数学模型与数学建模

陈华友 周礼刚 刘金培 编著

科学出版社

数学模型与数学建模

陈华友　周礼刚　刘金培　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书的内容包括数学建模常用软件介绍、代数模型、微分与差分方程模型、数学规划、概率统计方法模型、图论模型、预测和决策模型、全国大学生数学建模真题. 本书注重阐述各类数学模型的基本原理和方法，使之具有一定的系统性和新颖性；同时也介绍了求解数学模型的 MATLAB 软件、LINGO 软件和 R 软件. 为了便于读者理解和掌握书中的内容，书中给出了部分案例的模型及其求解程序代码，并配有适量的习题.

本书可作为高等学校数学与应用数学专业、信息与计算科学专业、统计学专业、系统工程专业、工商管理等专业的本科生或研究生的教材，也可作为工程技术人员、管理人员和相关学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型与数学建模/陈华友，周礼刚，刘金培编著. —北京：科学出版社，2014.1

ISBN 978-7-03-039499-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①陈… ②周… ③刘… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 317680 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：钟 洋

责任印制：阎 磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2014 年 1 月第一次印刷 印张：20

字数：401 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着科学技术的发展和社会的进步, 数学在工程、技术、经济、社会及管理等诸多领域有着广泛地应用. 通过对研究的现实问题进行数学语言的表述, 建立该问题的数学模型, 有利于抓住问题的本质特征. 在此基础上, 利用数学的基本概念和方法进行深入的理论分析, 并结合历史统计数据进行模型的仿真分析, 可以从定量的角度获得一些有意义的结论. 由此可见, 数学模型和数学建模是数学在诸多领域中应用的关键环节, 它架起了数学方法与实际问题联系的桥梁.

数学模型和数学建模课程的教学突出了实践教学的特点, 强调人才的培养应从侧重知识教育转向侧重能力培养. 因此, 目前许多高校的数学与应用数学专业、信息与计算科学专业、统计学专业、系统工程专业、工商管理专业等均为本科生和研究生开设了数学模型方面的课程, 而且全国大学生数学建模竞赛和研究生数学建模竞赛已经成为全国高校规模最大的课外科技活动之一. 同时我校数学与应用数学专业综合改革试点项目获安徽省高等学校省级教学质量与教学改革工程的资助, 本书也是该项目的部分研究成果之一. 我们在参考大量国内外相关教材的基础上, 结合我校多年在数学模型课程的教学和指导本科生和研究生参加数学建模竞赛的实践经验、以及我们对数学模型课程的理解编写了这本数学模型和数学建模教材.

在编写过程中我们注意到以下三个方面：一是考虑到数学模型良好的应用背景和可计算操作性, 增加 MATLAB 软件、R 软件和 LINGO 软件的入门级介绍. 二是力求常用数学模型方法的系统性介绍, 同时兼顾一些最新的科研成果, 以增加授课内容新颖性和前沿性. 三是本书的案例分析中给出了部分程序代码, 便于学生实现模型的求解, 尽量做到理论建模和计算分析的统一.

本书内容适合数学与应用数学专业的特点和要求, 同时兼顾信息与计算科学专业、统计学专业、系统工程、管理科学与工程、工商管理等专业的要求, 可作为相关专业的本科生和研究生的教材, 也可作为工程技术人员、管理干部和相关学者的参考书.

在本书的编辑出版过程中, 得到了科学出版社的大力支持和帮助, 同时得到了安徽大学教材出版基金的资助, 我们在此一并表示衷心的感谢.

本书共分 9 章. 陈华友编写第 1 章 1.4 节, 第 2 章 2.1 节, 第 3 章 3.1 节, 第 5 章, 第 8 章, 第 9 章 9.1 节, 周礼刚编写第 2 章 2.2 节, 第 3 章 3.3 节, 第 4 章, 第 7 章, 第 9 章 9.2 节, 刘金培编写第 1 章 1.1~1.3 节, 第 2 章 2.3 节, 第 3 章 3.2 节, 第 6 章, 第 9 章 9.3 节. 全书由陈华友负责统稿和定稿工作.

尽管我们为提高教材的质量作了不少的努力, 但是由于我们的学识水平有限, 书中难免存在缺点和疏漏, 欢迎同行专家和读者不吝赐教, 以便今后进一步修改和完善.

