

国家自然科学基金资助项目 (项目号: 61105127、71171079)

多种约束项目网络 机动时间特性理论及其应用

李星梅 张倩 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

国家自然科学基金资助项目（项目号：61105127、71171079）

多种约束项目网络 机动时间特性理论及其应用

李星梅 张倩 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书主要研究了以下内容：第一，介绍了项目网络机动时间基本概念及其概念之间的基本关系；第二，给出了机动时间与网络的关联规律；第三，对机动时间概念在传统网络计划中的应用进行了分析；第四，提出了庞大网络的分层理论，给出了大型网络机动时间的求解方法；第五，对于资源受限的网络优化问题给出了优化策略和优化结果；第六，对具有时间转换约束的项目网络的机动时间特性给出了相应的理论结果。

本书可供研究工程项目管理的有关学术界人士，高校相关专业学生，企事业单位相关人员等阅读。

图书在版编目（C I P）数据

多种约束项目网络机动时间特性理论及其应用 / 李星梅, 张倩著. — 北京 : 中国水利水电出版社, 2014. 1
ISBN 978-7-5170-1741-7

I. ①多… II. ①李… ②张… III. ①网络计划技术—时间学 IV. ①C935

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第024196号

书 名	多种约束项目网络机动时间特性理论及其应用
作 者	李星梅 张倩 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	三河市鑫金马印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 7.5印张 178千字
版 次	2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
印 数	0001—1000册
定 价	38.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言



传统的项目网络通常指经典的关键路线法（CPM）网络。项目网络分析有两个任务：一是寻找关键路线，二是分析活动机动时间。在传统项目网络中，一方面，关键路线的长度即为项目工期，关键路线上活动（关键活动）的延期将拖延整个项目的工期，通过严格控制关键活动的执行来确保整个项目进度计划满足要求；另一方面，关键活动具有零机动时间，非关键活动的机动时间表明了在不影响项目工期前提下实施项目的灵活程度。那些具有更多机动时间的活动表明了这些活动的执行有更大的调整空间。但是，在实际的项目工程实践中，项目的网络管理不仅仅是对紧前与紧后工序机动时间的确定，而是由许多不确定的因素组成的庞大网络系统。因此，传统的项目网络已经无法解决目前复杂多变的网络系统。

具有多种约束的项目网络正是对传统项目网络的改进和完善。具有多种约束的项目网络是指在传统项目网络的基础上加入其他约束（如时间约束、资源限制等）后的项目网络。以往的项目网络对实际项目有3个假设：①假设在项目网络中，当所有的紧前工序完成以后，当前工序能够马上开始；②假设项目中资源是无限的，即网络中工序的执行忽略了资源的稀缺性；③在项目的执行过程中假设每一个工序的工作效率都是固定不变的，即人在活动中不受客观因素的影响。但是在实际的工程项目中发现，许多工序要受到开始时间的约束，不能够马上开始。很多项目由于预算的限制，对网络中资源的分配遵照优先考虑关键工序的原则，且如何进行资源的合理分配是项目管理的难点问题。同时，由于活动主体——人在工作过程中具有学习效应，即随着时间的推移人由对活动的生疏逐渐过渡到能够熟练完成活动，在这个过程中工作效率也有了很大的提高。具有多种约束的项目网络针对这些情况在传统的项目网络基础上加入了新的约束条件，使网络计划能更清晰地反映工程项目的实践活动。

本书是作者多年研究成果的汇总。作者从2003年攻读博士学位开始一直与课题组对项目管理与网络计划的理论和方法进行研究。10年来作者在项目有效管理及行为管理领域有了新的突破，并于2012年8月～2013年8月在美国北卡罗来纳州立大学进行为期1年的访问。在访问期间，作者整理了自己这

几年的研究成果，并与北卡罗来纳州立大学的学友对研究成果进行了完善。本书正是作者在访问期间所完成的，本书的创新之处主要体现在以下几方面。

(1) 研究分层网络机动时间的计算公式。本书依据大型网络构建的过程提出简化组合模型，将多层次的复杂网络转化为多个单层网络，并提出了分层网络机动时间的计算公式。

(2) 研究将两个可分解平行工序调整为顺序工序的优化策略。本书在考虑机动时间和工序任意可分解的基础上，对于已有的将任意两个可分解的平行工序调整为顺序工序的优化方法进行了改进和分析，进而建立了将两个可分解的平行工序调整为顺序工序的最小亏值模型，并对其进行了理论证明。此外，针对从 n 个可分解平行工序中选取一个与指定工序调整为顺序工序的优化问题进行了研究，在已给最小亏值模型的基础上设计出了优化算法，越是大型网络，该方法的优越性越明显。

