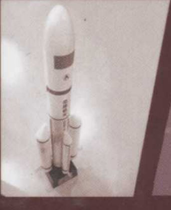
# 多级火箭结构参数的优化理论

DUOJI HUOJIAN JIEGOU CANSHU DE YOUHUA LILUN



竺苗龙 竺雪君 竺致文 著

中国宇航出版社

# 多级火箭结构参数的优化理论

竺苗龙　竺雪君　竺致文　著



中国宇航出版社
·北京·

## 内 容 简 介

本书为关于航天力学中优化理论研究的学术专著，主要论述了多级火箭结构参数的优化问题，还包含了作者关于多级火箭的速度极限、相对论力学中多级火箭的特征速度表达式等方面的理论研究成果。

全书共7章，分别为：设计中的多级火箭的最佳质量比；多级火箭的结构参数优化问题及一些有关理论问题；多级火箭的结构参数优化问题及一些有关理论问题(续)；从相对论力学看前面的有关问题；关于前面几章；带有助推火箭的多级火箭一些有关问题的探讨；一些有关问题的说明及示例等。书中所论述的内容全部来自作者及其合作者多年的科研成果。

本书可供从事运载火箭总体与结构研究和设计的理论工作者及工程技术人员阅读，也可作为高等院校和研究机构相关专业的研究生教学参考书。



**图书在版编目(CIP)数据**

多级火箭结构参数的优化理论/竺苗龙，竺雪君，竺致文著．--北京：中国宇航出版社，2011．7
ISBN 978-7-5159-0001-8

Ⅰ．①多…　Ⅱ．①竺…②竺…③竺…　Ⅲ．①多级火箭—结构参数—最佳化　Ⅳ．①V475．1

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第134780号

**责任编辑**　张艳艳
**责任校对**　王　妍　　**封面设计**　谭　颖

出版发行　中国宇航出版社

社　址　北京市阜成路8号　　邮　编　100830
(010)68768548
网　址　www.caphbook.com
经　销　新华书店
发行部　(010)68371900　(010)88530478(传真)
(010)68768541　(010)68767294(传真)
零售店　读者服务部　北京宇航文苑
(010)68371105　(010)62529336
承　印　北京画中画印刷有限公司

版　次　2011年7月第1版
2011年7月第1次印刷
规　格　787×1092
开　本　1/16
印　张　14.25
字　数　360千字
书　号　ISBN 978-7-5159-0001-8
定　价　80.00元

# 前言

我在航天方面的应用基础研究工作，从1966年年底开始至“文革”后期，基本上是独自研究。

“文革”后期至1980年左右，我主要是与吕茂烈先生和广宇同志合作。

然后，我们三人由于工作调动而分散，基本上我们又各干各的了。

另外，跟我的部分学生杨峻松、刘清正、潘国林、汪师晓、刘华富、郭雷、严星刚等同志短时合作过；跟我的侄儿竺承志合作比较多。

1990年后，我的女儿、儿子也都走上科研的道路。他们一个以数学为专业，一个以力学为专业，也喜欢这方面的工作，在他们各自工作之余与我一起完成这方面的文章。这样，我们就以《青岛大学学报》为基地，进行了一系列的合作；至今已在《青岛大学学报》（自然科学版、工程技术版）发表了一系列论文（可参见本书后的参考文献），以后还将继续发表。

最近几年，我们三人共同完成了《多级火箭结构参数的优化理论》和《绕地飞行航天器最佳发射轨道理论及其他问题的研究》这两本书。老实说，由于年龄等关系，我无法单独完成上述艰难任务；他们跟我来往方便，书中很多内容又是过去共同研究的，所以我们花了两年多的时间，合作完成了这两本书的写作。

现在这两本书（《多级火箭结构参数的优化理论》和《绕地飞行航天器最佳发射轨道理论及其他问题的研究》）和我过去出版的那两本书（《关于多级火箭结构参数的优化理论及其他问题的研究》和《关于航天器最佳发射轨道理论及其他问题的研究》），不仅书名有所不同，其内容也如此，过去那两本书的很多内容，在这两本新书中已经用更好的内容（我们近期合作发表的一系列论文）代替了。许多章节的次序和包含的内容也有较大改变，当然也附带改正了原书中的一些文字错误。目的是为了更加精确、更加科学、更加完整和更加系统。

