

极限论与微分学新探

定光桂 著



科学出版社

014032563

0172.1
03

极限论与微分学新探

定光桂 著



科学出版社

北京



北航

C1720748

0172.1

03

010325282

内 容 简 介

这是一本探索性的书。笔者试图将实数、极限和微分学这些数学分析的基础理论用现代分析的观点来处理。本书既要上述理论的基本内容全部覆盖,又要将原内容赋予一系列的发展和创新。

这是一本“雅俗共赏”的书。本书通俗,是因为阅读本书的预备知识仅仅需要初等数学知识(中学内容);而本书“雅”,则是因为其观点新、技巧性强且创新内容多。

这是一本培养创造性思维的书。本书讲述由浅而深,从形象到抽象;并特别注意引导读者去“举一反三”,从各种“(正)例”“反例”以及“注”的学习中学会联想,并发现且引导出新的结果。

本书既可以作为数学分析的教材,亦可作为高年级大学生、研究生和需用此相应知识的科教人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

极限论与微分学新探/定光桂著. —北京:科学出版社, 2014.1

ISBN 978-7-03-039552-8

I. ①极… II. ①定… III. ①极限-研究②微分学研究 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 043355 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 张小霞

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张: 31 3/4

字数: 621 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

定光桂教授的《极限论与微分学新探》是一部具有鲜明特色、探索性很强的新著.

众所周知, 极限论和微分学是数学分析的基础. 至今为止, 虽然涉及这些内容的外中书籍不下百千种, 但是, 像该书这样既将上述基本理论全部覆盖, 又具有一系列创新论述与认识, 且将近代分析的观点渗透其中的著作却实为罕见.

此书的特点, 首先是按照数学理论发展的模式, 严格地从公理和定义出发, 紧扣问题的核心和实质来论述. 其中, 与中外相应内容最不相同的是: 在此书中, 用有理数端点的“闭区间套”来定义无理数和实数, 从而导出实数的完备性. 继而, 用完全类似的方法导出了任意距离空间中“闭球套公理”与“完备性公理”的等价性这一结论. 其次, 从内容的“一致性”出发, 在不多增加篇幅的情况下, 作者将相应近代分析的许多观点和内容和谐地渗入其中. 其三, 此书对许多结论及各种形式的反例 (包括作者的创新结果) 的论述特别注意引导读者去“举一反三”, 去“联想”, 从而激活读者的创造性思维和逐步培养他们独立思考和学习研究的能力. 至于此书的其他特点, 读者从此书的学习中一定可以发现, 在此就不一一列举了.

此书不但对于学习微积分的读者会有帮助, 而且对于从事数学分析教学的教师也同样具有参考价值. 特别地, 由于此书中有大量的正、反例子 (有的是作者构造的), 因此, 对于自学的读者也将大有裨益.

徐宗本

2012 年秋于西安交通大学

前 言

在本书与读者见面之时,我首先要衷心感谢徐宗本院士和彭济根院长,感谢他们亲赴南开大学,邀请我到西安交通大学工作,使我得以亲身参加到教育部为推进我国研究型大学水平的提升而首创的有关数学拔尖创新人才的试验教学工作。

虽然我在高校教学科研工作已 50 多年,但是,自从瑞典皇家科学院 Mittag-Leffler 数学研究所回国后,已经 30 多年没有从事基础数学的再学习和专研。此次有机会亲身投入到此一(在人才治国战略思想指导下)具有历史意义的高等教育工作中,三年来的实践,我才深切感受到:作为所有高等数学各分支基础和核心的“极限理论”以及应用广泛的“微分学理论”的确有不少值得改进的空间。

众所周知,“微积分学”的创建至今已有二三百年的历史。几百年来,在一些数学大师和许多杰出数学先辈们的辛勤劳动下,“微积分学”已经被塑造成一个相当完美的经典数学成品。因此要想做任何一点的改动都是十分不易的。然而,时代在进步,科学技术在飞速发展,从 21 世纪的今天来看,“微积分学”则又有不少应该和可以改进的空间,尤其是其极限和微分学理论部分。我想,其实许多数学工作者肯定也看到了这一点,但是由于他们“无暇”去做或者“不屑”去做,致使几百年后“微积分学”理论基本变化不大,至少在近半个多世纪以来,内容和论述变化不大。

* * *

要培养创新人才,就应该有创新的思维。在这三年的再学习、讲授、讨论和研究中,对作为现代分析强有力的工具及基础并对后续学科有深刻影响的极限和微分学理论,应该并且也能够作一个重新的探索和改革。正是基于此,我撰写出了这本探索性的书。在本书的写作中,我有下面的几点思索:

(一) 要将现代分析的观点渗透其中。这里,我们既不是将现代分析的某些内容“下移”,也不去专门介绍某些新专题,而是在继存下来的极限论和微分学的内容中,对可以引申的部分,在尽可能简单的原有框架下,让读者了解现代分析中某些方法技巧以及它们的应用。例如,对于极限的定义及其某些基本性质,由于它们在一维实数空间、 n 维欧氏空间以至于任意“赋范空间”和抽象的“距离空间”中表达和处理手法的“一致性”,我们最后则将它们转为在距离空间或者赋范空间来讨论。又如,连续函数在“闭区间”上的整体性质,其证明与距离空间上的连续函数在“紧集”或“自列紧集”上之整体性质是完全相同的,因此我们就直接用后者来代替前者。这样一来,不但没有增加篇幅和难度,反而有助于读者深刻和完整地了解相

关特性的内涵、实质以及后续学科的学习. 再如, 对于现今书本中常爱选用的有关 n 维欧氏空间中凸函数的连续性专题, 我们则顺势推广到任意 n 维“赋范空间”来讨论. 此外, 在有关多元函数(泛函)和映像(算子)的微分之论述中, 我们则很自然地将(连续)“线性泛函”和(连续)“线性算子”以及“弗雷歇导数”等近代泛函分析的概念和初等内容引领出来.

(二) 注重数学的特点——严谨且简练, 并引导读者善于抓住问题的核心和实质. 仅以实数的完备性为例, 我们知道, 既然极限论是从实数域中开始讨论的, 那么, 我们首先就要论证实数的“完备性”, 即除了有理数和无理数之外, 实数轴上没有“空隙”. 因此, 关系到从有理数域出发, 如何构造(产生)出所谓的“无理数”. 值得一提的是: 如果仅仅将无理数直接就“简单地”定义为有理数列(例如“十进位小数”)的“极限”, 这是不对的. 因为, 这与极限定义之开首约定“如果存在一个数”的前提相矛盾. 在本书引入实数完备性相互等价的五个命题中, 我们不采用“戴德金分割原理”“康托尔确界原理”或“康托尔单调有界收敛原理”为出发点, 因为此三个原理中均涉及一个“序”(大小比较之)的结构. 但从本质剖析, 这种“序”的特性与“完备性”(实数的)是毫不相干的! 由于此“附加物”的羁绊, 使得这三个原理均不可能推广到任意的抽象距离空间, 而作为该空间实施完备化的工具. 这里, 我们也不用“柯西基本列收敛原理”(虽然在后续的学科“泛函分析”等均是用它来做距离空间完备化之工具的), 因为对一个初学高等数学的读者而言, 我们认为, 用此原理来定义实数似乎显得过于抽象了一些. 因此, 最终我们采用有理数组成(长度趋向零)的“闭区间套”来作为定义实数的公理, 如同玩具“俄罗斯套娃”. 从而给极限论研讨之基石——实数理论——一个直观、清晰、新颖和严格地诠释. 这种对内容的深入剖析, 并引导读者抓住内容的核心和实质之论述方法, 其始终贯穿于本书之中, 而最后 6.4 节关于隐函数定理的重新处理, 则亦是这种探索的一个范例.

(三) 注意激活读者的创造性思维, 逐步培养他们的独立思考和学习研究的能力. 一些著名的教育家认为: 真正好的教育, 就是系统地培养和给予学生自己发现新事物的能力和机会. 因此, 在本书中, 我们将通过一些基本内容的延伸, 让读者学会联想, 善于逻辑推理, 并逐步培养独立研讨的能力. 例如, 在介绍数列与其子列之间极限的传递关系时, 我们将其反问题一直引申到数列与其“无穷”多个“分割子数列”的情况. 又如, 对于施笃兹定理之逆不成立时我们构造的几种反例, 以及加“*”号介绍由此引来之“泛函分析”的一个著名命题. 再如, “数列的上、下极限”一节中一些启迪思维的例子, 等等. 为了加强作为基础的数列极限部分之学习与掌握, 我们将“数项级数”的内容“陪绑式”地紧随其后. 这样的安排不但让读者重新复习了数列极限几乎全部的基本定理, 也使他们看到由级数本身而产生出的许多新的结果. 特别地, 在“重排级数”部分, 我们又向读者展示了一些新的论证方法和创新性的结论. 为了引导读者得出有关“有限维赋范空间上凸函数必连续”的漂亮结

果,我们则先引出一个十分容易验证的命题:在任意赋范空间的线性泛函,其在任一点“局部有上界”则必连续.并由此来启发和联想而得出上述的所需结论.此外,在5.3节中,由于我们“直接”用函数的导数与二次导数来分别判断函数的升降(单调性)与凸凹状态(而不沿袭几百年来用“中值公式”作为“中介”的模式),因此让读者又看到了一条新径.而在后继的中值公式一节中,我们则详细地从逻辑思维的联想、推断,着力于引导读者从一个结论去推导出下一个结论,充分地体验科研的创新逻辑思维.并且,这种启发读者“举一反三”的联想始终贯彻于本书之中.