(3) 研究平行序链的顺序优化决策。本书从网络本身的规律出发，在机动时间特性的基础上，利用路长定理设计出了三个、四个平行序链的顺序优化算法，并给出了可靠、有效的删减路长的计算方法。

(4) 研究具有时间转化约束的项目网络特性。本书提出在时间转换约束模型下，工序持续时间的转换公式，在这个基础上得出具有时间转化约束网络的总时差、自由时差、安全时差的计算公式。同时针对具有时间转换约束的项目网络，利用此模型中某一工序开始时间的延误对其紧后工序及后继工序的影响，引出时间转换约束模型的传递性问题，最后提出传递量的计算公式。

(5) 本书在前人研究的基础上，考虑了人的行为因素对具有时间转换约束网络的影响，给出了在人的行为和时间转换约束双重作用下的机动时间的计算公式，进而给出工序持续时间的计算公式，并在此基础上建立了网络关键线路的变化模型。最后，通过实例验证了该模型的有效性和合理性。

本书共分为 7 章。第 1 章介绍了机动时间的国内外研究现状。第 2 章和第 3 章属于该问题研究的基础理论部分，其中第 2 章给出了基本概念及概念之间的相互关系。第 3 章给出了机动时间与网络的关联规律。第 4 章在前两章的基础上，给出了机动时间概念在传统网络计划中的应用。针对如何处理大型网络，第 5 章给出了大型网络的分层理论。由于资源的有限性，在前几章机动时间特性研究的基础上，第 6 章对资源受限的网络优化问题给出了优化策略和优化结果。第 7 章对具有时间转换约束的项目网络的机动时间特性给出了相应的理论结果。

在本书即将出版之际，首先感谢美国北卡罗来纳州立大学的方述诚教授和华北电力大学的博士生导师乞建勋教授提供的许多非常宝贵的学术指导和研究条件。本书很多研究都是在乞建勋教授的研究基础上进行的。其次，特别感谢北京邮电大学的赵新超博士，最后一章的研究工作赵老师也参与其中，并作了卓有成效的贡献，同时，该研究工作也得到了赵新超博士主持的国家自然科学基金的支持。特别值得一提的是，作者还要感谢博士生宋艺航，第7章的成稿有他的汗水，这部分内容最早来自他的本科毕业论文。本书很多内容是李星梅老师从读博士以来研究工作的一个汇总，其研究生张倩帮助进行了总结，占用了她大量的宝贵时间，同时，李星梅老师与张倩共同的研究工作也被收纳到本书中。研究生张嵩完成了书中文献的整理和校对工作。最后，作者也要特别感谢课题组的所有成员，如张立辉博士及研究生王强、苏志雄、阚芝楠、邹鑫、易红梅、王佳、王晶、魏涵静、赵鹿等，他们都直接或者间接地为本书作出了贡献。感谢国家自然科学基金委员会对本书出版的支持。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请专家学者批评指正。

作者

2013年12月

于北京

前言

第 1 章 机动时间的国内外研究现状	1
第 2 章 项目网络机动时间概述	4
2.1 时间参数	4
2.2 机动时间概念	6
2.3 工序机动时间之间的关系	9
2.4 本章小结	18
第 3 章 机动时间与网络的关联规律	19
3.1 机动时间与路长之间的关联规律	19
3.2 机动时间对于网络的依赖性	28
3.3 本章小结	39
第 4 章 机动时间特性在网络计划中的应用	40
4.1 基于时差分析的资源均衡问题	40
4.2 基于机动时间的项目工期单因素不确定性分析	44
4.3 基于机动时间的单工序对于平行工序数量敏感性分析	49
4.4 本章小结	54
第 5 章 大型网络的分层理论	56
5.1 网络的简化组合模型	56
5.2 分层网络时间参数计算	58
5.3 分层网络机动时间计算	59
5.4 本章小结	64
第 6 章 具有资源限制的项目网络优化研究	65
6.1 基于机动时间的可分解平行工序顺序优化研究	65
6.2 三个平行序链的顺序优化决策	72
6.3 四个平行序链的顺序优化决策	77
6.4 本章小结	84
第 7 章 具有时间转换约束的项目网络研究	85
7.1 具有时间转换项目网络的时差分析	85

