大学物理函授教材

电动力学

王宗田　主编

东北师范大学出版社

大学物理函授教材

电动力学

王宗田　主编

东北师范大学出版社

电　动　力　学

DIANDONG LIXUE

王宗田　主编

责任编辑：于荣海　封面设计：木　水　　责任校对：陈　江

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街 110 号）　　长春市第四印刷厂制版
（邮政编码：130024）　　长春市第四印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1990 年 4 月第 1 版
印张：14.75　　1990 年 4 月第 1 次印刷
字数：383 千　　印数：0001 — 1 200 册

ISBN 7-5602-0430-9/ O · 47　（压膜）定价：3.50 元

编 者 的 话

本书根据中学教师进修高等师范本科物理专业《电动力学教学大纲》，在总结多年来电动力学函授教学经验以及教改实践的基础上编写而成的。

全书系统地介绍了宏观电动力学的基本理论。在编写过程中，我们充分考虑到函授教学的特点和如何用电动力学的理论分析、解决普通物理和中学物理中有关的问题，突出讲清物理思想、基本概念和处理问题的思想方法，把物理内容与数学工具的运用，恰如其分地结合起来，力求重点明确，语言精练。

为了便于学员自学和很好地消化、理解各章节的主要内容，掌握住基本概念，每章开头有内容概述，末尾有小结；每节都有简短的提要内容，并配有思考问题。书中有丰富的典型例题；重要定理、定律的数学表达式有详尽的推演过程。每章之后的习题，能帮助学员加深理解全章内容，多数计算题都有答案，以供参考。

书中有*号的内容，可根据教学实际情况适当选学。本书既可作高等师范院校物理专业的函授教材，也可用作大学本科及专科《电动力学》课程的教材或参考书。

本书由王宗田主编，并编写导言及第二、三、四章；李祥生编写第一、五章；陈文同编写第六章。全书由王宗田统稿并绘制书中全部插图。丁明新教授细致地审阅了全部书稿，并提出了非常宝贵的意见，在此我们表示诚挚的谢意。

由于编者的水平及编写时间所限，书中肯定还有疏漏或不当之处，敬请使用此书的教师和学员给予批评指正。

编　者

1989年11月于长春

目　录

导　言

电磁场是一种客观存在的物质，它有其自身的运动和变化规律，并与带电物质发生相互作用。电动力学是在电磁学的基础上，进一步系统地研究电磁场的基本属性、运动规律以及它和带电物质之间的相互作用的学科。

电动力学并不是在短期内建立起来的，而是人类对电磁现象长期观察、实验和不断从事的生产实践活动的基础上逐步发展起来的。13世纪以前，人们对电与磁的认识，还只是停留在孤立地观察电作用和磁作用的现象上。到了16世纪，人们才真正开始了对电磁现象进行研究。但研究方法较为原始，基本上属于对宏观电磁现象做定性总结。18世纪中期以后，资本主义在欧洲得到巩固和发展，生产由手工业向机器工业过渡，在工业生产发展推动下，为电磁学的研究提出了急需解决的新课题，也提供了较好的实验设备和其它的物质条件，使电磁学得到了较快的发展。1785年，库仑利用精巧的扭秤，对带电体之间的相互作用作了定量测量，建立了库仑定律，开创了用近代的研究方法研究电磁现象的途径，从而使电磁学的研究进入从定性到定量的新阶段。人们较为系统地研究了静电、静磁和电流等现象，总结出一些实验定律。然而，电磁学的重大进展还是在人们认识到电现象与磁现象之间深刻的内在联系之后。1820年奥斯特在实验中发现了电流的磁效应；同年，安培提出了物质磁性的分子电流假说，他还把精巧的实验和高超的数学技巧结合起来，总结出著名的电流元之间的相互作用规律——安培定律。1831年，法拉第在实验中发现了电磁感应现象，总结出电磁感应定律，并提出场的思想。至此，电现象和磁现象作为矛盾的统一体开始被人们所认识；描述电磁现象

的基本实验定律已全部建立，从理论上总结电磁场普遍规律的条件已经成熟。1864年，麦克斯韦把已建立起来的实验定律推广到普遍情况，提出“涡旋电场”和“位移电流”两个假设，总结出描述电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程组，并从理论上预言了电磁波的存在。完整而系统的电磁场理论，使人们对电磁规律的认识豁然开朗。

