目　　录

1 随机事件及其概率

概率论是研究不确定性现象及其计量方法的一个数学分支，其应用广泛，是科技、管理、经济等工作者必备的数学工具.概率论的中心问题就是研究随机事件发生的规律.什么是随机事件？随机事件的发生是否有规律？规律是什么？本章通过随机试验介绍概率论中的基本概念，进而讨论随机事件的关系及其运算、概率的性质及其计算方法.

1.1 随机试验与随机事件

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.有一类现象在一定的条件下必然发生.这类现象称为必然现象.例如：向上抛一石子必然下落.但是，还存在着另一类现象，例如：在相同的条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么.这类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果.对此，人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现某种规律性，例如：多次（大量）重复抛一枚硬币得到正面朝上或反面朝上的次数大致各占一半.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性就称为统计规律性.这种在个别试验中呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象，我们称之为随机现象.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科.

1.1.1 随机试验

这里所指的试验是一个含义广泛的术语，为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察，观察的过程也称为试验.

如果一个试验满足下列三个条件，就称这个试验是随机试验，简称为试验，记作 E.

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且事先明确试验的所有可能结果;

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果.

值得注意的是:我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

[例 1-1] 下面几种试验都是随机试验:

E_1:抛一枚硬币,观察向上面出现正面(记为 H)、反面(记为 T)的情况;

E_2:将一枚硬币抛掷两次,观察向上面出现正面(H)、反面(T)的情况;

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察向上面出现正面的次数;

E_4:抛一颗骰子,观察向上面出现的点数;

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

尽管在 E_5 中,试验的结果有无数个,但仍然满足上述三个条件.故它是随机试验.

1.1.2 随机事件

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的所有可能的结果是明确的,即所有可能结果组成的集合是已知的,于是,我们称随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合为 E 的样本空间,记为 S.样本空间的元素,即随机试验 E 的每个结果,称为样本点.

下面写出前述随机试验 $E_i(i=1,2,3,4,5)$ 的样本空间 S_i:

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{HH,HT,TT,TH\}$;

$S_3=\{0,1,2,3\}$;

$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

一般地,称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件,用大写字母来表示.

值得关注的是:何谓事件发生?事实上,根据随机事件的定义可知:一次试验中某随机事件发生时,该事件对应的集合所包含的一个样本点在试验中出现.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件,如在 E_3 中有四个基本事件$\{0\}$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$.

由于样本空间 S 是它自身的子集,它在每次实验中总是发生的,故称 S 为必然事件. 空集$\varnothing$不含任何样本点,且$\varnothing\subset S$,故空集是一个事件,但在每次试验中都不发生,因此称其为不可能事件.

[例 1-2] 从甲、乙、丙三人中选正、副班长各 1 人,求(1)S;(2)事件 $A=$“甲当正班长”,$B=$“甲不任职”.

解 (1) $S=\{$(甲乙),(甲丙),(乙甲),(乙丙),(丙甲),(丙乙)$\}$;

(2) $A=\{(甲乙),(甲丙)\}$　　$B=\{(乙丙),(丙乙)\}$.

1.1.3 事件间的关系与事件的运算

为了从较简单事件发生的规律中寻求较复杂事件发生的规律，需要研究同一试验的各种事件之间的关系和运算，而事件是一个集合，因此事件间的关系与事件的运算就可以依照集合论中集合之间的关系与集合的运算来处理，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1.1.3.1 事件之间的关系

1. 包含

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$.

2. 相等

若事件 A 发生$\Leftrightarrow$事件 B 发生，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等.

3. 互斥

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 是互不相容的或互斥的，即 A 与 B 满足：$A\cap B=\varnothing$.

1.1.3.2 事件之间的运算

1. 和

事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\mid x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件.即当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，则 $A\cup B$ 发生，$A\cup B$ 也记作 $A+B$.

同理，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

2. 积

事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，即当仅当 A，B 同时发生时，则事件 $A\cap B$ 发生.$A\cap B$ 也记作 AB.

同理，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件.