7.2 对具有时间转换约束网络模型的特性研究 89

7.3 基于学习效应及时间转换约束双重作用下的项目网络模型研究 95

7.4 本章小结 100

参考文献 102

第 1 章 机动时间的国内外研究现状

项目网络计划技术是 20 世纪 50 年代末发展起来的一种编制大型工程进度计划的有效方法。20 世纪 60 年代初期,著名数学家华罗庚教授将网络计划方法引入我国,并于 1965 年编撰出版了《统筹方法平话》一书,该成果奠定了国内网络计划技术研究的基础。

众所周知,网络计划技术包含一种非常重要的方法——关键路线法(Critical Path Method, CPM)。关键路线法的最大创新和贡献之一是首次科学地计算出各工序的机动时间,进而找出工程的主要矛盾环节——关键工序,促使计划管理在发展上取得了革命性的突破。但是通过各类文献综合来看,在很长一段时间内,甚至到目前为止,机动时间虽然在使用上受到了高度重视,但在对它的理论研究上还存在较大空缺,至今没有形成系统的理论体系。人们只是重点对机动时间的概念和关键工序的重要性指标等方面进行了一些研究。

人们普遍认为关键工序决定项目进程,且是项目总工期得以确保的决定性因素。只要关键工序推迟一天,总工期必将推迟一天,因此关键工序引起了项目管理者们的极大关注。关键工序是指位于关键路线上的工序,而关键路线是从开始节点到终止节点的最长路线。对关键路线和关键工序的研究伴随着 CPM 网络计划的产生而发展起来。目前,国内外大量文献都集中在通过关键路线来研究关键工序的相对重要性上。

在 CPM 网络中,Elmaghraby (2000) 给出了关键工序相对重要性的判别方式,认为同时位于较多条关键路线上的工序比同时位于较少条关键路线上的工序重要,据此,把关键工序按照它们的重要性分级。在 PERT 网络中,鉴于工序工期的随机性,不能继续沿用 CPM 网络中判别工序相对重要性的方式,为此,分别构建了路线和工序的关键性指标。其中,工序关键性指标的计算步骤为:①计算所有路线的关键性指标;②找到包含目标工序的所有路线;③对这些路线的关键性指标作和。尽管这三步看起来简单明了,但是在实践中对于工序关键性指标的计算还是相当困难的。常用的两种方法是分析法和蒙特卡洛法。分析法是 Martin (1965) 提出的,该方法是在工序的累积分布函数是多项式时间函数的基础上建立的;Dodin 和 Elmaghraby (1985) 对 Martin 的方法进行了改进,不用列举所有路线就可以估计所有工序的关键性指标;Dodin (1980) 给出了 k 阶关键路线的鉴别方式;Kulkarni 和 Adlakha (1986) 开发了一套分析程序去估计蒙特卡洛工序网络中路线的关键性指标;Bowman 和 Muckstadt (1993) 提供了一种递归方法直接计算工序的关键性指标,而不用列举所有路线以及计算路线的关键性指标。蒙特卡洛法是指 Van Slyke (1963) 用蒙特卡洛样本的方法给出工序关键性指标的估计方法;Sigal 等人 (1979) 通过一个有条件的蒙特卡洛程序来估计路线的关键性指标;Bowman (1995) 把标准的蒙特卡洛样本与精确分析相结合来估计工序和路线的关键性指标。此外,William (1992) 通过引入重要性指标(SI)和风险指标(CRI)来判别工序的相对重要性,并且



Elmaghraby、Gutierrez 和 Paul、Cho 和 Yum 在 William 的研究工作基础上又继续做了一些突出的工作。

可见,当前无论是 CPM 网络还是 PERT 网络,研究关键工序对于项目总工期的影响都是建立在路线基础上的。事实上,在 CPM 网络中,工序和总工期的关系、工序和路线路长的关系、工序和工序之间的关系可以通过机动时间更为有效方便地表示出来。

工序的机动时间(时差)反映了工序与其他工序的联系以及该工序在整体中的地位,因而,它是一个综合性指标。Elmaghraby (1995) 曾经说过,对于工程项目经理来说,他们最关心两个问题:一个是资源分配,另一个是工序排序。在这两个问题中,机动时间都起着不可替代的作用。在工程项目施工过程中,考虑在不推迟总工期的条件下每个工序所拥有的空闲时间 (Idle Time),机动时间就作为其衡量尺度。服从紧前约束的最优资源分配问题和工序排序问题,众所周知是 NP-hard 问题。针对这两类问题,目前所使用的解决方法几乎都是启发式算法。差不多所有的启发式算法都依靠机动时间来判断目标工序的重要程度。因此,对机动时间研究的重要性是显而易见的。

