人常失之过长，有人常失之过短。

系统误差表现出恒偏大、恒偏小或周期性的特点。增加测量次数不能减少系统误差，只能从方法、理论、仪器等方面的改进与修正来实现。具体的消除方法，这里不作详细讨论，可参考有关实验误差的专著。

（2）随机误差。在同样的条件下，多次测量同一量时，误差的绝对值和符号的变化时大时小、时正时负，没有确定的规律，这种随机变化的误差，称为随机误差或偶然误差。

随机误差的来源是人员、环境等不可预测的偶然因素。随机误差的特征是其随机性，即每次测量值比真值偏大或偏小是完全不确定的。但是，它服从一定的统计规律，在相同条件下，对于同一待测量的测量次数足够多时，正负误差出现的概率是相等的；而且误差较小的测量值比误差较大的测量值出现的概率大，绝对值很大的误差出现的概率趋于零；当测量次数趋于无限多时，随机误差的代数和趋向于零。因此，增加测量次数，可以减小随机误差。

（3）过失误差。明显歪曲测量结果的误差称为过失误差，也叫粗差。如测错、读错、记错；实验状况未达到预想的要求而匆忙实验；粗心大意，违反操作规程等都会带来过失误差。含有过失误差的测量值称为坏值或异常值，应当从测量结果中剔除。所以，进行误差分析时，要估计的误差只有系统误差与随机误差两类。

3. 测量的精度。

反映测量结果与真值接近程度的量称为精度，精度高的实验，其误差小。精度又可细分为：精密度，反映随机误差的大小和分布情况；准确度，反映系统误差大小的程度；精确度，反映系统误差与随机误差合成大小的程度。因此，精确度又简称精度。精度在数量上可用相对误差表示，如相对误差为 0.01%，可笼统地说其精度为10^{-4}；若纯属随机误差引起，则说其精密度为10^{-4}；若是由系统误差与随机误差共同引起的，则说其精确度为10^{-4}。

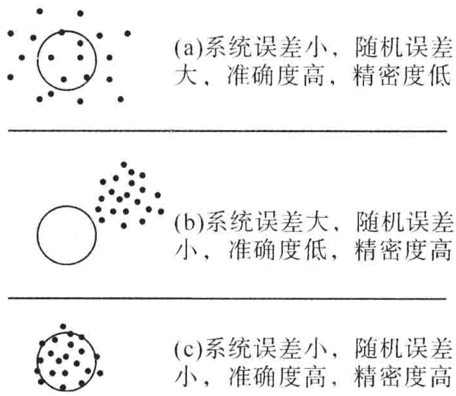

图 2　准确度、精密度与精确度示意图

对于具体的测量，精密度高的其准确度不一定高，准确度高的其精密度也不一定高，但精确度高，则精密度和准确度均高，即系统误差和随机误差都小，如图 2 所示。

（三）直接测量结果及其随机误差的估计

根据误差公理，真值无法精确得到，因此误差不仅不能完全避免也不能完全确定，误差只能通过一定的方法加以估计。在下面的讨论中，我们假定系统误差和过失误差已经消除或修正，只剩下随机误差。

1. 多次直接测量的算术平均值及误差。

由于随机误差具有抵偿性，即多次测量的平均值的随机误差比单次测量值的随机误差小，这种性质称为抵偿性。所以，为了减小随机误差，在可能的情况下，总是采用多次测量，以其算术平均值作为测量的结果。如果在相同条件下，对某物理量 X 进行了 n 次等

精度重复测量，其测得值分别为：X_1，X_2，X_3，…，X_n，用 $\overline{X}$ 表示平均值，则：

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2}$$

根据误差的统计理论，算术平均值 $\overline{X}$ 最接近于真值，称为测量的最佳值或近真值，当测量次数无限增加时，算术平均值将无限接近于真值。

根据式（1）误差的定义，由于真值不能确定，所以误差也只能估计，随机误差的估计方法有多种，下面介绍常用的算术平均偏差。

设各测量值 X_i 与算术平均值 $\overline{X}$ 的偏差为 ΔX_i，$i=1, 2, 3, \cdots, n$，则各次测量的偏差分别为：

$$\Delta X_1 = X_1 - \overline{X}，\Delta X_2 = X_2 - \overline{X}，\cdots，\Delta X_n = X_n - \overline{X}$$

将上述各次测量的偏差分别取绝对值求它们的平均值：

$$\Delta X = \frac{1}{n}(|\Delta X_1| + |\Delta X_2| + \cdots + |\Delta X_n|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta X_i| \tag{3}$$