编著者

2013 年 10 月

于安徽大学磬苑校区

目　录

第1章

绪　论

1.1　数学模型的概念及其特点

数学模型的历史可以追溯到人类开始应用数学的时代. 自从人类使用数字开始, 人们就不断地建立各种数学模型, 以解决各种各样的实际问题. 在科学技术迅速发展的今天, 随着各类实际问题的需要, 数学模型越来越多地出现在人们的生产和生活中, 如企业管理者、电气工程师、气象工作者、生物医学专家等, 他们经常需要利用数学的工具去解决企业管理、人工智能、天气预报、药物疗效分析等各行各业的专业性问题. 用数学工具处理实际问题的方法就是在合理假设的基础上, 通过建立相关的数学模型, 来实现对实际问题的求解. 因此, 建立数学模型是实际问题与数学工具之间联系的一座不可或缺的桥梁.

我们通过历史上著名的哥尼斯堡七桥问题为例, 了解如何从实际问题提取和抽象出恰当的数学模型, 来实现对实际问题的求解. 在哥尼斯堡的一个公园里, 有七座桥将普雷格尔河中两个岛及岛与河岸连接起来. 当时产生了这样一个问题, 即某人是否可能从这四块陆地中任何一块出发, 恰好通过每座桥一次, 再回到起点?

伟大的瑞士数学家欧拉 (Leonhard Euler)1736 年发表论文完满回答了这一问题, 并将问题一般化为“任意河道图和任意多座桥, 能否一条路线通过每座桥恰好一次?”. 欧拉在论文中将陆地抽象成点, 桥抽象成线. 4 块陆地区域及 7 座桥被简化和抽象成 4 个点 (A, B, C, D) 及连接这 4 个点的 7 条线. 这样就将问题转化成了图论中的一笔画问题, 即能否找到一个恰好包含了所有的线 (或边), 并且没有重复的路径. 在图论中定义, 凡是经过一点的关联线 (或边) 条数为奇数, 则称该点为奇点; 凡是经过一点

的关联线 (或边) 条数为偶数, 则称该点为偶点. 欧拉在论文中做了如下论证:

(1) 若图中奇点只有一个或超过两个以上, 不能实现一笔画;

(2) 若图中奇点仅有两个, 则由任一奇点出发, 可实现一笔画而停在另一奇点上;

(3) 若图中每个点都是偶点, 则从任一点出发, 可实现一笔画而回到出发点.

根据上述三条结论, 图哥尼斯堡七桥问题所抽象出的图中的四个点均为奇点, 因此不能实现一笔画. 也就是说, 没有一条线路能经过每座桥恰好一次. 进而我们可以根据上述三条结论判断任意一个网络图能否实现一笔画.

所谓数学模型, 是指针对或参照现实世界中某类事物系统的主要特征、主要关系, 经过简化与抽象, 用形式化的数学语言概括或近似地加以表述的一种数学结构. 一般表现为数理逻辑的逻辑表达式、各种数学方程 (如代数方程、微分方程、积分方程等) 及反映量与量之间相互关系的图形、表格等形式. 它或者能解释特定现象的现实状态, 或者能预测对象的未来状态, 或者能提供处理对象的最优决策与控制.

一般地, 好的数学模型应具备可靠性和可解性 (也叫适用性) 两个方面的特点. 可靠性是指在允许的误差范围内, 能反映出该系统有关特性的内在联系; 可解性是指易于数学处理与计算. 数学模型方法将复杂的研究对象简单化、抽象化, 撇开对象的一些具体特征, 减少其参数, 只抽取其主要量、量的变化及量与量之间的相互关系, 在"纯粹"的形态上进行研究, 突出主要矛盾, 忽略次要矛盾, 用数学语言刻画出客观对象量的规律性, 简洁明了地描述现实原型, 揭示出其本质的规律, 并在对模型修正、求解的基础上使原问题得以解决.

因而, 数学模型是对现实原形的一种理想化处理, 是一个科学的抽象过程, 因而具有高度的抽象性与形式化特征. 这一特征使其成为一种经典的方法工具, 并随着科学技术的数学化趋势, 大大超越了数学范畴, 广泛地应用于自然科学、工程技术和社会科学的一切领域. 它将现实问题归结为相应的数学问题, 并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究, 一方面它从定性或定量的角度来刻画实际问题, 并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导, 另一方面它是研究和掌握系统运动规律的有力工具, 是分析、设计、预报或预测、控制实际系统的基础.

1.2　数学模型的分类

数学模型可以根据不同的方式分类, 下面介绍一些分类方法.