(四)请读者要重视本书中的(正)例、反例和“注”,千万不要忽略.这些均将使读者加深对相应内容的深入、全面地理解.特别是一些注记,那都是我们重新学习这些内容的一些心得和体会,也即“以注解意”也,它们均是本书重要的组成部分.如果仔细阅读、体会,必将会受益匪浅的.这样既方便于读者对自己学习实践的检验,也有利于读者的自学.

* * *

在本书完成之际,必须要感谢西安交通大学陆亚明老师,他年轻、富有朝气、进取心极强;他亲自打印了前三章,完成了全书几乎所有作图和计算机编译等工作;此外,他还提出过不少有益的意见和建议.另外,我也要感谢西安交通大学“拔尖学生试验班”的优秀学生赵福军同学,感谢他在学习、休息之余,完成了除前三章外的其余绝大部分书稿的录入工作.

在此,必须再次感谢西安交通大学数学与统计学院,感谢这里的领导和老师们给予了我一个再学习、再探索的机会,使我亲自参加了培养拔尖创新人才的试点工作,并且激励和全力支持我在工作实践和深入专研中,撰写出了这本探索性的书.

* * *

必须指出的是,在撰写此书时,我们参考了50年来国内外与此相关的许多优秀书籍.由于数量太多,就不一一列出作为参考文献并予以致谢了.

本书中的定义、定理、例题、图等的编号分别按节排序.

既然这是一本探索而写出的书,必然会有许多不足或不当之处,亦敬请专家和读者们指正.

最后,我想再附录几句至理名言,与青年读者们共勉.一是中国的古训:“学成于思,毁于随”.二是法国的名言:“成功的必然之路,就是不断地重来一次”.

定光桂

2012年秋于西安交通大学

目 录

序

前言

第 1 章 实数的完备性	1
1.1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 的性质	1
1.1.1 四则运算性质 (代数结构)	1
1.1.2 全序性质 (序结构)	2
1.1.3 拓扑结构	3
1.2 实数的定义	4
1.3 实数的其他公理化引入	16
1.4 数列极限初论	18
1.5 定义实数的各公理所对应的完备化定理间之等价性	25
1.6 任何抽象距离空间之完备性	33
1.7 极限点定理与有限覆盖定理	39
第 2 章 数列的极限	49
2.1 数列极限的存在	49
2.2 数列极限存在的某些传递性	56
2.3 Stolz(施笃兹) 定理	68
2.4 $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ 与 1^∞ 型极限	77
2.5 数列的上、下极限	80
第 3 章 数项级数	92
3.1 级数的敛散性及该性质的传递性	92
3.2 同号项级数的敛散性及其判别法	104
3.3 变号级数的收敛 (条件收敛) 与绝对收敛	118
3.4 绝对收敛级数与条件收敛级数的重排级数之特性	127
3.5 级数的乘法	143
3.6 累次级数与二重级数	149
3.7 无穷乘积	156

第 4 章 函数的连续性	169
4.1 集的映射与函数 (泛函)	169
4.2 函数的极限及其存在性判别法 (含: 函数的上、下极限)	175
4.3 函数极限的基本性质及其存在性的传递	189
4.4 无穷小量 (或无穷大量) 之间的比较	199
4.5 函数在一点的连续性及相关性质	205
4.5.1 多项式函数的连续性	208
4.5.2 三角函数和反三角函数的连续性	208
4.5.3 对数函数和指数函数的连续性	209
4.5.4 幂函数的连续性	210
4.6 距离空间中的泛函 (函数) 之极限性质 (含: 方向极限、 累次极限与重极限)	214
4.7 距离空间的初等拓扑性质 (含: 上、下半连续泛函)	229
4.8 紧集上连续泛函 (函数) 的整体性质	242
4.9 连通集上连续函数的性质	256
4.10 有限维赋范空间中的线性泛函与凸泛函	265
第 5 章 一元函数的微分学	286
5.1 导数及其求法	289
5.2 高阶导数	300
5.3 函数的单调性、局部极值性、凸凹性及作图	310
5.4 微分中值公式与求不定型极限的 L'Hospital 法则	343
5.5 函数的微分	358
5.6 Taylor 定理 (公式)	365
第 6 章 多元函数的微分学	384
6.1 偏导数 (含: 方向导数)	384
6.2 多元函数的微分	401
6.3 空间 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 中映像 (算子) 的微分	413
6.4 隐函数 (隐映像) 定理及逆映像定理	434
6.5 Taylor 公式及条件极值理论	457
6.6 几何上的几点应用 (切线、切面及法向量)	477
索引	489

第1章 实数的完备性

在知道了有理数及其性质的基础上,“如何定义实数”本质上就是研讨“如何定义无理数”.本章完全遵循数学学科发展的规律,利用公理化的方式予以严格讨论,从而指出,由“有理数”和“无理数”组成的“实数”将满足一个重要的数学性质:完备性.