式中，ΔX 叫做算术平均偏差。

应当注意的是，误差和偏差是有区别的。误差是测量值与真值之差，偏差是测量值与平均值之差。当测量次数很多时，算术平均值 $\overline{X}$ 最接近于真值，各次测量值与 $\overline{X}$ 的偏差也就很接近于它们与真值的误差。因此，使用中，常可不必区分偏差与误差的细微差别，而将算术平均偏差称为算术平均误差。这样，测量结果就可以表示为：

$$X = \overline{X} \pm \Delta X \tag{4}$$

其中 X 是测量值，$\overline{X}$ 是多次测量的算术平均值，也就是最佳测定值或近真值，ΔX 为算术平均误差（也称为平均绝对误差），“±”号表示每次测量值可能比 $\overline{X}$ 大一些，也可能比 $\overline{X}$ 小一些。测量结果的这种表达式的含义是：被测量的真值一般不会落在区间（$X-\Delta X$，$X+\Delta X$）之外，即可以有相当把握地说，真值是在 $X-\Delta X$ 和 $X+\Delta X$ 之间，但不排除多次测量中会有少部分测量值落在区间（$X-\Delta X$，$X+\Delta X$）以外的可能性。例如，对某一物体长度进行多次测量后，经计算，测量结果表示为：$L_1=\overline{L}_1 \pm \Delta L_1 = 15.50 \pm 0.04(\text{cm})$，其中近真值 15.50、平均绝对误差 0.04、单位（cm）三者缺一不可。

上式中的 ΔX 是以误差的绝对值来表示测定值的误差，称为平均绝对误差。但为了评价一个测量结果的优劣，还要看待测量本身的大小。为此，引入相对误差的概念，即绝对误差与算术平均值之比。表示为：

$$E = \frac{\Delta X}{\overline{X}} \tag{5}$$

或用百分数表示为：

$$E = \frac{\Delta X}{\overline{X}} \times 100\% \tag{6}$$

故又称为百分误差。

例 1 实验测得两个物体的长度分别为 $L_1=\overline{L}_1 \pm \Delta L_1 = 15.50 \pm 0.04$（cm），$L_2 = \overline{L}_2 \pm \Delta L_2 = 1.55 \pm 0.04$（cm），求其相对误差。

解：$E_1 = \frac{0.04}{15.50} \times 100\% = 0.26\% \approx 0.3\%$

$$E_2=\frac{0.04}{1.55}\times 100\%=2.6\%\approx 3\%$$

计算结果表明，两者的绝对误差虽然一样，但相对误差不同，后者是前者的 10 倍。显然，前者的测量要准确得多。因此，一个好的测量结果，要求相对误差要小。

引入相对误差后，测量结果也可以表示为：

$$X=\overline{X}(1\pm E) \tag{7}$$

此外，也常用均方根误差（又叫标准误差）来估计测量值的随机误差，这里不作介绍。对于初学者来说，主要是树立误差的概念和对实验结果进行粗略的、简明的分析，为此，本书采用算术平均误差进行误差分析和计算。

2. 单次直接测量的误差处理。

在实验中，由于条件不许可，或一次测量即可获得较好的测量结果，对某物理量的测量只进行了一次。这时，可根据实际情况，对测定值的误差作合理的估计。一般情况下，将一次测得量作为近真值，将仪器误差作为绝对误差，仍用式（4）表示测量结果。

（四）间接测得量误差的估计

间接测得量是借助某一定律或公式计算出来的，而公式中的直接测得量都含有误差，因此，间接测得量也必然有误差，称为误差传播。由直接测得量的误差通过误差传播公式即可求出间接测得量的误差。

设 N 为间接测得量，而 A，B，C，…为直接测得量，它们之间的函数关系为：

$$N=f(A,B,C\cdots)$$

若各直接测得量可表示为：

$$A=\overline{A}\pm\Delta A,\ B=\overline{B}\pm\Delta B,\ C=\overline{C}\pm\Delta C,\ \cdots$$

将这些直接测得量的结果代入计算公式，便可得到间接测得量的结果：

$$N=\overline{N}\pm\Delta N \tag{8}$$

$$E=\frac{\Delta N}{\overline{N}} \tag{9}$$

其中：$\overline{N}=f(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\cdots)$ 是间接测得量的算术平均值，ΔN 是间接测得量的算术平均误差。

下面通过几个简单的函数关系式，讨论间接测得量误差的计算。

1. 间接测得量是两个直接测得量的和或差。

设 $$N=A\pm B$$

因为 $$A=\overline{A}\pm\Delta A,\ B=\overline{B}\pm\Delta B$$

所以
$$\begin{aligned}N&=(\overline{A}\pm\Delta A)\pm(\overline{B}\pm\Delta B)\\&=(\overline{A}\pm\overline{B})\pm(\pm\Delta A\pm\Delta B)\end{aligned}$$