3. 差

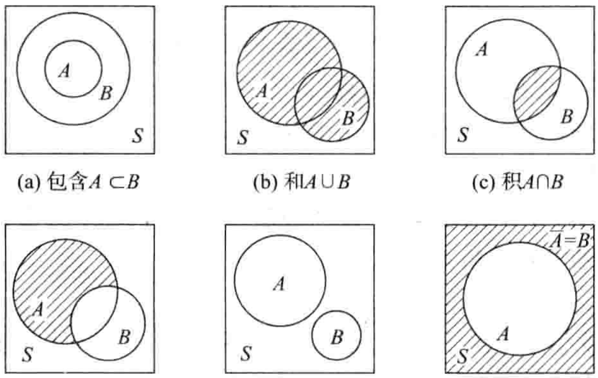
事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，即当仅当 A 发生而 B 不发生时，则事件 $A-B$ 发生.

4. 对立

若 $A\cup B=S$.且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，也称事件 A 与事件 B 互为对立事件，A 的对立事件用 $\overline{A}$ 表示，即 $\overline{A}=B=S-A$，即对每次

试验，事件 A，$\overline{A}$ 中必有一个发生，且仅有一个发生.

下面用图将上面的论述直观地显示一下(见图 1－1).



(a) 包含$A\subset B$　(b) 和$A\cup B$　(c) 积$A\cap B$

(d) 差$A-B$　(e) 互斥$A\cap B=\varnothing$　(f) 对立$B=S-A$

图 1－1

1.1.3.3　事件的运算性质

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

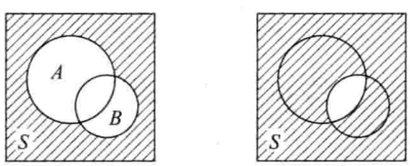
(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 对偶律(德·摩根定律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证　(1) $\overline{A\cup B}$发生$\Leftrightarrow A\cup B$不发生$\Leftrightarrow A$ 不发生且 B 不发生$\Leftrightarrow\overline{A}$ 发生且 $\overline{B}$ 发生$\Leftrightarrow\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生.

同理可证(2).

也可以用图来表示对偶律(见图 1－2).



$\overline{A\cup B}(\overline{A}\cap\overline{B})$　$\overline{A\cap B}(\overline{A}\cup\overline{B})$

图 1－2

(5) 吸收律

当 $A\subset B$ 时，有：$A\cup B=B$；$A\cap B=A$.

证明　显然.

(6) 差、积互换：$A-B=A\cap\overline{B}$

证　$A-B$ 发生$\Leftrightarrow A$ 发生但 B 不发生$\Leftrightarrow A$ 发生且 $\overline{B}$ 发生$\Leftrightarrow A\cap\overline{B}$ 发生

对随机事件 A，B，从前述的图示中，还可以得到以下一些关系：

(1) $A\cap B\subset A$；$A-B\subset A$，且 $A-B=A-AB$.

(2) $A\overline{B}$，$B\overline{A}$与AB 两两互斥；$A=A\overline{B}\cup AB$；$A\cup B=A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup AB=A\overline{B}\cup B=B\overline{A}\cup A=A\cup(B-A)$.

(3) $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cup B}\neq\overline{A}\cup\overline{B}$……

[例 1-3]　设 A_1,A_2,A_3 为三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) $A=\{A_1$ 发生而 A_2 与 A_3 均不发生$\}$；

(2) $B=\{$三个事件中恰有两个发生$\}$；

(3) $C=\{$三个事件中至少有两个事件$\}$；

(4) $D=\{$三个事件中最多有两个发生$\}$.

解　(1) $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A=A_1-A_2-A_3$ 或 $A=A_1-(A_2\cup A_3)$.

(2) $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $C=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

(4) $D=\overline{A_1A_2A_3}$或 $D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$

[例 1-4]　化简下列各式

(1) $(A\cup B)-(A-B)$；(2)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；(3)$(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})$.