在分析计划网络的过程中有两个任务:一是寻找关键路线,二是分析每个工序的机动时间。在传统计划网络中,一方面,关键路线的长度即为项目总工期,关键路线上工序的延期将会拖延整个项目的总工期。项目经理通过严格控制关键工序的实施来确保整个项目进度计划满足要求;另一方面,关键工序具有零机动时间,非关键工序的机动时间表明了在不影响项目总工期前提下所具有的灵活程度。那些具有更多机动时间的工序表明了这些工序在实施上有更大的调整空间,所以,项目经理可以在必要的时候将资源从这些非关键工序转移到关键工序的实施中去。机动时间成为项目实施中资源分配和工序安排的重要依据。

针对项目工程实践的需要,人们从不同的角度提出了各种具有不同特点的机动时间概念。Battersby (1967) 和 Thomas (1969) 提出了总时差、安全时差、自由时差和干扰时差概念。Elmaghraby (1977) 提出了节点时差概念,并对这些时差进行了分析和陈述。以上基本概念是目前人们广泛使用的,它们能够体现出机动时间的一些特性,但是没有反映出工序机动时间相互之间的关联规律。也有一些学者研究了机动时间对计划网络的依赖性,但这只是网络特性研究的一些前期工作。

通常所说的机动时间特性包括机动时间的动态特性和静态特性。目前,对于机动时间特性的研究主要集中在它的动态特性上。

对于机动时间动态特性的研究起源于 20 世纪 60 年代。在 CPM 网络中,关键工序工期的推迟必会引起总工期的推迟,该推迟量可通过 CPM 网络技术求得;但很多时候非关键工序工期的推迟也会引起总工期的推迟,并且该现象的出现往往不是因为非关键工序的工期推迟量超出了机动时间的范围,而仅仅是因为它使用了部分机动时间,其本质原因是工序使用机动时间可能会影响它后继工序的机动时间,进而增加了后继工序影响总工期的风险。一个或多个非关键工序使用机动时间导致总工期推迟或者导致这些工序的后继工序机动时间减少的现象,都属于机动时间动态特性的研究范畴。

MacCrimmon 和 Ryavec (1964) 研究了 CPM 网络中次关键路线 (Near - Critical Paths) 上工序工期的推迟导致总工期推迟的现象,研究结果显示,若用单纯的 CPM 研



究将非关键工序的工期不确定性与总工期相关联的技术,可能导致总工期出现偏差。事实上,当非关键工序的工期延长时,项目总工期就有可能长于原先的估计值。为了纠正这种偏差,以下几种技术被引入:由 Clark (1961) 发展的分析模型;由 Van Slyke (1963) 发展的蒙特卡洛仿真模型以及由 Ang 等人 (1975) 进一步发展的分析模型。然而,所有这些早期研究都集中在对网络从前往后的顺序计算 (Forward - Pass Calculation) 上,而机动时间的使用并没有被作为项目总工期的主要影响因素。在早期的研究中,虽有文献显示已有学者考虑到使用机动时间会影响总工期,但是对该方面的研究十分有限,主要包括:次关键工序如果使用了自身一定数量的机动时间,就有可能变为关键工序;其他非关键工序通过使用一定数量的机动时间有可能变成次关键工序,甚至关键工序等。Gong (1995) 把非关键工序使用机动时间对总工期的影响问题称作关联影响问题 (Combined Influence Problem)。Gong (1995) 在上述研究的基础上进行了更加深入的研究,包括总工期的推迟分析,各非关键工序的时差使用范围分析,以及通过各非关键工序的时差使用范围来研究总工期的推迟等。Gong 和 Hugsted (1993) 把这种从后往前求各非关键工序机动时间的逆序方法称为 BFUE (Back - Forward Uncertainty Estimation)。Gong 和 James (1995) 利用 BFUE 技术给出各非关键工序机动时间的安全使用量,能够使得总工期不会因工序使用机动时间而受到影响。Gong (1997) 在研究中发现即使各工序的机动时间使用量都在安全范围内,虽没有引起总工期的推迟,但可能导致费用超过预算,由此他提出了用于计算各非关键工序机动时间使用量的方法,既考虑了项目总工期推迟的风险,又考虑了项目费用超过预算的风险。所有这些研究的局限性主要表现在只考虑了非关键工序使用机动时间对总工期的影响,而并没有考虑对它的前、后继工序机动时间的影响。由于现实中项目总工期推迟这一现象经常发生,因此,还有许多研究者和项目经理们致力于推迟分析 (Delay Analysis) 的研究。