显然，$\overline{N}=\overline{A}\pm\overline{B}$，考虑到在最不利的情况下可能出现的最大误差，我们取 $\Delta N=\Delta A+\Delta B$ 作为间接测得量的算术平均误差。由此得到，两量之和或差的绝对误差等于两直接测得量的绝对误差之和。这一结论可以推广到有多个直接测得量的情况。

2. 间接测得量是两个直接测得量的积。

设 $$N=A\cdot B$$

则 $$N=(\overline{A}\pm\Delta A)\cdot(\overline{B}\pm\Delta B)$$

$$=\bar{A}\cdot\bar{B}\pm[\bar{A}(\pm\Delta B)+\bar{B}(\pm\Delta A)]+(\pm\Delta A)(\pm\Delta B)$$

显然
$$\bar{N}=\bar{A}\cdot\bar{B}$$
$$\Delta N=[\bar{A}(\pm\Delta B)+\bar{B}(\pm\Delta A)]+(\pm\Delta A)(\pm\Delta B)$$

由于（$\Delta A\cdot\Delta B$）为二级小量，可以忽略不计，考虑可能出现的最大误差，我们取 $\Delta N=\bar{A}\cdot\Delta B+\bar{B}\cdot\Delta A$。于是

$$N=\bar{A}\cdot\bar{B}\pm(\bar{A}\cdot\Delta B+\bar{B}\cdot\Delta A)$$

N 的相对误差
$$E=\frac{\Delta N}{\bar{N}}=\frac{\bar{A}\cdot\Delta B+\bar{B}\cdot\Delta A}{\bar{A}\cdot\bar{B}}=\frac{\Delta A}{\bar{A}}+\frac{\Delta B}{\bar{B}}$$

3. 间接测得量是两直接测得量的商。

设
$$N=\frac{A}{B}$$

则
$$N=\frac{\bar{A}\pm\Delta A}{\bar{B}\pm\Delta B}=\frac{(\bar{A}\pm\Delta A)(\bar{B}\mp\Delta B)}{(\bar{B}\pm\Delta B)(\bar{B}\mp\Delta B)}$$
$$=\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}\pm\bar{B}\cdot\Delta A\mp\bar{A}\cdot\Delta B}{\bar{B}^2-\Delta B^2}\quad\text{（分子已忽略了二级小量）}$$
$$=\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}\pm\bar{B}\cdot\Delta A\mp\bar{A}\cdot\Delta B}{\bar{B}^2}\quad\text{（分母忽略了二级小量）}$$

显然
$$\bar{N}=\frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{\bar{B}^2}=\frac{\bar{A}}{\bar{B}},\quad\Delta N=\frac{\pm\bar{B}\cdot\Delta A\mp\bar{A}\cdot\Delta B}{\bar{B}^2}$$

考虑到可能出现的最大误差，取 $\Delta N=\dfrac{\bar{B}\cdot\Delta A+\bar{A}\cdot\Delta B}{\bar{B}^2}$，则相对误差为：

$$E=\frac{\Delta N}{\bar{N}}=\frac{(\bar{B}\cdot\Delta A+\bar{A}\cdot\Delta B)}{\bar{B}^2}\cdot\frac{\bar{B}}{\bar{A}}=\frac{\Delta A}{\bar{A}}+\frac{\Delta B}{\bar{B}}$$

由上述分析可知：间接测得量是两个直接测得量的积或商的情况下，间接测得量的平均值是两个直接测得量平均值的积或商；间接测得量的相对误差，等于各直接测得量的相对误差之和。这一结论可以推广到间接测得量是多个直接测得量的积或商的情况。

从以上的讨论结果还可看出，若间接测得量的计算公式中只含加、减运算时，先计算绝对误差，后计算相对误差比较方便；若计算公式中含有乘、除、乘方或开方运算时，先算相对误差，后算绝对误差比较方便。

4. 误差传播公式的一般形式。

设间接测得量 y 是直接测量量 x_1，x_2，…的函数，$y=f(x_1, x_2, \cdots)$。按微分学知识，当自变量有增量 Δx_1 和 Δx_2 时，函数 y 相应的增量为：

$$\Delta y\approx\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+\cdots$$

由于 Δx_1 和 Δx_2 为有限增量，公式只是近似成立。考虑到误差宁大勿小原则（以保证测量结果的可靠性），将各误差项取绝对值再相加；且因误差本来就是一个估计值，故用等号代替上式中的近似号得：

$$\Delta y=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right|+\cdots\tag{10}$$