1888年赫兹在实验中发现了电磁波，证实了麦克斯韦电磁场理论的正确性。人们在理论的指引下，通过进一步的实践，发明了无线电收发报机。直到今天，无线电技术已在生产和科学实验中，乃至日常生活之中得到了广泛的应用，同时也丰富了电磁场理论，这是物理学发展史上从实践上升为理论，再用理论指导实践的光辉典范。

麦克斯韦方程组建立之后，经典电动力学的基本理论已达到完整境地，但在发展过程中，人们发现经典力学的时空观和电磁现象新的实验事实又发生了矛盾。矛盾的解决导致新时空观的诞生。1905年爱因斯坦提出的狭义相对论就是关于新时空观的理论。电动力学也只有在新时空观的基础上才成为更加完整、适用于任何惯性系的理论。狭义相对论是现代物理学的重要基础理论之一，对物理学的发展有着深远的影响。

本世纪20年代量子力学诞生了。现代生产对认识物质微观结构提出了迫切要求，人们深入研究电磁场的微观性质，使得电动力学与量子理论结合起来，发展成为量子电动力学。随着科学技术的发展，生产实践对物质材料的电磁性能不断提出的新要求，使电动力学不断面临新的研究课题，推动了电动力学理论的发展。现在，电磁场已成为人们了解得比较深刻的物质存在的形态，电磁作用是物质的基本相互作用之一，电磁场理论是一门应用非常广泛的学科。但是，人们对电磁场的认识在不断深入，已发现的定律，建立起的理论，仅是在一定的范围和条件下起作用的相对真理，是整个认识过程中的一个阶段，在新的实践活动中还将继

续推进这门学科的不断发展。

电动力学是物理系学生与函授学员必修的基础理论课程，学习这门课程的目的是：（1）掌握电磁场的基本规律，加深对电磁场性质的理解，了解狭义相对论的时空观及有关的基本理论和概念；（2）学会用电动力学方法分析和处理电磁学中一些最基本的问题，为以后解决实际问题奠定基础；（3）电动力学的发展同唯物主义与唯心主义、辩证法与形而上学的斗争分不开。通过学习，进一步培养学员的辩证唯物主义世界观。

本书主要讲述宏观电磁场的基本理论。在编写过程中，我们本着由浅入深、循序渐进的原则安排内容，全书共分六章。为了减轻函授学员学习本课程中可能遇到的数学方面的困难，第一章安排了矢量分析及张量运算内容。第二章讨论静电场的性质、理论和处理问题的基本方法；第三章重点阐明稳恒电流磁场的基本性质和规律；第四章论述电磁现象的普遍规律和电磁场的物质性；第五章讨论电磁波在介质和导体中的传播以及电磁波的辐射等问题；最后一章讲述狭义相对论的基本原理，重点研究相对论的时空理论，并介绍相对论运动学、相对论力学和相对论电动力学的基本内容。

第一章 矢量分析及张量运算

矢量分析及张量运算是学习电动力学必备的教学工具，读者一定要在掌握这些数学知识的基础上再学习电动力学，否则，在学习过程中必将遇到许多困难。

物理规律常用数学方程式表示，把方程式写成矢量形式是非常方便的。它简练，运算简便，物理意义明显，并且与坐标系的选择无关，我们选择其中最基础最常用的内容，加以概括的叙述。

本章主要是复习矢量代数基本公式，讨论标量场的梯度，矢量场的散度和旋度，以及矢量微分算符的二阶微分、乘积的微分、亥姆霍兹定理、曲线坐标，并对张量作初步介绍。本章的重点是深刻理解物理场的梯度、散度和旋度的概念及高斯定理和斯托克斯定理的含义，熟练掌握矢量分析的基本公式及运算方法。

§1.1 矢 量 代 数

在科学、技术和生产实践中，往往要考虑某种物理量在空间的分布和变化规律。为了探索和揭示这些规律，数学上引进了场的概念。

物理上的场是指某一物理量在空间的分布，即物理量在某空间中每一点都有确定的值，则称此空间为物理场。

数学上的场是所有物理场的科学抽象。若构成场的物理量用标量函数描述，称该场为标量场。其全部空间或部分空间中的各点存在着一个标量，它的数值是空间位置的函数$\varphi(x, y, z)$。如压力场、温度场、浓度场和势场（引力势、电势）。若构成场的物理量用矢量函数描述，称该场为矢量场。其全空间或部分

空间各点存在着一个矢量，它的大小和方向是空间位置的函数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$。如速度场、引力场、电场和磁场等等。