早在20世纪50年代，我国就决定要搞两弹一星。后来，在广大科技工作者的不懈努力下，取得了一个又一个的惊人成就。当然我们也看到及听到了一些理论问题，例如关于多级火箭的最佳质量比及对两级火箭，推进剂加满是不是最好？载荷改变时，多级火箭的推进剂如何重新分配才为最佳等。

我们就是为了解决这些理论问题开始从事航天方面的应用基础研究直至现在。我们是站在学科的角度搞的，所以我们的模型通过抓主要矛盾就比实际的情况简单得多。理由是有些因素在本书讨论的问题中可暂不考虑，而从地面起飞到第一主动段结束关机点 $r_0$ 处时，其气动阻力和地球引力等引起的速度损耗可近似地看作为一个仅跟 $r_0$ 有关的常量（有时甚至

更好，详见两个仿真实例），而这个常量不影响本书所考虑的优化问题；当然计算总值时要考虑这个常量。这些钱学森先生早在1962年就指出了。后来我们在国防科技大学进行了两年的仿真试验。通过这两个仿真试验（这两个仿真试验的报告，已分别作为实例收集在上述两书中），可知我们在上述假设下所取得的部分成果经过实际部门工作人员艰苦的创造性劳动是可真正应用的，而且效果很明显；还有一部分则可为实际问题的解决提供理论基础，那里对在实际应用中应考虑的复杂情况统统给予综合考虑。另外从理论上讲，它们是一系列原始创新的成果。特别是"多级火箭结构参数的优化理论"和"绕地飞行航天器最佳发射轨道理论"完全是两个原始创新的理论，它们不但站在学科角度从理论上解决了这两本书中已提到的一系列问题，而且必将在今后解决与之相关的一些新的问题。

书中所有成果，包括"多级火箭结构参数的优化理论"和"绕地飞行航天器最佳发射轨道理论"本身，除个别明确指出的以外，都是我们独立完成的科研成果。如果有国内外的同行在我们的论文正式发表之前正式发表过书中所述的有关结果，我们热烈欢迎广大读者指出来，以便今后再版时说明。

最后我们要衷心感谢各级组织和领导的关怀和鼓励、同行中师长的关心和指导、同志们的大力帮助。没有这些，我们三人不可能在今天完成这两本书的写作。另外，我还要感谢我的爱人在本书写作过程中对我们三人的理解、支持和付出的辛劳。

展望未来，我深深祝愿我们伟大的祖国更加繁荣富强。

竺苗龙

2010年年底于青岛

# 目　录

# 第 1 章　设计中的多级火箭的最佳质量比

## 1.1　多级火箭的各主要部分的维特里吉特等标志及威廉斯等人的最佳质量比计算

关于多级火箭的各主要部件的质量以及这些质量相互间的比值，国外有各种标志，如参考文献[4]、[2]、[3]。

本节将介绍维特里吉特(Vertregt M)的标志及用此标志进行一些有关的计算。

图 1-1 为计算用的多级火箭示意图，注有其主要组成部分的符号。

根据此示意图，多级火箭可以分为级和子火箭。

火箭的级是由火箭工作期间所消耗的推进剂以及盛载这些推进剂的容器、发动机、附件和各舱的壳体和承力结构等组成。

子火箭则是多级火箭的有效载荷和一些级这样的组合，当其中的一级工作时，则其他各级与多级火箭的有效载荷一起作为该级子火箭的“有效载荷”。

维特里吉特建议将子火箭的序号由顶至底顺次排列，如图 1-1 所示。

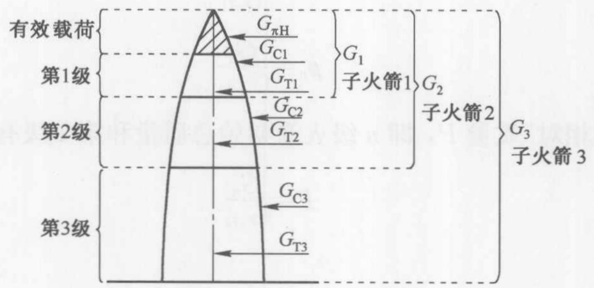



图 1-1　多级火箭示意图(1)