本书在分析机动时间概念、概念之间的相互关系、机动时间与网络之间关系的基础上,首先分析了机动时间特性在无约束网络计划中的应用。特别在实际中项目的规模通常是非常大的,对于大型复杂网络,本书也研究了其机动时间的特性。对于具有资源限制的项目网络,本书在机动时间特性的基础上给出了优化策略。特别是针对有时间转换约束的项目网络,本书给出了其机动时间特性分析。

第 2 章 项目网络机动时间概述

2.1 时间参数

运用 CPM 网络计划可以得到“最早”和“最迟”的时间概念，我们在这里首先推算出节点的两个时间参数，分别是节点的最早开始时间和最迟结束时间；然后在这两个节点时间参数的基础上，推算出工序的四个时间参数，分别是工序的最早开始时间、最早结束时间、最迟开始时间和最迟结束时间。利用这些时间参数，第一次能够科学地计算出各工序的机动时间，并由此促进了后来项目管理长时期的飞速发展。网络时间的计算是编制和控制计划的基础。人们感兴趣的往往是通过计算网络时间，确定网络图中从源点到汇点之间的最长路线，即关键路线，以及该路线上的工序和节点，即关键工序和关键节点。确定关键路线需要考虑网络中的所有工序。为此，必须对每项工序都赋予时间参数。

2.1.1 节点时间参数概念

本书是在 CPM 双代号网络图的基础上研究机动时间及其特性。双代号网络图的特点是用箭线表示工序，用节点表示工序的起始和结束，也称作事件。在 CPM 双代号网络图中，节点本身不占用时间，它只是表示某个工序应在某一时刻开始或结束的时间点。节点的时间参数有两个：①节点的最早开始时间；②节点的最迟结束时间。

2.1.1.1 节点的最早开始时间

节点的最早开始时间是指从某节点（ i ）开始的各项工序最早可能开始工作的时间，用 ES_i 表示。在此时间之前，以节点（ i ）为开始节点的各项工序都不具备开始工作的条件。计算各个节点的最早开始时间应从网络源点开始，自左向右，顺箭线方向逐个计算，直至网络汇点。网络汇点因无后继工序，所以它的最早开始时间也就是它的最迟结束时间。网络源点，即网络第一个节点，其最早开始时间一般为零。工序的箭尾节点是其开始节点，箭头节点是其结束节点。

任意节点的最早开始时间，是由该节点的紧前节点的最早开始时间加上这两个节点之间工序的工期决定的；若该节点有多个紧前节点，选择这些紧前节点的最早开始时间加上与该节点之间工序工期的和的最大值作为该节点的最早开始时间。选择该最大值作为该节点的最早开始时间，其原因在于该节点的紧后工序必须要等它的所有紧前工序都完工后才能开始。

各节点的最早开始时间的计算公式为

$$\begin{cases} ES_1 = 0 \\ ES_j = \max_{(i) \in P_j} \{ ES_i + T_{ij} \} \end{cases} \quad (2-1)$$



式中 P_j ——节点 (j) 的紧前节点集合;

T_{ij} ——工序 (i, j) 的工期;

ES_1 ——源点的最早开始时间;

ES_i ——工序 (i, j) 的开始节点 (i) 的最早开始时间;

ES_j ——工序 (i, j) 的结束节点 (j) 的最早开始时间。

2.1.1.2 节点的最迟结束时间

节点的最迟结束时间是指在某节点 (j) 结束的各项工序最迟必须完成的时间, 用 LF_j 表示。若这些工序在此时间之前不能完成, 则势必会延迟总工期。计算各个节点的最迟结束时间应从网络汇点开始, 自右向左, 逆箭线方向逐个计算, 直至网络源点。因网络汇点无后继工序, 所以它的最迟结束时间等于它的最早开始时间, 即 $LF_w = ES_w$, 且 LF_w 等于工程的总工期。

任意节点的最迟结束时间, 是由该节点的紧后节点的最迟结束时间减去这两个节点之间工序的工期决定的; 若该节点有多个紧后节点, 选择这些紧后节点的最迟结束时间减去与该节点之间工序工期的差的最小值作为该节点的最迟结束时间。选择该最小值作为该节点的最迟结束时间, 其原因在于必须保证该节点的紧后工序的开始时间不能迟于各自的最迟开始时间。不然, 若超过该时间, 必将导致总工期的延迟。