解　(1)
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)(\overline{A-B})=(A\cup B)(\overline{A\overline{B}})\\&=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup B\overline{A}\cup AB\cup B\\&=B\overline{A}\cup AB\cup B=B\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\varnothing\\&=A\cup AS=A.\end{aligned}$$

(3) $(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})=(A\overline{\overline{B}})(\overline{A}\,\overline{B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=(A\overline{A})(B\overline{B})=\varnothing$.

通过上例可发现，进行事件运算时，运算的先后顺序是先求逆运算，再求积运算，最后再进行和或差的运算；若有括号，则括号内的运算优先.

1.2　随机事件的概率

既然概率论是研究随机现象的规律性，那么，不仅要知道随机试验中可能出现哪些事件，还必须对随机事件发生的可能性的大小进行定量的描述.

1.2.1　概率的统计定义

1.2.1.1　频率

若 n_A 是 n 次试验中事件 A 发生的次数(频数)，则称比值$\dfrac{n_A}{n}$为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

易见,频率具有下述性质:

性质1(非负性) $0\leqslant f_n(n)\leqslant 1$;

性质2(规范性) $f_n(S)=1, f_n(\varnothing)=0$;

性质3(可加性) 若 $AB=\varnothing$,则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

实践中人们发现,当试验次数 n 较大时,频率 $f_n(A)$ 总在某一个常数 p 附近波动.

历史上,有不少统计学家,例如皮尔(Pearson)等人做过成千上万次抛掷硬币的试验,其试验记录如表1-1.

表1-1

试验者	试验次数 n	频数 n_A	频率 $f_n(A)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
浦　丰	4 040	2 048	0.506 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

由表1-1可以发现,当抛掷硬币次数 n 较大时,频率 $f_n(A)$ 总在常数0.5附近波动,且随着试验次数的增加,事件 A 发生的频率和波动越来越小,呈现出逐渐稳定于0.5的倾向,频率的这种逐渐的"稳定性"就是前面所述的统计规律性,它揭示了随机现象的随机性蕴含着某种必然性,这就是规律.这里的常数0.5记为 $p=0.5$ 称为频率 $f_n(A)$ 的稳定值,它能反映事件 A 发生的可能性大小.一般地,每个随机事件都有相应的常数 p 与之对应,所以,我们可用频率的稳定值作为该随机事件发生的可能性大小的定量描述.

1.2.1.2 概率的统计定义

定义1.1 设有随机实验 E,在相同条件下,若试验的重复次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间[0,1]上的一个确定的常数 p 附近摆动,且随着 n 的增加,摆动的幅度减小,并逐渐稳定于 p,则称常数 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=p$$

与频率的三条性质相对应,作为频率稳定值的概率也有相应的性质:

性质1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

性质2 $P(S)=1, P(\varnothing)=0$;

性质 3　若 $AB=\varnothing$,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

值得注意的是:(1) 尽管概率的统计定义从理论上对随机事件发生的可能大小进行了定量描述,但在实际问题中,常数 p 往往是未知的,如何确定?

(2) 依据该定义的内涵,当试验次数足够大时,可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$近似代替概率 $P(A)$.

(3) 如果试验具有破坏性,就不可能进行大量重复试验,这就限制用频率近似代替概率的应用,然而,对某些特殊类型的随机试验,要确定事件的概率,并不需作重复试验,而是根据人类长期积累的关于"对称性"的实际经验,提出数学模型,直接计算出来,从而给出概率相应的定义,这类试验称为等可能概型试验.

根据样本空间 S 是有限集还是无限集,可分为古典概型和几何概型.

1.2.2　概率的古典定义

1.2.2.1　古典型随机试验

定义 1.2　若试验具有以下两个特征:

(1) 有限性:即试验的样本空间 S 是有限集,即 $S=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$;

(2) 等可能性:即每个样本点(每个结果)发生的可能性大小相等,即,$P(w_i)=P(w_j)(i,j=1,2,\cdots,n)$

则称此试验为古典型随机实验(即古典概型).

1.2.2.2　概率的古典定义

定义 1.3　设古典型试验 E 的样本空间有 n 个样本点,若事件 A 包含其中 m 个样本点,则事件 A 发生的概率 $P(A)$定义为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

由此式算得的概率称为古典概率.