在直角坐标系中，若 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 分别为 x、y、z 三个坐标轴的单位矢量，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.1}$$

式中 A_x，A_y，A_z 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 分别在 x，y，z 轴的分量，显然，一个矢量场对应三个标量场。$\boldsymbol{A}$ 的数值为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1.1.2}$$

一、标　积

两个矢量的标积是一个标量，它是由第一个矢量的数值乘以第二个矢量的数值，再乘以这两个矢量间的夹角余弦而定义的，即

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\alpha \tag{1.1.3}$$

式中 α 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。

从两个矢量标积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1 \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1 \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1 \tag{1.1.4}$$

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0 \quad \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0 \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0 \tag{1.1.5}$$

因此，可以得到标积的另一种定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z) \cdot (B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

二、矢　积

两个矢量的矢积或称叉乘是一个矢量，它的方向与原来的两个矢量所在的平面垂直，它的数值是这两个矢量的数值的乘积再乘以两矢量间夹角的正弦。矢积的记法如下：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \tag{1.1.7}$$

式中矢量 $\boldsymbol{C}$ 的数值为

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB\sin\alpha \tag{1.1.8}$$

式中α是两矢量间的夹角。矢量$\boldsymbol{C}$的方向由右旋系规则给出，如果把第一个矢量$\boldsymbol{A}$顺着较小的夹角转向第二个矢量$\boldsymbol{B}$的方向，那么，矢量$\boldsymbol{C}$的方向就是的右螺旋前进的方向。

从矢积的定义可知

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=0\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y=0\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=0 \tag{1.1.9}$$

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y \tag{1.1.10}$$

如果将$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的矢积用它们的分量表示，可以得到矢积的另一种定义，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z)\times(B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z)\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y\\&\quad+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

三、三重积

三个矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$的标积和矢积，可得到形如$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$等有实际意义的结果。这里我们只讨论常用的三重标积和三重矢积。

1. 三重标积

三重积$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$有时称为三重标积或称混合积，它的结果是以矢量$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$为边的平行六面体的体积，如图1-1所示。图中$\boldsymbol{n}$是以$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$为边的平行四边形的法向单位矢量，其方向与$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$的方向相同，设矢量$\boldsymbol{A}$的终点在平行四边形之上的高度为$h$，得

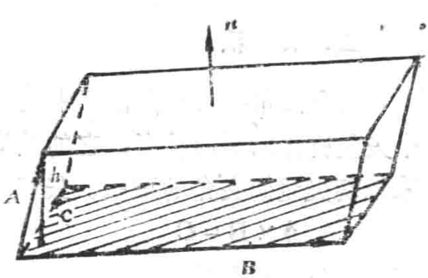

图 1-1

平行六面体的体积 = 高度h × 平行四边形的面积

$$= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})(|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|) = \boldsymbol{A}\cdot(|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|)\boldsymbol{n}$$

$$= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{1.1.12}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.1.13}$$

应用交换行列式的两行则行列式变号的定理，可以证明三重标积有

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1.14}$$

这个公式可以用$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$三个矢量按顺时针轮换法记忆，即

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{A} \arrow[dr, bend left] & \\ \boldsymbol{C} \arrow[ur, bend left] & & \boldsymbol{B} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

对于 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 是 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$，同理可得 $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$。

2。三重矢积

乘积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 称为三重矢积，下面证明常用的三重矢积计算公式。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z - B_zC_y & B_zC_x - B_xC_z & B_xC_y - B_yC_x \end{vmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.15}$$

三重矢积等于两项的差，第一项为（$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$）中第一个矢量$\boldsymbol{B}$与其余两矢量标积（$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$）的乘积，第二项为（$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$）中第二个矢量$\boldsymbol{C}$与其余两矢量标积（$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$）的乘积。

§1.2 标量场的梯度

研究物理场随空间位置的变化规律，要用到空间各点上的场量对空间的变化率。如标量场要用场的梯度，矢量场要用场的散度和旋度等。

一、方向导数

标量场的方向导数表示标量场沿某个规定方向的变化率。如图 1-2所示，单位矢量$\boldsymbol{l}_0$表示空间规定方向，点P_0为这个方向上的任意一点，P为同一方向线上邻近P_0的一点，Δl为P_0与P距离。则标量场φ在点P_0沿这个方向的导数被定义为