(1) 根据数学模型的应用领域, 可分为人口模型、生物数学模型、医学数学模型、经济数学模型、生态模型、交通模型、数量经济学模型、数量社会学模型等.

(2) 根据建立数学模型的方法, 可分为初等模型、微分方程模型、图论模型、规划模型、概率统计模型、几何模型等.

(3) 根据人们对事物发展过程的了解程度, 分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

白箱模型是指那些内部规律比较清楚的模型, 如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题; 灰箱模型是指那些内部规律尚不十分清楚, 在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题, 如气象学、生态学、经济学等领域的模型; 所谓的黑箱模型, 是指一些其内部规律还很少为人们所知的现象, 如生命科学等方面的问题, 由于因素众多、关系复杂, 也可简化为灰箱模型来研究.

(4) 根据实际问题是否考虑不确定因素的影响, 可分为确定性模型、随机性模型和模糊性模型等.

(5) 根据模型是否考虑时间因素的动态变化, 可分为静态模型和动态模型.

(6) 根据模型中变量取值的性质, 可以分为离散型模型和连续性模型.

(7) 根据模型中参数的确定性情况, 分为参数与非参数模型. 一般地, 用代数方程、微分方程、微分方程组以及传递函数等描述的模型都是参数模型, 建立参数模型就在于确定已知模型结构中的各个参数, 通常通过理论分析总是得出参数模型. 非参数模型是直接或间接地从实际系统的实验分析中得到的响应, 如通过实验记录到的系统脉冲响应或阶跃响应就是非参数模型. 运用各种系统辨识的方法, 可由非参数模型得到参数模型. 如果实验前可以决定系统的结构, 则通过实验辨识可以直接得到参数模型.

(8) 根据变量之间的关系, 可分为线性和非线性模型. 一般地, 线性模型中各量之间的关系是线性的, 可以应用叠加原理, 即几个不同的输入量同时作用于系统的响应, 等于几个输入量单独作用的响应之和. 非线性模型中各量之间的关系不是线性的, 不满足叠加原理.

(9) 按照人们对原型的认识过程, 可分为描述性的数学模型和解释性的数学模型. 描述性的模型是从特殊到一般, 它是从分析具体客观事物及其状态开始, 最终得到一个数学模型. 客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中. 解释性的模型是由一般到特殊, 它是从一般的公理系统出发, 借助于数学客体, 对公理系统给出正确解释的一种数学模型.

(10) 根据建模的目的, 可分为预测模型、决策模型、控制模型、优化模型、描述模型等.

在实际建立模型时, 模型的数学特征和使用的数学方法应该是我们重点考虑的对象, 同时这也依赖于建模的目的. 例如, 微分方程模型可用于不同领域中的实际问题, 应注意对不同问题建模时的数学抽象过程, 数学技巧的应用, 以及彼此之间的联系或差异. 一般情况下, 确定性的、静态的、线性模型易于处理, 而实际的问题大多数是随机性的、动态的、非线性的. 通常建模时, 利用初步近似的方法, 尽可能采用简单的手段来建立数学模型. 同时连续变量离散化, 离散变量作为连续变量来近似处理等也是常用的手段. 另外, 人们对同一事物, 由于对问题的了解程度或建模目的不同, 常常可以建立完全不同类型的数学模型.

1.3　数学建模的基本步骤和方法

将数学方法运用到实际问题, 都需要把该问题的内在规律, 用数字、图表、公式或符号表示出来, 经过数学的处理和分析, 得出供人们分析、预报、决策或控制的结果, 这个过程就是数学建模的过程. 也就是说, 实际问题往往是很复杂的, 其影响因素也总是很多, 如果想把问题的全部影响因素都反映到模型中来, 这样的模型很难建立也并不可取. 但如果考虑数学模型处理方法的难易程度, 当然模型越简单越好, 但过于简单的模型又难于反映系统的主要特性. 因此, 通常所建立的模型往往是这两种互相矛盾要求的折中处理.

由于客观问题的复杂性, 建立数学模型的方法也千变万化, 可以说建模的过程是一门艺术. 建立数学模型一般要经过明确实际问题、问题分析、合理假设、模型建立、模型求解、模型分析与检验、模型解释和应用等几个步骤.

(1) **明确实际问题**. 数学建模所面对的实际问题常常是各领域的实际问题, 这些问题本身往往是一个复杂的系统, 建模的目的可能是要解决问题的某个方面, 因此, 建立数学模型的首要任务是辨明问题, 分析条件及相关问题, 通常一开始尽可能简化, 使问题简单, 而后再根据目的和要求逐步完善.