当我们追溯到原始社会就不难发现:数学,甚至数字均是来源于实践的.人类的祖先从对捕捉到的猎物的计数中逐渐形成了“自然数”(即正整数 $1, 2, 3, \dots$)的概念(在现代数学中,人们常将自然数的全体记为 $\mathbb{N}$).随后,在对猎物的分配中就产生了“正有理分数”的概念,即形如 $\frac{a}{b}$ 的分数(其中 a 和 b 均属于自然数集,我们记为: $a, b \in \mathbb{N}$).例如,五个人捕到了两只野兔,均分的话每人只可得到 $\frac{2}{5}$ 只.随着社会继续发展,从物品交换、借贷等过程中又产生了负整数、负分数和零的概念.这样,就形成了一般的“整数”(通常记为 $\mathbb{Z}$)和“有理数”(通常记为 $\mathbb{Q}$)的概念.

1.1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 的性质

虽然绝大多数人都熟悉有理数,且知晓它的许多特性,但大多都没有,也不会从中提炼出有理数所具有的特性及其抽象的数学实质.其实,有理数集 $\mathbb{Q}$ 主要有以下关于代数结构、序结构和拓扑结构的三个特性(这也将是下面将要定义的实数集亦必须具备的特性):

1.1.1 四则运算性质(代数结构)

(1) 全体有理数构成一个加法群,即在 $\mathbb{Q}$ 上定义了一种运算“+”(称为“加法”),使得对任意的 $x, y, z \in \mathbb{Q}$ (这里“ $\in$ ”表示“属于”),均成立以下5个性质:

- 1°(封闭性) $x + y \in \mathbb{Q}$;
- 2°(结合性) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- 3°(交换性) $x + y = y + x$;
- 4°(零元) 存在元素 $0 \in \mathbb{Q}$,使得 $x + 0 = x$.此“0”称为 $\mathbb{Q}$ 的“零元”;
- 5°(加法逆元) 存在 $-x \in \mathbb{Q}$,使得 $x + (-x) = 0$.此“ $-x$ ”称为“ x ”的加法“逆元”或“负元”.

(2) 全体非零有理数构成一个交换的乘法群,即在 $\mathbb{Q}$ 上定义了一种运算“ $\cdot$ ”(称

为“乘法”), 使得对于任意的 $x, y, z \in \mathbb{Q}$, 均成立以下 5 个性质:

1°(封闭性) $x \cdot y \in \mathbb{Q}$;

2°(结合性) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

3°(交换性) $x \cdot y = y \cdot x$;

4°(单位元) 存在元素 $1 \in \mathbb{Q}$, 使得 $x \cdot 1 = x$. 此“1”称为 $\mathbb{Q}$ 的“单位元”或“幺元”;

5°(乘法逆元) 对任意的 $x \neq 0$, 存在 $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, 使得 $x \cdot x^{-1} = 1$. 此“ x^{-1} ”称为“ x ”的乘法“逆元”或“倒数”.

注 1 一般而言, 在一个集合 S 中定义的乘法运算若只满足以上 1°, 2° 两条, 则称 S 为乘法半群; 在此基础上若还满足 3°, 则称之为交换的乘法半群; 此外, 若还满足 4°, 就称之为含单位元的交换乘法半群.

(3) 在 $\mathbb{Q}$ 内, 上述加法与乘法之间有以下分配律:

$$\begin{aligned}(x+y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, \\ z \cdot (x+y) &= z \cdot x + z \cdot y,\end{aligned} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

注 2 由前面所提到的乘法的交换性可知, 上面的两式其实是等同的. 我们有意将其分开写出, 是为了在后继数学课程中, 当介绍一般的抽象“线性空间”概念并涉及该空间中“元素”的加法和“数乘”运算之间的关系时, 也可类似地导出. 此外, 在上面的式子中, 还使用了国际通用的逻辑学符号“ $\forall$ ”, 其意是“(对) 任意的”, 这是将英文单词“ANY”的第一个字母倒置而得. 附带说一句, 今后还会用到符号“ $\exists$ ”, 其意是“存在”, 它由英文单词“EXIST”的第一个字母通过“(镜面) 反射”而得.