这时对子火箭 1 来说，工作级为第 1 级，它的“有效载荷”就是多级火箭的有效载荷；子火箭 2 的工作级为第 2 级，其有效载荷就是子火箭 1，即第 1 级与多级火箭有效载荷之和；子火箭 3 的工作级为第 3 级，其有效载荷就是子火箭 2，其余依此类推，有效载荷不包含在级的概念中。

火箭的其他各部分具体标志如下：

1）$G_{\pi H}$表示多级火箭的有效载荷的质量。根据这一质量设计和制造整个火箭，它是最重要的质量。有效载荷由安置在火箭中的人员或设备、承载它们的受力结构和飞行中保护它们的壳体等所组成。

而对有些火箭来说，“有效载荷”就是它所运载的另一子火箭的质量，即子火箭 1 好像是子火箭 2 的“有效载荷”，子火箭 2 是子火箭 3 的“有效载荷”，依次类推。

2）$G_T$ 表示每级所消耗的推进剂的质量。其中包括辅助物的质量，例如涡轮泵组工作用的过氧化氢和在飞行中该级工作时所消耗的其他化学品。

3）$G_C$ 表示每级的净重。它由推进剂容器、发动机、涡轮泵组、活门和导管、承力结构、壳体、操纵机构等的总质量构成；也就是该级具有的、并将与级一起脱离开在飞行中火箭其余部分的全部质量。

4）$G_n$ 表示由 $n$ 级组成的火箭的初始总质量。

根据上述火箭组成部分的标志，$G_{T2}$表示第 2 级所消耗的全部推进剂的质量；$G_{C3}$ 表示第 3 级的净重；$G_3$ 表示子火箭 3 的初始总质量等。

根据这些定义，显然可得

$$G_1 = G_{\pi H} + G_{C1} + G_{T1} \tag{1.1-1}$$

$$G_n = G_{n-1} + G_{Cn} + G_{Tn} \tag{1.1-2}$$

除了以上 4 个最重要的多级火箭的主要部分质量定义外，下面再定义 3 个质量比值。

5）子火箭的“相对”质量即子火箭的初始总质量和它的“有效载荷”之比，于是

$$p_1 = \frac{G_1}{G_{\pi H}} \tag{1.1-3}$$

$$p_n = \frac{G_n}{G_{n-1}} \tag{1.1-4}$$

多级火箭的总“相对”质量 $P$，即 $n$ 级火箭初始总质量和第 1 级有效载荷之比

$$P = \frac{G_n}{G_{\pi H}} \tag{1.1-5}$$

由于

$$\frac{G_1}{G_{\pi H}} \cdot \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{G_3}{G_2} \cdots \frac{G_n}{G_{n-1}} = \frac{G_n}{G_{\pi H}} = P$$

故有

$$P = p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{1.1-6}$$

量 $P$ 是多级火箭最重要的比值之一。

6）$S$ 表示级的结构特性，即表示包括推进剂在内的该级的初始总质量与净重之比的一

个量。

$$S_1=\frac{G_{C1}+G_{T1}}{G_{C1}} \tag{1.1-7}$$

$$S_n=\frac{G_{Cn}+G_{Tn}}{G_{Cn}} \tag{1.1-8}$$

7) $r_i$ 表示质量比。这是子火箭初始质量与推进剂消耗完后的同一子火箭的质量之比。这样

$$r_1=\frac{G_1}{G_1-G_{T1}} \tag{1.1-9}$$

$$r_n=\frac{G_n}{G_n-G_{Tn}} \tag{1.1-10}$$

质量比 $r_i$ 确定了在没有引力场和介质阻力下相应于如下方程式的理想速度

$$\Delta V_i=W_i\ln r_i \tag{1.1-11}$$

其中，$W_i$ 为火箭第 $i$ 级的有效喷气速度。

显见，$n$ 级火箭其载荷可获得的速度为

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}W_i\ln r_i \tag{1.1-12}$$

如果各级的有效喷气速度相同，即 $W_i=W$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=W\ln(r_1r_2\cdots r_n) \tag{1.1-13}$$