(2) **问题分析**. 问题分析就是要充分了解问题的实际背景, 明确建模的目的, 尽可能弄清楚对象的特征, 搜集需要的各种信息资料和数据, 并初步确定用哪一类数学模型.

(3) **合理假设**. 合理假设就是根据对象的特征和建模的目的对问题进行必要的合理的简化, 用精确的语言做出假设, 可以说是建模的关键步骤. 一个实际问题不经过简化和假设就很难翻译成数学问题. 合理的假设在建模中的作用除了简化问题外, 还可以对模型的使用范围加以明确的限定. 模型的成功与否很大程度上取决于假设是否恰当, 假设做的合理就是要把建模对象所涉及的次要因素忽略掉, 不然所得模型会因为结构太复杂而失去可解性, 但不能把实质相关的因素忽略掉, 不然, 所得模型因为不能足够正确反映实际情况而失去可靠性. 合理假设需要注意以下几点原则: ①目的性原则: 从原型中简化掉那些与建模目的无关的或关系不大的因素; ② 简明性原则: 所给出的假设条件要简单、准确, 有利于构造模型; ③真实性原则: 假设的条款要符合情理, 简化带来的误差应满足实际问题所允许的误差范围; ④全面性原则: 在对事物原型本身做出假设的同时, 还要给出原型所处的环境条件.

(4) **模型的建立**. 根据已有假设, 利用适当的数学工具刻画各变量之间的相互关系, 建立相应的数学结构, 可以是公式、表格、图形等. 在建模时采用什么数学工具根据问题的特征、建模的目的要求而定. 在建模的时候, 要充分利用现有的学术前沿的成果和方法, 从理想化的、简单的模型逐步过渡到实际的、复杂的模型, 这是一种十分有效的途径. 在构造模型时究竟采用什么方法构造模型, 要根据实际问题的性质和

建模假设所给出的建模信息而定. 随着计算机的发展, 计算机模拟促进了数学建模的发展, 也成为一种构造模型的基本方法. 在构造模型时, 各种方法取长补短、交叉使用, 达到建模的目的.

(5) **模型求解**. 根据采用的数学工具, 对模型求解, 包括解方程、图解、定理证明、逻辑推理、数值计算等, 特别是编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包, 并借助计算机完成对模型的求解. 在建模过程中, 不同数学模型的求解一般涉及不同的数学分支的专门知识. 不同数学模型的难易程度不同, 一般情况下对比较简单问题的求解, 应力求使解的适用范围尽可能广, 从而使模型具有更大的普遍性. 面对比较复杂的问题, 应先考虑用特殊的方法将它解出, 再考虑模型的普遍性. 例如, 有些问题是不能求出解析解的, 只能用数值方法求解.

(6) **模型分析与检验**. 根据建模的目的要求, 对模型求解的数字结果、变量之间的依赖关系、解的稳定性进行分析, 进行系统参数的灵敏度分析, 以及误差来源的分析. 将模型结果返回客观实际中, 对模型进行检验, 用实际现象、数据等检验模型的合理性、精确性和适用性. 通过分析和检验, 看它是否符合客观实际, 若不符合就修改或增减假设条款, 重新建模, 循环往复以致不断完善, 直至获得满意结果.

(7) **模型解释与应用**. 数学建模全过程的最后阶段是用普通的语言把模型的解答翻译或归纳出来. 我们建模的目的是为了去解决某个实际问题, 所以那些使用我们模型的人理解结论是十分重要的. 有时候, 我们需要把模型的结论写成论文和报告的形式, 便于不同的读者去理解. 模型的应用是数学建模的宗旨, 也是对模型最客观、最公正的检验. 因此, 一个成功的数学模型, 应根据建模的目的, 将其用于分析、研究和解决实际问题, 充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用.

1.4 数学建模和竞赛及其对大学生创新能力培养的作用

社会进步依赖于科学的创新, 而数学对于科学的发展具有根本的意义. 在今天, 数学已成为高科技的基础, 并且在一定意义上, 可以说是现代文明的标志. 因此, 数学建模竞赛活动适应高质量的数学教育形势应运而生, 它在大学生的素质教育中起着越来越重要的作用.

数学建模活动 1985 年起源于美国的一年一度的大学生数学建模竞赛. 我国自 1992 年开始举办全国大学生数学建模竞赛, 旨在鼓励大学生运用所学知识, 借助计算机解决实际问题, 促进高素质应用型人才的培养.