1.1.2 全序性质 (序结构)

为了在一般集合上给出有关“序”和“距离”的定义, 先要来介绍有关集 (集合) 的概念.

所谓集 (或集合), 是指具有某些性质的对象或事物的全体, 而这些对象称为所给集合的元 (或元素). 必须注意的是, 这里仅仅是对“集合”及“元素”这两个术语进行朴素的描述, 而不是定义. 以上是遵循集论的创始人德国著名数学家 Cantor (康托尔) 最初给出的概括性说法. 一个事物或对象与给定的集合之间, 有“属于”和“不属于”两种基本关系 (通常记为“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”). 在这种意义下, 由于去掉了“个性”、抽象出了“共性”, 因此显得十分简明.

(1) 在介绍有理数集 $\mathbb{Q}$ 的全序性质前, 给出有关“序”“全序”及“线性序”的定义.

定义 1 集合 S 称为是有序集(或半序集、偏序集), 是指在其中“某些”元素之间定义了一个序关系“ $\prec$ ”, 其对 S 中的元素 x, y, z , 满足以下三个条件:

1°(自反性) $x \prec x$;

2°(反对称性) 若 $x \prec y$ 且 $y \prec x$, 则 $x = y$;

3°(传递性) 若 $x \prec y$ 且 $y \prec z$, 则 $x \prec z$.

注 3 上述有序集也被称作(半)序空间, 常记为 $(S, \prec)$.

定义 2 集合 S 称为是全序集, 如果它是一个具有序“ $\prec$ ”的有序集, 并且对任意的 $x, y \in S$, 关系 $x \prec y$ 和 $y \prec x$ 至少有一个成立.

定义 3 设集合 S 是一个具有序“ $\prec$ ”的加法群和乘法半群, 如果对 S 中的任意元 x 及 y , 当有关系式 $x \prec y$ 时, 有

1° 对任意的 $z \in S$, 均成立 $x + z \prec y + z$;

2° 对满足 $z \succ 0$ 的任意元 $z \in S$, 均成立 $z \cdot x \prec z \cdot y$,

则称 S 为线性有序集.

注 4 在上述定义中, 若 S 中的序关系是全序的, 则称其为线性全序集.

由以上定义容易看出, 当有理数集 $\mathbb{Q}$ 以通常的大小关系“ $\leq$ ”作为序关系“ $\prec$ ”时, 则有下面结论:

定理 1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是一个线性全序集.

证明 略.

(2) 对于有理数集 $\mathbb{Q}$ 中元素的大小关系, 还有如下著名的 Archimedes(阿基米德, 古希腊数学家)公理:

公理 1(Archimedes 公理) 对任意的 $x \in \mathbb{Q}$, 必存在自然数 n , 使得 $n > x$.

1.1.3 拓扑结构

(这里, 把由距离引出的一些性质称为拓扑性质. 至于拓扑的严格定义, 将在 4.7 节给出.)

(1) 设 S 是一个集合, 如果对 S 中任意的一对元素 x, y , 均有一个“数” $d(x, y)$ 与之对应(至今, 由于我们只知道“有理数”, 故而此处提及的“数”仅指“有理数”. 待引入了“实数”的定义之后, 此处的“数”便可为任一“实数”), 并满足以下条件:

1°(非负性) $d(x, y) \geq 0$, 并且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (这里符号“ $\iff$ ”表示“等价”、“当且仅当”或“充分必要”);

2°(对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;

3°(三角不等式) 对任意的 $x, y, z \in S$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

我们称“ d ”为 S 上的一个距离, 而赋予了距离“ d ”的集合 S 称为距离空间(或度量空间), 并记为 (S, d) .

如果在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中定义距离 $d(x, y) \triangleq |x - y|$ (符号“ $\triangleq$ ”表示“定义”或“规定”), 则有:

定理 2 $(\mathbb{Q}, d)$ 是一个距离空间.

证明 略.

(2) 有理数的自稠密性.

定理 3 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是自稠密的 (这是指对任一元 $x \in \mathbb{Q}$ 及任意小的“正有理数” ε , 均存在元 $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$, 使得 $0 < |x_\varepsilon - x| < \varepsilon$). 特别地, $\mathbb{Q}$ 还是“各向稠密”的 (即对任一元 $x \in \mathbb{Q}$, 无论在 x 的左边还是右边, 均可找到与其任意逼近的有理数).

证明 事实上, 只需取 $x_\varepsilon = x \pm \frac{\varepsilon}{2}$ 即可.