用符号 $R$ 来作为多级火箭的折合质量比，即

$$R=r_1r_2\cdots r_n \tag{1.1-14}$$

此时有

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=W\ln R \tag{1.1-15}$$

由此可得

$$R=\mathrm{e}^{\frac{\sum\Delta V_i}{W}} \tag{1.1-16}$$

请注意式(1.1-16)的 $R$ 在 $W_i=W$ 时才为正确。

这样定义的 $S_i$ 和 $r_i$ 显然都是恒大于 1 的。

其次，从式(1.1-9)可得

$$\frac{r_1-1}{r_1}=\frac{G_{T1}}{G_1}$$

从式(1.1-7)可得

$$\frac{S_1-1}{S_1}=\frac{G_{T1}}{G_{C1}+G_{T1}}$$

从式(1.1-3)可得

$$\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{G_1-G_{\pi H}}{G_1}$$

把

$$G_1-G_{\pi H}=G_{C1}+G_{T1}$$

代入上式则得

$$\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{G_{C1}+G_{T1}}{G_1}$$

故知

$$\frac{p_1-1}{p_1}\ \frac{S_1-1}{S_1}=\frac{G_{C1}+G_{T1}}{G_1}\ \frac{G_{T1}}{G_{C1}+C_{T1}}=\frac{G_{T1}}{G_1}=\frac{r_1-1}{r_1}$$

即有

$$\frac{S_1-1}{S_1}\ \frac{p_1-1}{p_1}=\frac{r_1-1}{r_1}$$

就一般情况而论，由于

$$\frac{r_n-1}{r_n}=\frac{G_{Tn}}{G_n}$$

$$\frac{S_n-1}{S_n}=\frac{G_{Tn}}{G_{Cn}+G_{Tn}}$$

$$\frac{p_n-1}{p_n}=\frac{G_n-G_{n-1}}{G_n}=\frac{G_{Cn}+G_{Tn}}{G_n}$$

所以

$$\frac{S_n-1}{S_n}\ \frac{p_n-1}{p_n}=\frac{G_{Tn}}{G_{Cn}+G_{Tn}}\ \frac{G_{Cn}+G_{Tn}}{G_n}=\frac{G_{Tn}}{G_n}=\frac{r_n-1}{r_n}$$

故知，对任意的 $n$ 都有

$$\frac{r_n-1}{r_n}=\frac{S_n-1}{S_n}\ \frac{p_n-1}{p_n} \tag{1.1-17}$$

由此可得

$$S_n=r_n\ \frac{p_n-1}{p_n-r_n} \tag{1.1-18}$$

$$p_n=r_n\ \frac{S_n-1}{S_n-r_n} \tag{1.1-19}$$

$$r_n=\frac{p_nS_n}{p_n+S_n-1} \tag{1.1-20}$$

对于 $n$ 级火箭而言，由于

$$p_1=r_1\ \frac{S_1-1}{S_1-r_1},\ p_2=r_2\ \frac{S_2-1}{S_2-r_2},\ \cdots,\ p_n=r_n\ \frac{S_n-1}{S_n-r_n}$$

所以有

$$P=p_1 p_2 \cdots p_n = r_1 r_2 \cdots r_n \frac{S_1-1}{S_1-r_1}\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}$$

故知

$$P=R\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n} \tag{1.1-21}$$

把 $G_n=G_{\pi H}P$ 代入式(1.1-21)，得

$$G_n=G_{\pi H}R\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n} \tag{1.1-22}$$

从式(1.1-10)，得

$$G_{Tn}=G_n\frac{r_n-1}{r_n}$$

把式(1.1-22)中的 $G_n$ 代入上式，得

$$G_{Tn}=G_{\pi H}R\frac{r_n-1}{r_n}\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n} \tag{1.1-23}$$

由式(1.1-8)和式(1.1-23)可得

$$G_{Cn}=G_{\pi H}R\frac{r_n-1}{r_n}\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}\frac{1}{S_n-1} \tag{1.1-24}$$