各节点的最迟结束时间的计算公式为

$$\begin{cases} LF_w = ES_w \\ LF_i = \min_{(j) \in S_i} \{LF_j - T_{ij}\} \end{cases} \quad (2-2)$$

式中 S_i ——节点 (i) 的紧后节点集合;

LF_w ——汇点的最迟结束时间;

ES_w ——汇点的最早开始时间;

LF_i ——工序 (i, j) 的开始节点 (i) 的最迟结束时间;

LF_j ——工序 (i, j) 的结束节点 (j) 的最迟结束时间。

2.1.2 工序时间参数概念

工序的时间参数有四个, 即工序的最早开始时间、最早结束时间、最迟开始时间和最迟结束时间。

2.1.2.1 工序的最早开始时间

任意工序 (i, j) 必须等它的所有紧前工序都完成之后才能开始, 在这之前不具备开始的条件, 这个时间称为工序 (i, j) 的最早开始时间, 即紧前工序全部完成后, 本工序可能开始的最早时间, 用 ES_{ij} 表示。它是由左向右逐个计算的, 计算方法有两种:

(1) 工序的最早开始时间就是它的开始节点的最早开始时间, 其计算公式为

$$ES_{ij} = ES_i \quad (2-3)$$

(2) 工序的最早开始时间等于它的紧前工序的最早开始时间加上工序工期, 若紧前工序有多个, 选其中最早开始时间与工序工期之和的最大值, 其计算公式为

$$ES_{ij} = \max_{(h,i) \in P_{ij}} \{ES_{hi} + T_{hi}\} \quad (2-4)$$



式中 P_{ij} ——工序 (i, j) 的紧前工序的集合；

ES_{ij} ——工序 (i, j) 的最早开始时间；

ES_{hi} ——工序 (i, j) 的紧前工序 (h, i) 的最早开始时间；

T_{hi} ——工序 (h, i) 的工期。

2.1.2.2 工序的最早结束时间

工序 (i, j) 的最早结束时间就是该工序的最早开始时间加上工序工期，用 EF_{ij} 表示，其计算公式为

$$EF_{ij} = ES_{ij} + T_{ij} \quad (2-5)$$

2.1.2.3 工序的最迟开始时间

任意工序 (i, j) ，在不影响整个项目按期完成的条件下，必有一个最迟必须开始的时间，这个时间称工序 (i, j) 的最迟开始时间，用 LS_{ij} 表示。任意工序的最迟开始时间可以通过该工序结束节点的最迟结束时间减去工序工期来求得，也可以通过它的紧后工序的最迟开始时间减去该工序工期来求得。它是由右向左逐个计算，计算方法有两种：

(1) 任意工序的最迟开始时间等于它的结束节点的最迟结束时间减去该工序的工期，其计算公式为

$$LS_{ij} = LF_j - T_{ij} \quad (2-6)$$

式中 LS_{ij} ——工序 (i, j) 的最迟开始时间；

LF_j ——节点 (j) 的最迟结束时间；

T_{ij} ——工序 (i, j) 的工期。

(2) 工序的最迟开始时间等于它的紧后工序的最迟开始时间减去该工序的工期；当紧后工序有多个时，选其中紧后工序最迟开始时间与该工序工期之差的最小值，其计算公式为

$$LS_{ij} = \min_{(j,k) \in S_{ij}} \{LS_{jk} - T_{ij}\} \quad (2-7)$$

式中 S_{ij} ——工序 (i, j) 的紧后工序的集合；

LS_{jk} ——工序 (i, j) 的紧后工序 (j, k) 的最迟开始时间。

2.1.2.4 工序的最迟结束时间

工序 (i, j) 的最迟结束时间就是它的最迟开始时间加上该工序的工期，用 LF_{ij} 表示，其计算公式为

$$LF_{ij} = LS_{ij} + T_{ij} \quad (2-8)$$

式中 LF_{ij} ——工序 (i, j) 的最迟结束时间；

LS_{ij} ——工序 (i, j) 的最迟开始时间；

T_{ij} ——工序 (i, j) 的工期。

同时，工序 (i, j) 的最迟结束时间也等于它的结束节点的最迟结束时间，即

$$LF_{ij} = LF_j \quad (2-9)$$

2.2 机动时间概念

计算各项工序的最早开始时间、最早结束时间、最迟开始时间与最迟结束时间，其



目的之一就是要分析各工序在时间分配上是否合理, 有没有潜力可挖。在一项计划任务中, 总是有一些工序在时间衔接上是紧密相连、环环相扣的。其中任何一个环节如果延误了时间, 就会影响整个计划任务的按期完成。但也有一些工序, 它们的开始与结束时间提前或延后, 在一定条件下对后继工序和整个计划任务的完成没有影响。这就是说, 有些工序在时间上比较灵活, 有一定的机动余地; 而有些工序在时间上卡得很死, 没有机动余地。如何来判断这些不同的情况, 这就需要计算并分析机动时间。