注 5 从定理 3 可以直接导出如下结论: 对任意两个不同的有理数 r_1, r_2 , 必存在 (与 r_1 和 r_2 均不同的) 有理数 $\bar{r}$, 使其在 r_1 与 r_2 之间. 事实上, 虽然从有理数的定义我们已知数 $\frac{r_1 + r_2}{2} \in \mathbb{Q}$ 满足上述条件, 然而, 从定理 3 知, 只要取正有理数 $\varepsilon < \frac{|r_1 - r_2|}{2}$, 则由定理 3 中的不等式同样可得到结论 (而不需再用有理数的定义).

注 6 再次强调, 由于现在假定大家只知道“有理数”, 而并不清楚“实数”的确切定义, 因此在上面对“自稠密性”的描述中所涉及的一切“数”均为“有理数” (例如: x, ε 和 x_ε). 当然, 待“数系”得到扩张后 (例如扩张到实数集), “自稠密性”自然也就被进一步地描述 (例如用到的“数”便可选为“实数”).

1.2 实数的定义

首先, 取一水平直线, 在其上任取一点作为“原点”, 并将它与数“0”对应. 在这条直线上原点的右边任取一点, 并将它与“1”对应. 将“0”与“1”之间的线段定为“单位线段”.

其次, 从原点开始, 利用单位线段可在取定的直线上沿着原点右侧逐一标出所有的自然数, 而沿着原点左侧逐一标出所有负整数 (如图 1).

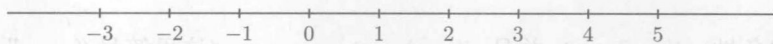


图 1

最后, 通过平均分划则不难在“0”和“1”之间的线段上标出以下点 (此中, 当然有重复的点):

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots;$$

$$\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{n}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+2}, \frac{n}{n+3}, \dots;$$

$$\dots\dots\dots$$

这样一来,就得到了“0”和“1”之间所有有理数在上述直线上所对应的点.因而再通过平移(如图2),便可在直线上标出“全体”有理数所对应的点(这些点称为有理点).

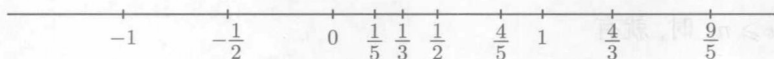


图2

这条直线称为**实轴**(或**数轴**).

显然可以看到,从“0”到“1”的直线段(从而整条直线)是“连续不断”的(换句话说,是“无空隙”的).但是,在其上对应于有理数的点(简称“有理点”)是否就“填满”了整个线段呢?为了回答这一问题,先给出一个“公理”,并以此作为进一步研究的出发点,正如平面几何中的“平行线公理”(过直线外一点必存在唯一一条与已知直线平行的直线)以及前面提到的 Archimedes 公理一样.

公理1(实数的公理化准则一:闭区间套原理) 设 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 内的以有理数 $r_1^{(n)}$ 和 $r_2^{(n)}$ 为端点的“有理闭区间”列(这里的“区间”内仅含有有理数),满足以下两个条件:

$$1^\circ \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_{n-1} \supset \Delta_n \supset \dots;$$

$$2^\circ r_2^{(n)} \geq r_1^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ 且 } (r_2^{(n)} - r_1^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}.$$

那么,在实轴上必存在唯一的点 x ,该点位于 $r_1^{(n)}$ 与 $r_2^{(n)}$ 之间(对于任意的 $n \in \mathbb{N}$).

注1 上面 1° 中的符号“ $\supset$ ”与“ $\subset$ ”分别表示“包含”和“包含于”.于是, $\Delta_{n-1} \supset \Delta_n$ 即是说:对任意的 y , $y \in \Delta_n \implies y \in \Delta_{n-1}$.

注2 在这里,需要补充说明一下上面 2° 中“ $r_2^{(n)} - r_1^{(n)} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时)”的含义,这指的是:对任意小的“有理数” $\varepsilon > 0$,必存在自然数 n_ε ,使得当 $n \geq n_\varepsilon$ 时,均有

$$|r_2^{(n)} - r_1^{(n)}| < \varepsilon,$$

并读作:“当 n 趋于无穷时, $(r_2^{(n)} - r_1^{(n)})$ 趋于0”.

注3 这里强调一下,此处的以 $r_1^{(n)}$ 和 $r_2^{(n)}$ 为端点的“有理闭区间”指的是 $r_1^{(n)}$ 和 $r_2^{(n)}$ 之间的全体“有理数”(包括 $r_1^{(n)}$ 和 $r_2^{(n)}$)所成之集,因此它与我们在中学学过的“区间”不同,在这儿不能将这种“有理闭区间”写成 $[r_1^{(n)}, r_2^{(n)}]$ 的形式,

而只能写为 $[r_1^{(n)}, r_2^{(n)}] \cap \mathbb{Q}$ 的形式 ($\forall n \in \mathbb{N}$). 这里符号 “ $\cap$ ” 代表两个集合的公共部分, 称为 “交”.