若先对 y 取自然对数，再求全微分，则：

$$\frac{\Delta y}{y}=\left|\frac{\partial\ln f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1\right|+\left|\frac{\partial\ln f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2\right|+\cdots\tag{11}$$

式（10）、（11）是间接测得量绝对误差和相对误差的一般公式。表 1 是用它们导出的一些常用函数的误差传播公式。

表 1　常用函数的误差传播公式

函数关系 $y=f(x_1, x_2, \cdots)$	绝对误差 Δy	相对误差 $\frac{\Delta y}{y}$
$y=kx$	$k\Delta x$	$\frac{\Delta x}{\bar{x}}$
$y=x_1+x_2$	$\Delta x_1+\Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\bar{x}_1+\bar{x}_2}$
$y=x_1-x_2$	$\Delta x_1+\Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$
$y=x_1 \cdot x_2$	$\bar{x}_1 \cdot \Delta x_2+\bar{x}_2 \cdot \Delta x_1$	$\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}+\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}$
$y=\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{\bar{x}_1 \cdot \Delta x_2+\bar{x}_2 \cdot \Delta x_1}{\bar{x}_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1}+\frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2}$
$y=x^n$	$n \cdot \bar{x}^{n-1} \cdot \Delta x$	$n \cdot \frac{\Delta x}{\bar{x}}$
$y=\sin x$	$\Delta x \cdot \cos\bar{x}$	$\Delta x \cdot \cot\bar{x}$
$y=\cos x$	$\Delta x \cdot \sin\bar{x}$	$\Delta x \cdot \tan\bar{x}$

二、有效数字及其运算

（一）有效数字

用仪器对某一物理量进行直接测量时，由于仪器精度的限制和读数无法完全准确等原因，所得数据只能是一近似值，例如，用一个量程为 100 mA、最小分度为 1 mA 的电流表测量电流，如图 1 所示，所得到的测量值最多只可能有 3 位数字。假定测得的电流为 42.6 mA，其中前两位数“42”是直接从电流表上准确读出的，末位数字“6”是估读出来的，估读的结果因人而异。因此，末位数字“6”是有疑问的，称为可疑数字。“6”虽然可疑，即有误差，但它在一定程度上仍然反映了客观实际，因此，它是有效的。末位数字“6”已经可疑，其以后的各位数的估计既无必要，也不可能。这样，我们把仪器上读出的几位可靠数字连同其后的一位可疑数字称为测量结果的有效数字。按此规定，若电流表的指针恰好指示在 42 mA 的刻线上，这时的电流读数记为 42.0 mA，末位的“0”仍然是有效数字，表示这一位是可疑的，是有误差的。将电流读数记为 42 mA 则是错误的，因为这个记录数字表明 2 是可疑数字，说明电流表最小分度不是 1 mA 而是 10 mA，这显然与事实不符。所以，一个物理量测量值与数学上的一个数有着不同的意义。数学上一个单纯意义的数 42.0=42.00=42.000=42；但一个物理量的测量值，例如用电流表测得的电流毫安数 42.0≠42.00≠42.000≠42，因为它们表示测量中产生误差的那一位是不同的，因此所用的仪器的精度是不同的。

从可疑数字起，向左数到最后一个不是零的数字的位数，叫做有效数字的位数。例

如："65.4"是三位有效数字，"0.426""0.0426"也是三位有效数字。关于有效数字还有如下两点应当注意：

1. 有效数字的位数与十进制单位的变换无关，即与小数点的位置无关，用以表示小数点位置的"0"不是有效数字。例如，42.6 mA 写成 4.26×10^4 μA 或 0.0426 A，这三种表示法完全等效，均为三位有效数字。又如，1.2 m 的单位 m 换用 cm 或 mm 表示时，可写成 1.2×10^2 cm 或 1.2×10^3 mm，均为两位有效数字。

2. 当"0"不是用作表示小数点位置时，0 是有效数字。例如，1.035 cm 的有效数字为 4 位，1.000 cm 的有效数字也是 4 位。显然，数据最后的"0"既不能任意加上，也不能随便去掉。

（二）有效数字的运算规则

1. 有效数字的加、减运算。

通过图 3 所示的两个例子的运算，掌握加、减运算中结果的有效数字的取法。计算时，在可疑数字的下面加一横线，以示与可靠数字相区别。在相加的结果 28.365 中，由于第三位数"3"已为可疑数字，在其后的两位数字便无意义，按照数值修约的国家标准对其进行处理。尾数小于 5 则舍；大于 5 则入；等于 5 看下一位数，若为非零值则入，若为零则将尾数凑成偶数。因此，相加的结果应写成 28.4，有效数字为三位。相减的结果应为 32.14（末位凑成偶数）。运算结果表明，几个数相加或相减时，其结果的有效数字只保留最高一位可疑数字。

$$\begin{array}{r} 25.\underline{2} \\ +\quad 3.16\underline{5} \\ \hline 28.\underline{365} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 36.8\underline{7} \\ -\quad 4.73\underline{5} \\ \hline 32.1\underline{35} \end{array}$$