计算和使用机动时间是网络计划技术中的一个关键问题, 它为计划进度的安排提供了选择的可能性。利用机动时间可以进一步挖掘项目计划的潜力, 求得时间安排和资源分配的合理方案。

2.2.1 机动时间传统概念

目前国际上通用的机动时间概念主要有五个: 总时差、安全时差、自由时差、干扰时差和节点时差。为了本书中后续章节研究内容的需要, 将上述五个概念的传统定义逐一陈述如下。

2.2.1.1 总时差

工序 (i, j) 的总时差是指在不影响工程总工期的条件下, 该工序可以任意使用的机动时间的最大值, 用 TF_{ij} 表示, 即

$$TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij} = LF_{ij} - ES_{ij} - T_{ij} \quad (2-10)$$

式中 LS_{ij} ——工序 (i, j) 的最迟开始时间;

ES_{ij} ——工序 (i, j) 的最早开始时间;

LF_{ij} ——工序 (i, j) 的最迟结束时间;

EF_{ij} ——工序 (i, j) 的最早结束时间;

T_{ij} ——工序 (i, j) 的工期。

2.2.1.2 安全时差

工序 (i, j) 的安全时差是指当该工序的紧前工序全部在最迟结束时间结束时, 该工序仍可以自由使用而不影响工程总工期的那部分机动时间, 用 SF_{ij} 表示, 即

$$\begin{cases} SF_{ij} = LS_{ij} - LF_i^* \\ LF_i^* = \max_{(x,y) \in P_{ij}} \{LF_{xy}\} \end{cases} \quad (2-11)$$

式中 P_{ij} ——工序 (i, j) 所有紧前实工序的集合;

(x, y) ——集合 P_{ij} 中的任意一元素;

LF_i^* ——工序 (i, j) 所有紧前实工序的最迟结束时间的最大值;

LS_{ij} ——工序 (i, j) 最迟开始时间。

2.2.1.3 自由时差

工序 (i, j) 的自由时差是指在不影响其紧后工序最早开始时间的前提下, 该工序可以使用的机动时间的最大值, 用 FF_{ij} 表示, 即

$$\begin{cases} FF_{ij} = ES_j^* - EF_{ij} \\ ES_j^* = \min_{(x,y) \in S_{ij}} \{ES_{xy}\} \end{cases} \quad (2-12)$$



式中 S_{ij} ——工序 (i, j) 所有紧后实工序的集合；

(x, y) ——集合 S_{ij} 中的任意一元素；

ES_j^* ——工序 (i, j) 所有紧后实工序的最早开始时间的最小值；

EF_{ij} ——工序 (i, j) 的最早完成时间。

2.2.1.4 干扰时差

在本书中工序 (i, j) 的干扰时差是这样定义的：如果工序 (i, j) 的干扰时差为正，则表示当工序 (i, j) 的紧后工序能够尽早开始，并且它的紧前工序能够尽迟结束的情况下，该工序最大可能推迟的时间；如果该时差为负，则表示当工序 (i, j) 的紧后工序能够尽早开始，并且它的紧前工序能够尽迟结束的情况下，该工序的工期容许缩短的最小时间。工序 (i, j) 的干扰时差用 IF_{ij} 表示，即

$$IF_{ij} = \min_{(j,k) \in S_{ij}} \{ES_{jk}\} - \max_{(h,i) \in P_{ij}} \{LF_{hi}\} - T_{ij} \quad (2-13)$$

式中 S_{ij} ——工序 (i, j) 的所有紧后实工序的集合；

P_{ij} ——工序 (i, j) 的所有紧前实工序的集合。

2.2.1.5 节点时差

节点 (i) 的时差是该节点的最迟结束时间与最早开始时间之差，用 TF_i 表示，即

$$TF_i = LF_i - ES_i \quad (2-14)$$

2.2.2 机动时间的新概念

目前，国际上通用的五种机动时间概念只是给出了各个机动时间的计算方法，并不能显示出不同工序机动时间之间的内在关系。为了从概念上就能部分显示出各机动时间之间的内在关系，乞建勋教授对传统的机动时间概念进行了细分和重新定义，形成了四个新的机动时间概念，即前单时差、后单时差、前共用时差和后共用时差，更好地反映了紧前工序和紧后工序之间的关系。在书中作者还提出了机动时间传递量和稳定量两个概念，为后面的研究作准备。