如果火箭各级的结构特性 $S_i$ 和质量比 $r_i$ 均相同，即 $S_i=S, r_i=r$，则可写出下列各式

$$P=p^n\text{（其中 } p=p_1=p_2=\cdots=p_n\text{）} \tag{1.1-25}$$

$$R=r^n \tag{1.1-26}$$

$$P=R\left(\frac{S-1}{S-R^{\frac{1}{n}}}\right)^n \tag{1.1-27}$$

$$R=P\left(\frac{S}{P^{\frac{1}{n}}+S-1}\right)^n \tag{1.1-28}$$

借助上述等式不难得出其他比值。

例如以 $\sum G_C$ 表示火箭所有 $n$ 级的总净重，以 $\sum G_T$ 表示所有各级所携带的推进剂质量的总和，可得

$$\sum G_C+\sum G_T=G_n-G_{\pi H}=(P-1)G_{\pi H}$$

因此

$$\frac{\sum G_C+\sum G_T}{G_n}=\frac{G_{\pi H}(P-1)}{G_{\pi H}P}=\frac{P-1}{P}$$

由于所有各级结构特性值相同，故自式(1.1-8) 可得

$$S_i=S=\frac{G_{Ci}+G_{Ti}}{G_{Ci}}=\frac{\sum G_C+\sum G_T}{\sum G_C}$$

由此可见

$$\frac{\sum G_{\mathrm{C}}}{G_n}=\frac{\sum G_{\mathrm{C}}}{\sum G_{\mathrm{C}}+\sum G_{\mathrm{T}}}\,\frac{\sum G_{\mathrm{C}}+\sum G_{\mathrm{T}}}{G_n}=\frac{1}{S}\,\frac{P-1}{P} \tag{1.1-29}$$

从而可得

$$\frac{\sum G_{\mathrm{T}}}{G_n}=\frac{S-1}{S}\,\frac{P-1}{P} \tag{1.1-30}$$

注意对式(1.1-25)～式(1.1-30)而言，均有 $S_i=S$，$r_i=r$。

利用上面的标志及有关的计算公式，维特里吉特在假定结构特性 $S_i$ 与质量比 $r_i$ 无关的情况下，寻求因子 $r_1$，$r_2$，…，$r_n$ 这样的一种分配方法，它在满足条件

$$F=\sum\Delta V_i-(W_1\ln r_1+W_2\ln r_2+\cdots+W_n\ln r_n)=0 \tag{1.1-31}$$

下使

$$P=R\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\,\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}=f$$

为最小。其中

$$R=r_1r_2\cdots r_n$$

为了解决这个问题，显然可用拉格朗日乘子法，记

$$\Phi(r_1,r_2,\cdots,r_n)=f(r_1,r_2,\cdots,r_n)+\lambda F(r_1,r_2,\cdots,r_n)$$

从

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_1}=0$$

可得

$$r_1r_2\cdots r_n\,\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\,\frac{S_2-1}{S_2-r_2}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}\,\frac{S_1}{S_1-r_1}-\lambda W_1=0$$

因为

$$r_1r_2\cdots r_n\,\frac{S_1-1}{S_1-r_1}\cdots\frac{S_n-1}{S_n-r_n}=P$$

故有

$$P\,\frac{S_1}{S_1-r_1}-\lambda W_1=0 \tag{1.1-32}$$

同理，从

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_2}=0\text{，可得 }P\,\frac{S_2}{S_2-r_2}-\lambda W_2=0 \tag{1.1-33}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_n}=0\text{，可得 }P\,\frac{S_n}{S_n-r_n}-\lambda W_n=0 \tag{1.1-34}$$

从式(1.1-32)～式(1.1-34)，可得

$$\begin{cases} r_2=S_2-\dfrac{S_2}{S_1}\dfrac{W_1}{W_2}(S_1-r_1) \\ \vdots \\ r_n=S_n-\dfrac{S_n}{S_1}\dfrac{W_1}{W_n}(S_1-r_1) \end{cases} \tag{1.1-35}$$