图 3　有效数字的加减运算

在加、减运算中，也可先以参与运算的各量中具有最大误差的数为准，将其余各数修约成与该数误差的数位一致，然后相加或相减，所得结果仍然相同。

2. 有效数字的乘、除运算。

由图 4 中所示的两个例子，可得出有效数字乘除运算的规则：运算的结果中，可疑数字只应保留最高的一位，其余无保留意义。因此，图 4 中的结果应分别为 7.6 和 3.37。由计算结果可知，积或商的有效数字位数与参与运算诸数中有效数字位数最少的一致。

$$\begin{array}{r} 3.32\underline{5} \\ \times\qquad 2.\underline{3} \\ \hline \underline{9975} \\ 665\underline{0} \\ \hline 7.\underline{6475} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & 3.366\cdots\cdots \\ 13.\underline{6} & \overline{)\,45.78} \\ & 40\underline{8} \\ \hline & 498 \\ & 40\underline{8} \\ \hline & \underline{900} \\ & \underline{816} \\ \hline & \underline{840} \end{array}$$

余数均为可疑数字时，商为可疑数字

图 4　有效数字的乘除运算

3. 乘方、开方的有效数字。

不难证明，乘方、开方的有效数字与其底数的有效数字位数相同。

4. 三角函数的有效数字位数与其角度的有效位数相同。

5. 对数的有效数字位数与其真数的有效位数相同。

6. 混合运算中，结果的有效数字位数可比运算规定的多保留一位。

7. 常数 π、e、$\sqrt{2}$ 等有效位数，比参与运算的各量中有效位数最少的多取一位参与运算。

（三）确定测量结果的有效数字的原则

前文讲到测量结果的表达式为：

$$X=\overline{X}\pm\Delta X$$

或

$$X=\overline{X}(1\pm E)$$

由于误差本身只是一个估计的范围，因此，在一般情况下，误差 ΔX 的有效数字只取一位，相对误差一般也只取一位，但将它作为中间运算值时（例如由相对误差和平均值计算绝对误差时）通常保留两位有效数字。为了保证数据的可靠性，宁可把误差估计得大一点，在进行舍入时“只入不舍”。从有效数字的定义可知，有效数字的最后一位是有误差的。因此，确定测量结果的有效数字位数的原则是：最后一位有效数字要与绝对误差所在的那一位取齐。如：$L=5.00\pm0.02$（cm）是正确的，而 $L=5.0\pm0.02$（cm）或 $L=5.000\pm0.02$（cm）都是错误的。

在单次测量中，用仪器误差作为 ΔX；在多次测量中，如果平均绝对误差小于仪器误差，ΔX 也要用仪器误差。总之，要注意误差决定测量结果的有效数字和误差宁大勿小两条原则。

例 2　用游标表尺测量一圆柱体，测试结果如表 2 所示（表中黑体字），试写出体积的测量结果。

表 2　圆柱体测试结果

仪器：游标卡尺		仪器编号：003			游标最小分度：0.02mm 零点读数：0.00mm	
项目	高度 h（mm）			直径 d（mm）		
次数	尺示数	测得值	各次误差	尺示数	测得值	各次误差
1	**5.08**	5.08	−0.01	**1.02**	1.02	0.00
2	**5.10**	5.10	+0.01	**1.02**	1.02	0.00
3	**5.04**	5.04	−0.05	**1.04**	1.04	+0.02
4	**5.14**	5.14	+0.05	**0.98**	0.98	−0.04
5	**5.10**	5.10	−0.01	**1.02**	1.02	0.00
6	**5.06**	5.06	−0.03	**1.02**	1.02	0.00
平均值		5.09	$\Delta h=0.03$		1.02	$\Delta d=0.01$
结果	$h=\bar{h}\pm\Delta h=5.09\pm0.03$（mm）			$d=\bar{d}\pm\Delta d=1.02\pm0.02$（mm）		

各次测得值与平均值之差为各次测量的误差，保留正负号以便看出每次测量值是偏大还是偏小

取以上 6 项的绝对值求平均，只入不舍到误差位

0.01 小于仪器误差 0.02，此处要用仪器误差

说明：测得值＝尺示数－零点读数