由古典概型的两个特征可以看出该定义的合理性:在一次试验中,由于每个结果出现的可能性大小是一样的,且总共只有 n 个结果,而事件 A 包含了 m 个样本点,故在一次试验中,事件 A 发生的概率当然为 $m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}$.

为了方便,通常把事件 A 包含的样本点数 m 记为 m_A,事件 B 包含的样本点数 m 记作 m_B,以示区别.

当然,古典概率也具有与统计定义的概率同样的性质,即非负性、规范性、可加性.

1. 摸球问题

[例 1-5]　某厂生产的同类产品(外形一样,型号相同)100 件,已知有 40 件属于一等品,60 件属于二等品,今从中任取 3 件,按下列两种方式抽取:

(1) 每次抽取 1 件,测试后放回,混合后抽取下一件(这种抽取方法称为有返回抽样);

(2) 每次抽取 1 件,测试后不放回,在剩下的产品中再抽取下一件(这种抽

取方法称为不返回抽样）.

试分别就这两情况求下列两种事件的概率：

A＝“从 100 件产品中任意抽取 3 件，3 件都是二等品”；

B＝“从 100 件产品中任意抽取 3 件，其中有 2 件是一等品，1 件是二等品”；

解　先求事件 A 的概率

（1）由于每次抽取测试后均放回，故从 100 件产品中任取 3 件产品可看成三步来进行，而每步都有 100 件，由乘法原理知，样本空间中的基本事件总数为 $n=100^3$.

现考虑事件 A 所包含的基本事件数，因二等品共有 60 件，因而抽取 3 件都是二等品的所有可能取法有 60^3 种，即 A 包含的基本事件数为 $n_A=60^3$.

由古典概率计算公式得：$P(A)=\dfrac{60^3}{100^3}=0.216$

（2）由于抽取后不放回，因此第一次是从 100 件中抽取，而第二次只能从剩下的 99 件中抽取，第三次则只能从剩下的 98 件中抽取，故此时样本空间中的基本事件总数 $n=100\times 99\times 98$.

易知.事件 A 包含的基本事件数 $n_A=60\times 59\times 58$.

故
$$P(A)=\frac{60\times 59\times 58}{100\times 99\times 98}\approx 0.212$$

再求事件 B 的概率

（1）样本空间的基本事件总数仍为 $n=100^3$，但 B 中包含的基本事件数为 $n_B=C_3^2\times 40^2\times 60$

故
$$P(B)=C_3^2\times\frac{40^2\times 60}{100^3}\approx 0.288$$

（2）样本空间的基本事件总数仍为 $n=100\times 99\times 98$，但 B 中包含的基本事件数为 $n_B=C_3^2\times 60\times 40\times 39$

故
$$P(B)=C_3^2\times\frac{60\times 40\times 39}{100\times 99\times 98}\approx 0.288$$

值得注意的是：

一般来说，有返回抽样与不返回抽样计算的概率是不同的，特别是在抽取对象的数目不大时更是如此，但是，当抽取对象的数目较大时，有返回抽样和不返回抽样所计算的概率相差不大（如上例）.正因为如此，人们在实际工作往往把抽取对象数目较大时的不返回抽样（特别对于破坏性试验——发射炮弹命中试验；灯泡的寿命试验等）当作有返回抽样来处理，因为后者在一般情况下计算概率较简单.

2. 分球问题

［例 1－6］　设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住（$n\leqslant N$），求下列事件的概率：（1）指定的 n 间房间各有一个人住；（2）恰

有 n 间房各有一人；(3)某一指定的房间恰有 m 个人($m\leqslant n$).

解 不难计算：(1)$P(A)=\frac{n!}{N^n}$；(2)$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$；(3)$P(C)=\frac{C_N^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$

值得注意的是：摸球和分球是两个不同类型的问题，读者可通过以上两例细心地品味一番.

3. 抽签问题

[例 1-7] 设袋中有 a 个白球和 b 个红球，现分别按有放回抽样和无放回抽样两种方式，依次把球一个个取出来，试求第 k 次取出的球是白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解 设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$.