将式(1.1-35)代入式(1.1-31)，可求出 $r_1$ 来，然后代入式(1.1-35)就解决了问题。

如果所有级的 $W_i=W$，问题就可大大简化。

此时

$$\begin{cases} r_2=\dfrac{S_2}{S_1}r_1 \\ \vdots \\ r_n=\dfrac{S_n}{S_1}r_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum \Delta V_i &= W\left[\ln r_1+\ln\left(\frac{S_2}{S_1}r_1\right)+\cdots+\ln\left(\frac{S_n}{S_1}r_1\right)\right] \\ &=W\left(n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln S_1+\ln S_2+\cdots+\ln S_n\right) \\ &=W\left[n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln(S_1S_2\cdots S_n)\right]\end{aligned}$$

引入下列符号

$$S_1S_2\cdots S_n=\overline{S}$$

故有

$$\sum \Delta V_i=W\left(n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln\overline{S}\right)$$

因为

$$\sum \Delta V_i = W\ln R$$

所以

$$n\ln\frac{r_1}{S_1}+\ln\overline{S}=\ln R$$

故知

$$r_1=S_1\left(\frac{R}{\overline{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1-36}$$

$$\vdots$$

$$r_n=S_n\left(\frac{R}{\overline{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1-37}$$

这样问题的解就简洁地表示出来了。

但是，$r_i$ 与 $S_i$ 无关的假设，维特里吉特本人也认为是不合理的。威廉斯(M. L. Williams)在下述的

$$G_{Ci}=[\nu_{Ci}^{(1)}+\nu_{Ci}^{(2)}]G_{Ti}+\nu_{Ci}^{(3)}G_i \tag{1.1-38}$$

假设条件下[其中 $\nu_{Ci}^{(j)}(j=1, 2, 3)$为 3 个正常数，并且显见 $\nu_{Ci}^{(3)}<1$]，对上述问题重新进行了探讨。

由于

$$p_i=\left(1-\frac{G_{Ci}}{G_i}-\frac{G_{Ti}}{G_i}\right)^{-1} \tag{1.1-39}$$

把式(1.1-38)代入式(1.1-39)可得

$$p_i=\left[(1-\nu_{Ci}^{(3)})-(1+\nu_{Ci}^{(1)}+\nu_{Ci}^{(2)})\frac{G_{Ti}}{G_i}\right]^{-1}$$

引入下列符号

$$A_i=1-\nu_{Ci}^{(3)} \tag{1.1-40}$$

$$B_i=1+\nu_{Ci}^{(1)}+\nu_{Ci}^{(2)} \tag{1.1-41}$$

$$\mu_i=\frac{G_{Ti}}{G_i} \tag{1.1-42}$$

可知

$$p_i=(A_i-B_i\mu_i)^{-1} \tag{1.1-43}$$

同时，由于

$$r_i=(1-\mu_i)^{-1} \tag{1.1-44}$$

所以，求前述的极小值问题这时已变为求下列 $\Phi$ 极小值的问题

$$\Phi(\mu_1,\cdots,\mu_n)=P(\mu_1,\cdots,\mu_n)+\lambda\left[V+\sum_{i=1}^{n}W_i\ln(1-\mu_i)\right] \tag{1.1-45}$$

且满足下述的约束条件

$$V+\sum_{i=1}^{n}W_i\ln(1-\mu_i)=0 \tag{1.1-46}$$

其中

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

容易得到，这时解的形式为

$$r_i=\frac{1}{1-\mu_i}=\left(\frac{A_i}{B_i}-1\right)^{-1}\left\{\frac{W_1}{W_i}\left[r_1\left(\frac{A_1}{B_1}-1\right)+1\right]-1\right\}\quad(i=2, 3, \cdots, n) \tag{1.1-47}$$

而 $\mu_1$ 或 $r_1$ 之值则可用联立解等式(1.1-46)和等式(1.1-47)而确定。

如果各级的有效喷气速度相同，即 $W_i=W$，则从式(1.1-47)可得

$$\frac{1}{1-\mu_i}=r_i=\frac{1-\dfrac{A_1}{B_1}}{1-\dfrac{A_i}{B_i}}r_1 \quad (i=2,3,\ \cdots,\ n) \tag{1.1-48}$$