注 4 以后, 为了方便起见, 将满足公理 1 中的条件 “有理闭区间套” 称为 “定点区间套”.

例 1 证明: 对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 均有 $\frac{r}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时).

证明 若 $r = 0$, 则命题显然成立. 若 $r \neq 0$, 则对任意小的有理数 $\varepsilon > 0$, 由 1.1 节中公理 1 (Archimedes 公理) 知存在自然数 n_ε , 使得

$$n_\varepsilon > \frac{|r|}{\varepsilon},$$

因此, 当 $n \geq n_\varepsilon$ 时, 就有

$$\left| \frac{r}{n} - 0 \right| \leq \frac{|r|}{n_\varepsilon} < \frac{|r|}{|r|/\varepsilon} = \varepsilon.$$

从而命题得证. $\square$

例 2 对任意 $r \in \mathbb{Q}$, 均有 $\frac{r}{2^n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). (请读者自证.)

为了利用上面的公理 1, 还需要用到有理点的一个特性. 为此, 先给出一个定义:

定义 1 一个集合中的元素如果能与自然数集 $\mathbb{N}$ 按 “一一对应” 的关系排列起来, 则称此集为可列集 (或可数集).

例 3 所有奇数 (或偶数) 的全体所成之集为可数集. 这是因为, 以奇数为例, $\{\pm(2n-1) : n \in \mathbb{N}\}$ 可按如下方式排成一列:

$$1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots$$

引理 1 0 与 1 之间的有理数全体是可列集.

证明 如后面图 3, 按箭头所示, 可将 0 与 1 之间的有理数全体排成一列 (其中有重复), 再将重复的有理数删去, 即可得到本引理的结论. $\square$

注 5 从上面的构造性做法我们可类似地导出: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 也是一个可列集. (请读者自证之)

利用公理 1 和引理 1, 即可得到下面的结论:

定理 1 在位于 “0” 与 “1” 之间的实轴线段上必存在着非有理数的点.

证明 由上面的引理, 可将 “0” 与 “1” 之间的有理数排成如下—列:

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots,$$

其中, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 均有 $r_n \in \mathbb{Q}$. 由 1.1 节中提到的有理数的 “自稠密性” 可知, 存在以两个不同的有理数 a_1, b_1 为端点的 “有理闭区间” $\Delta_1(a_1, b_1)$ 位于 “0” 和 “1”

之间), 使得

$$b_1 - a_1 > 0 \quad \text{且} \quad r_1 \notin \Delta_1.$$

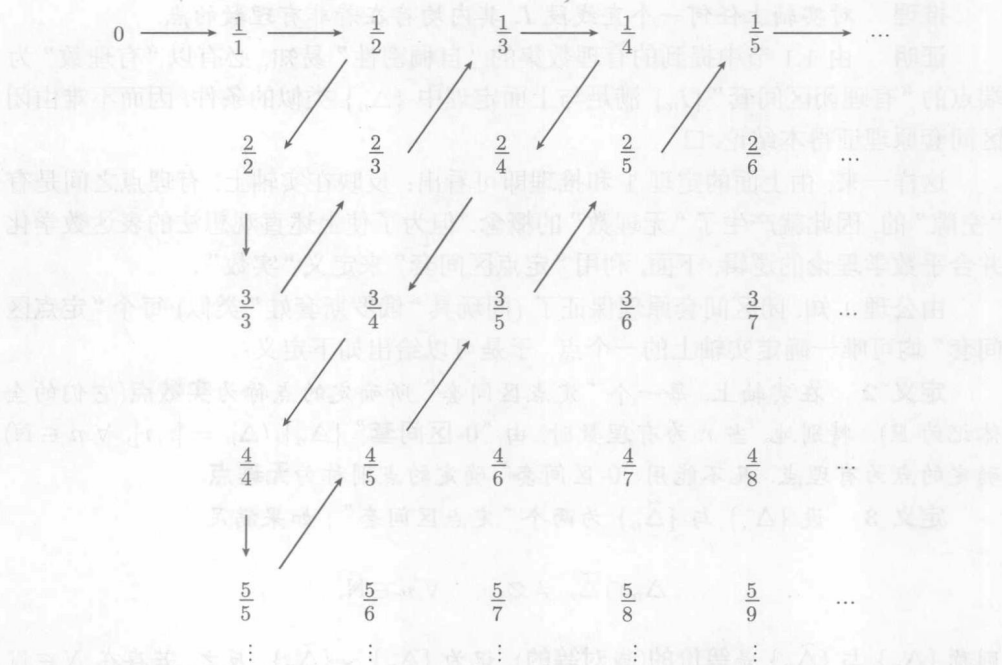


图 3

同样, 存在以不同的两个有理数 a_2, b_2 为端点的“有理闭区间” $\Delta_2 \subset \Delta_1$, 使得

$$0 < b_2 - a_2 < \frac{b_1 - a_1}{2} \quad \text{且} \quad r_2 \notin \Delta_2.$$