这样，包括总时差，工序机动时间可划分为七个概念：总时差、前单时差、后单时差、前共用时差、后共用时差、机动时间传递量和机动时间稳定量。其中，总时差概念前文已经给出，这里不再赘述。下面将分别陈述关于机动时间的另外六个新概念。

2.2.2.1 前共用时差

工序 (i, j) 的前共用时差是该工序与它的紧前工序都可以使用但不能同时使用的机动时间，工序对该时差的使用会影响紧前工序的机动时间，用 ${}^{\Delta}IF_{ij}$ 表示，即

$${}^{\Delta}IF_{ij} = LF_i - ES_i = TF_i \quad (2-15)$$

2.2.2.2 前单时差

工序 (i, j) 的前单时差是该工序在不影响其紧前工序最迟完工条件下所拥有的可使用的机动时间的最大值，工序对该时差的使用不影响其紧前工序的时差，用 ${}^{\Delta}FF_{ij}$ 表示，即

$${}^{\Delta}FF_{ij} = LS_{ij} - LF_i = LF_j - LF_i - T_{ij} \quad (2-16)$$



2.2.2.3 后共用时差

工序 (i, j) 的后共用时差是该工序与它的紧后工序都可以使用但不能同时使用的机动时间, 工序对该时差的使用会影响紧后工序的机动时间, 用 IF_{ij}^{Δ} 表示, 即

$$IF_{ij}^{\Delta} = LF_j - ES_j = TF_j \quad (2-17)$$

2.2.2.4 后单时差

工序 (i, j) 的后单时差是该工序在不影响其紧后工序最早可能开工条件下所拥有的可使用的机动时间的最大值, 工序对该时差的使用不影响其紧后工序的时差, 用 FF_{ij}^{Δ} 表示, 即

$$FF_{ij}^{\Delta} = ES_{jk} - EF_{ij} = ES_{jk} - ES_{ij} - T_{ij} = ES_j - ES_i - T_{ij} \quad (2-18)$$

2.2.2.5 机动时间稳定量

机动时间稳定量是一个工序的前单时差和后单时差的交叉部分, 是该工序专用而其紧前工序和紧后工序都不能使用的机动时间。工序在该范围内是稳定的, 既不影响紧前工序, 也不影响紧后工序的机动时间。工序 (i, j) 的机动时间稳定量 $(F|F)_{ij}$ 的计算公式为

$$\begin{aligned} (F|F)_{ij} &= \max\{\Delta FF_{ij} + FF_{ij}^{\Delta} - TF_{ij}, 0\} \\ &= \max\{LF_i - ES_j + T_{ij}, 0\} \end{aligned} \quad (2-19)$$

2.2.2.6 机动时间传递量

机动时间传递量是一个工序的前共用时差和后共用时差的交叉部分。工序在该范围内是具有机动时间传递性的, 既影响紧前工序, 又影响紧后工序的机动时间。工序 (i, j) 的机动时间传递量 $(I|I)_{ij}$ 的计算公式为

$$\begin{aligned} (I|I)_{ij} &= \max\{\Delta IF_{ij} + IF_{ij}^{\Delta} - TF_{ij}, 0\} \\ &= \max\{LF_i - ES_j + T_{ij}, 0\} \end{aligned} \quad (2-20)$$

2.3 工序机动时间之间的关系

机动时间是 CPM 网络计划中的关键参数, 与其他参数相比, 它具有更好地从全局把握各工序之间相互关系的性质。接下来, 我们将对同一工序和不同工序中相邻工序机动时间之间关系的成果给予介绍, 并在其基础上首次研究了不同工序中不相邻工序机动时间之间的关系, 即机动时间的传递性与稳定性。

2.3.1 同一工序机动时间之间的关系

2.3.1.1 同一工序前共用时差和前单时差之间的关系

定理 2.1 工序 (i, j) 的总时差等于其前单时差和前共用时差之和, 即

$$TF_{ij} = \Delta FF_{ij} + \Delta IF_{ij} \quad (2-21)$$

证明: 因为

$$\Delta FF_{ij} = LS_{ij} - LF_k$$