数学建模竞赛以队为参赛单位, 每个参赛队由 3 人组成, 每次竞赛每个参赛队只需任选一题. 考题都是有实际背景的错综复杂的问题, 它没有固定范围, 可以涉及不同的学科领域. 数学建模就是对这些复杂的问题进行必要的简化和假设, 通过调查收集数据资料, 抓住问题的本质, 利用数学的语言进行抽象和概括, 将实际问题转化为

数学问题, 建立合适的数学模型来反映实际问题的数量关系, 最后利用计算机手段得到近似解, 并对结果进行解释和验证. 全国数学建模竞赛时间一般为三天三夜, 在这三昼夜的时间内, 参赛者要以论文的形式提交解决方案, 包括问题的重新叙述、问题的假设, 模型的设计及求解、灵敏度分析、模型的优缺点的讨论等. 参赛者可以使用包括计算机网络、统计计算或优化计算软件包、教科书、学术杂志和手册之类的外部资源. 由此可见, 数学建模是一种联系数学与实际问题的桥梁. 它突出了实践活动的重要特点, 强调人才的培养应从侧重知识教育转向侧重能力培养.

数学建模竞赛活动的发展与壮大及教学实践证明, 数学建模的教学及竞赛是实施素质教育的有效途径, 它既增强了学生的数学应用意识, 又提高了大学生运用数学知识和计算机技术分析和解决实际问题的能力. 开展数学建模教学与竞赛对大学生能力的培养是全面的. 这表现在创新精神和创新能力的培养, 查阅文献资料、分析综合、抽象概括能力的培养, 应用能力的培养, 运用数学工具和计算机以及实践能力的培养等方面.

数学建模有利于培养学生创新精神和创造能力. 数学建模的问题具有一定的开放性, 没有一定的规矩可循, 没有事先设定的标准答案或答案不是唯一的, 具有较大的灵活性. 因此需要突破传统的思维模式, 面对复杂问题发挥学生的创新精神和创造力、想象力、洞察力以及解决问题的逻辑推理和量化分析能力, 善于从实际问题提供的原形中抓住其数学本质, 建立新颖的数学模型.

数学建模有利于培养学生双向翻译能力. 它要求学生运用学过的数学知识, 把实际问题翻译成数学模型, 又将数学模型的结果用浅显易懂的语言翻译出来.

数学建模有利于培养学生获取文献资料信息的能力. 在信息社会中, 信息和知识以前所未有的速度传播和扩散, 这就要求学生具有良好的获取文献资料信息的能力, 以便适应现代社会技术创新和知识更新的需要. 数学建模问题有强烈实际背景, 涉及不同的学科领域, 问题错综复杂. 这就促使学生围绕实际问题广泛查阅资料, 获取自己有用的材料, 这大大锻炼和提高了学生自觉使用资料的能力.

数学建模有利于培养学生利用计算机及相应软件的能力. 数学建模需要对复杂的实际问题和烦琐的数据进行处理. 目前计算机和相应的各种软件包, 不仅能够节省时间, 得到直观形象的结果, 有利于深入讨论, 而且能够促使学生养成自觉应用最新科技成果的良好习惯. 许多很好的计算软件为求解模型或仿真模型提供了便利的平台. 数学建模对提高学生使用计算机的能力是极其重要的.

第2章

数学建模常用软件

2.1 MATLAB 软件介绍

MATLAB 是 Matrix Laboratory 的简称, 是美国 MathWorks 公司在 20 世纪 80 年代研制的的数学软件, 用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境, 主要包括 MATLAB 和 Simulink 两大部分. MATLAB 的主要特点:

1) 高效的数值计算及符号计算功能, 能使用户从繁杂的数学运算分析中解脱出来;

2) 具有完备的图形处理功能, 实现计算结果和编程的可视化;

3) 友好的用户界面及接近数学表达式的自然化语言, 使学者易于学习和掌握;

4) 功能丰富的工具箱 (如信号处理工具箱、通信工具箱等), 为用户提供了大量方便实用的处理工具.

2.1.1 MATLAB 软件的常用命令

MATLAB 软件安装时, 按照提示安装目录, 就会在用户电脑里安装成功. 通过桌面快捷方式, 便可以打开 MATLAB 的主窗口, 如图 2.1.1 所示.

MATLAB 命令窗口中的 “>>” 为运算提示符, 表示 MATLAB 处于准备状态. 当在提示符后输入一段程序或一段运算式后, 再按【Enter】键, MATLAB 会给出计算结果.