又

$$V=\sum \Delta V_i = W\ \ln\ (r_1 r_2 \cdots r_n) = W\ \ln\left\{\left[r_1\left(1-\frac{A_1}{B_1}\right)\right]^n \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{A_i}{B_i}\right)^{-1}\right\} \tag{1.1-49}$$

引入符号

$$\bar{\theta}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{A_i}{B_i}\right)^{-1} \tag{1.1-50}$$

后可得

$$r_1=\left(\frac{e^{\frac{V}{W}}}{\bar{\theta}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{A_1}{B_1}\right)^{-1} \tag{1.1-51}$$

另外，又由于

$$V=W\ \ln R$$

所以

$$R=\bar{\theta}r_1^n\left(1-\frac{A_1}{B_1}\right)^n$$

故有

$$\begin{cases} r_1=\left(1-\dfrac{A_1}{B_1}\right)^{-1}\left(\dfrac{R}{\bar{\theta}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ r_n=\left(1-\dfrac{A_n}{B_n}\right)^{-1}\left(\dfrac{R}{\bar{\theta}}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

不难看出，当

$$A_n=1$$

$$B_n=\frac{S_n}{S_n-1}$$

时，我们就得出维特里吉特所研究的结果

$$\begin{cases} r_1=S_1\left(\dfrac{R}{\bar{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \vdots \\ r_n=S_n\left(\dfrac{R}{\bar{S}}\right)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

其中

$$\bar{S}=\prod_{i=1}^{n}S_i$$

威廉斯本人指出，他在上述的研究中所得的结果，只能作为初步计算用。事实上，这些系数 $\nu_{Ci}^{(j)}$ 是粗略的，他的假设

$$G_{Ci}=[\nu_{Ci}^{(1)}+\nu_{Ci}^{(2)}]G_{Ti}+\nu_{Ci}^{(3)}G_i$$

也是粗略的，所以本节的结果是粗略的，但设计的初步计算必须要有。速度值 $V$ 的进一步提高可参见下章。而关于本节的进一步讨论则见下面两节。

## 1.2 关于多级火箭的最佳质量比(Ⅰ)

关于多级火箭的最佳质量比，威廉斯指出：

$$F=\frac{1}{A_1-B_1\mu_1}\ \frac{1}{A_2-B_2\mu_2}\cdots\frac{1}{A_n-B_n\mu_n}+\lambda[V+W_1\ln(1-\mu_1)+\cdots+W_n\ln(1-\mu_n)]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\mu_1}=\dfrac{B_1P}{A_1-B_1\mu_1}-\dfrac{\lambda W_1}{1-\mu_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\mu_2}=\dfrac{B_2P}{A_2-B_2\mu_2}-\dfrac{\lambda W_2}{1-\mu_2}=0\\\qquad\vdots\\\dfrac{\partial F}{\partial\mu_n}=\dfrac{B_nP}{A_n-B_n\mu_n}-\dfrac{\lambda W_n}{1-\mu_n}=0\end{cases}$$

其中

$$P=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i-B_i\mu_i}$$

由第 1 式和第 $i$ 式联立($i=2, 3, \cdots, n$)可得

$$\frac{B_1(A_i-B_i\mu_i)}{B_i(A_1-B_1\mu_1)}=\frac{W_1(1-\mu_i)}{W_i(1-\mu_1)}$$

记

$$M=\frac{W_iB_1}{W_1B_i}\frac{1-\mu_1}{A_1-B_1\mu_1}$$

则可得

$$\mu_i=\frac{MA_i-1}{MB_i-1}$$

所以

$$\begin{cases}\bar r_i=\dfrac{1}{1-\mu_i}=\dfrac{B_iW_iB_1-W_1B_i[(A_1-B_1)\bar r_1+B_1]}{W_iB_1(B_i-A_i)}\quad(i=2, 3, \cdots, n)\\\bar r_1\ \text{由}\ V=\sum\limits_{i=1}^{n}W_i\ln\bar r_i\ \text{确定}\end{cases}\tag{1.2-1}$$

特殊情况 $W_i=W$ 时($i=1, 2, \cdots, n$)驻点的表达式为