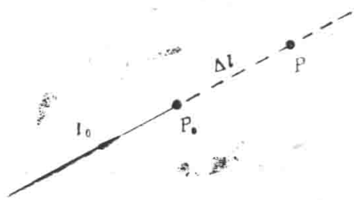

图 1-2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi_P-\varphi_{P_0}}{\Delta l} \tag{1.2.1}$$

当$\frac{\partial\varphi}{\partial l}>0$时，$\varphi$沿$\boldsymbol{l}_0$方向增加；当$\frac{\partial\varphi}{\partial l}<0$时，$\varphi$沿$\boldsymbol{l}_0$方向减小。

由于从场中的某一点出发，可以有无限多个方向，因此标量场φ在该点的方向导数也有无限多个。然而在实际问题中，我们最关心的是标量场φ沿哪个方向的变化率最大，这个最大的变化率是多少，它与任一方向的方向导数间有什么关系？为此，需要引入标量场的梯度。

二、标量场的梯度

在静电场中，电势是标量场，电势相等点构成的面称为等势面，点电荷的等势面是以电荷所在点为中心的同心球面。一般地说，标量场φ中具有相同数值的点构成的曲面为$\varphi(x,y,z)=C$，其中C是常数。满足这个关系式的曲面叫标量场$\varphi(x, y, z)$的等值面。不同的常数C，形成不同的等值面。图1-3中，画出了一组等值面$\varphi_0-\Delta\varphi$，φ_0，$\varphi_0+\Delta\varphi$。设$\boldsymbol{n}$是等值面φ_0上一点P_0处法线方向的单位矢量，并且它指向φ的增加方向。而$\boldsymbol{l}$是过P_0点的任意方向线，$\boldsymbol{l}_0$是该方向线的单位矢量。当$\Delta\varphi$很小，即两等势面无限靠近时，$\angle P_l P_n P_0$趋近90°，$\triangle P_l P_n P_0$趋近直角三角形，则

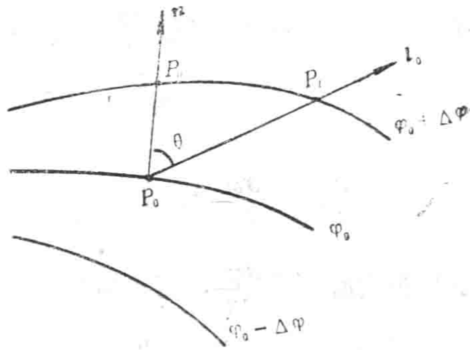

图 1-3

$$\frac{P_0P_n}{P_0P_l}=\cos\theta$$

由于 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{P_0P_l\to 0}\frac{\varphi_{P_l}-\varphi_0}{P_0P_l}=\lim_{P_0P_l\to 0}\frac{\varphi_{P_0}-\varphi_0}{P_0P_n}\frac{P_0P_n}{P_0P_l}$$

$$=\lim_{P_0P_l\to 0}\frac{\varphi_{P_l}-\varphi_0}{P_0P_n}\cos\theta$$

又因为$\varphi_{P_l}=\varphi_{P_n}$，所以

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim_{P_0P_n\to 0}\frac{\varphi_{P_n}-\varphi_0}{P_0P_n}\cos\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta$$

即 $$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta \tag{1.2.2}$$

如果$\boldsymbol{l}_0 \nparallel \boldsymbol{n}$，则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} > \frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

由此可见，φ的方向导数中，沿等值面法线方向的方向导数最大，即标量场φ沿等值面的法线方向有最大变化率。

由（1.2.2）式可知，只要我们知道了标量场内某一点沿等值面法线方向的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，就可以求出该点沿任意方向的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$。$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$可看作矢量$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}$在$\boldsymbol{l}_0$方向上的投影，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta \tag{1.2.3}$$

我们把数值等于$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，而方向与$\boldsymbol{n}$相同的矢量称为标量场$\varphi$的梯度，用符号grad$\varphi$表示，即

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{1.2.4}$$

在确定了标量场φ在给定点上的梯度$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}$以后，就可按$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \mathrm{grad}_l\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta$方便地求出$\varphi$在该点沿任一方向的变化率。

总起来说，一个标量场的梯度具有下列性质：

（1）标量场φ的梯度gradφ是个矢量场；

（2）gradφ在空间任意点的值，为标量场φ在该点最大方向导数的数值，即该点的最大的空间变化率；

（3）gradφ在空间任意点的方向，是标量场φ在该点具有最大方向导数的方向，并且指向标量场φ增加的方向；

（4）标量场φ沿任意方向的方向导数等于gradφ在该方向的投影。