一般地, 当以两个不同的有理数 a_{n-1}, b_{n-1} 为端点的“有理闭区间” Δ_{n-1} 已被找到后, 则存在以不同的两个有理数 a_n, b_n 为端点的“有理闭区间” $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$, 使得

$$0 < b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \quad \text{且} \quad r_n \notin \Delta_n, \quad \forall n > 1.$$

再注意到 $\{\Delta_n\}$ 的取法, 我们还可得到: 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 均有

$$r_k \notin \Delta_n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

这样一来, 由前面的例 2 可知 $b_n - a_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 因此, 由公理 1 (闭区间套原理) 则可导出: 存在一点 x , 它位于 a_n 与 b_n 之间 (对任意的 $n \in \mathbb{N}$), 从而也在“0”和“1”之间, 但从上面闭区间套的构造可知

$$x \neq r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

这就说明 x 不是有理点, 从而定理得证. $\square$

推理 对实轴上任何一个直线段 I , 其内均存在着非有理数的点.

证明 由 1.1 节中提到的有理数集的“自稠密性”易知, 必有以“有理数”为端点的“有理闭区间套” $\{I_n\}$ 满足与上面定理中 $\{\Delta_n\}$ 类似的条件, 因而不难由闭区间套原理证得本结论. $\square$

这样一来, 由上面的定理 1 和推理即可看出: 反映在实轴上, 有理点之间是有“空隙”的, 因此就产生了“无理数”的概念. 但为了使上述直观想法的表达数学化并合乎数学理论的逻辑, 下面, 利用“定点区间套”来定义“实数”.

由公理 1 知, 闭区间套原理保证了 (同玩具“俄罗斯套娃”类似) 每个“定点区间套”均可唯一确定实轴上的一个点. 于是可以给出如下定义:

定义 2 在实轴上, 每一个“定点区间套”所确定的点称为实数点 (它们的全体记为 $\mathbb{R}$). 特别地, 当 r 为有理数时, 由“0-区间套” $\{\Delta_n\}$ ($\Delta_n = [r, r], \forall n \in \mathbb{N}$) 确定的点为有理点. 凡不能用“0-区间套”确定的点则称为无理点.

定义 3 设 $\{\Delta_n\}$ 与 $\{\tilde{\Delta}_n\}$ 为两个“定点区间套”, 如果满足

$$\Delta_n \cap \tilde{\Delta}_n \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

则称 $\{\Delta_n\}$ 与 $\{\tilde{\Delta}_n\}$ 是等价的 (或对等的), 记为 $\{\Delta_n\} \sim \{\tilde{\Delta}_n\}$. 反之, 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\Delta_n \cap \tilde{\Delta}_n = \emptyset, \quad \forall n \geq N,$$

则称 $\{\Delta_n\}$ 与 $\{\tilde{\Delta}_n\}$ 是不等价的 (或不对等的).

注 6 由定义 3 不难看出, 等价的“定点区间套”定义了实轴上同一个点. 反之, 同一个点所对应的“定点区间套”也必相互等价.

接下来, 定义 $\mathbb{R}$ 上的运算, 在做这项工作之前, 需要先引入几个引理:

引理 2 若 $\{\Delta_n\}$ 和 $\{\tilde{\Delta}_n\}$ 是“定点区间套”, 则 $\{-\Delta_n\}$, $\{\Delta_n + \tilde{\Delta}_n\}$ 及 $\{\Delta_n \cdot \tilde{\Delta}_n\}$ 均为“定点区间套”, 其中

$$\begin{aligned} -\Delta_n &\triangleq \{-r : r \in \Delta_n\}, \\ \Delta_n + \tilde{\Delta}_n &\triangleq \{r + \tilde{r} : r \in \Delta_n, \tilde{r} \in \tilde{\Delta}_n\}, \\ \Delta_n \cdot \tilde{\Delta}_n &\triangleq \{r \cdot \tilde{r} : r \in \Delta_n, \tilde{r} \in \tilde{\Delta}_n\}, \end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明 下面仅对 $\{\Delta_n + \tilde{\Delta}_n\}$ 和 $\{\Delta_n \cdot \tilde{\Delta}_n\}$ 给出证明, 而将 $\{-\Delta_n\}$ 的证明留给读者.