(1) 放回抽样：依题意，样本空间的基本事件总数 $n=a+b$，事件 A 包含的基本事件数为 $n_A=a$.

故
$$P(A)=\frac{a}{a+b}$$

(2) 不放回抽样：

解法 1 依题意试验是从 $a+b$ 个球中，不放回地把球一个个取出来，依次排队，共有$(a+b)!$ 种不同的排法，则相应的样本空间总的基本事件数 $n=(a+b)!$.而对事件 A 发生有利的排法是，先从 a 个白球中任取一个排在第 k 个位置上，然后再把其余的 $a+b-1$ 个球排在 $a+b-1$ 个位置上，共有 $P_a^1\cdot(a+b-1)!$ 种不同的排法，所以，事件 A 包含的基本事件个数 $n_A=P_a^1(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{P_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

解法 2 只考虑前 k 次取球，试验可看作一次取 k 个球进行排队，共有 P_{a+b}^k 种不同排法，于是得相应的样本空间的基本事件的总数为 $n=P_{a+b}^k$，而对事件 A 发生有利的排法是，先从 a 个白球中任取一个排在第 k 位置上，再从其余的 $a+b-1$ 个球中任取$k-1$个球排在前 $k-1$ 个位置上，共有 $P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$ 种不同排法，于是，事件 A 包含的基本事件个数为 $n_A=P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$，

故
$$P(A)=\frac{P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}$$

从上例的计算结果可以看出：

(1) 放回抽样和不放回抽样取到白球的概率是一样的；

(2) 事件 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$的概率 $P(A)$与 k 无关，即 A 发生的概率与取球的先后次序无关，这就是所谓的“抽签原理”.正因为能否抽到“签”与抽签的先后次序无关，因此，在体育比赛等活动中，运动员抽签或购买福利彩票时，尽管抽签或购买的先后顺序不同，但各人的机会是相同的，是公平的！

(3) 比较解法 1 和解法 2 发现：有一个“变”和一个“不变”，“变”是指试验的结

果的表现形式发生了变化,即样本空间中的基本事件发生了变化;“不变”是指事件 A 发生的概率不变,即都为 $\frac{a}{a+b}$.其原因是,当试验的样本空间发生变化时,随机事件所包含的基本事件必然也发生相应的变化.因此,针对具体的问题,读者要精心地“设计”随机试验的样本空间,以便使得计算事件发生的概率更为简便、快捷.

1.2.3　概率的几何定义

古典概率计算只能处理基本事件是有限个的情形.如果试验结果有无穷多时,显然它就不适用了.有一类问题,虽然其试验结果是无限的,但呈现某种均匀性,它们的概率可以用几何的方法进行计算.

1.2.3.1　几何概型试验

定义 1.4　如果一个试验满足以下两个特征:

(1) 样本空间 S 是一个几何区域,这个区域的大小可以度量(如长度、面积、体积等),并把 S 的度量记为 $D(S)$;

(2) 向区域 S 内任意投掷一个点,落在区域内任意一点处都是“等可能”的,或者落在 S 中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $D(A)$ 成正比,与 A 的位置和形状无关.

则称该试验为几何概型试验.

1.2.3.2　概率的几何定义

定义 1.5　用事件 A 表示“投掷点落在区域 A 内”,则事件 A 的概率按下列公式计算:

$$P(A)=\frac{D(A)}{D(S)}$$

称此为几何概率.

[例 1-8]　候车问题　某地铁每隔六分钟有一列车通过,某乘客对某站的列车通过的时间不清楚.求该乘客到该站候车时间不少于 2 分钟的概率.

解　设 $A=\{$某乘客在该站候车时间不少于 2 分钟$\}$.前一列车在 t_1 时刻从该站开出,紧接着后一列车在 t_2 时刻到达该站.显然.$S=[0,6)$,该乘客可能在 t_1 与 t_2 之间任一时刻到达该站,于是,该乘客到达该站的时间 t 是均匀地出现在长为 6 分钟的时间区间上的一个随机点,设 t_0 是 t_1t_2 上一点,且 $|t_1t_0|=4$(见图 1-3).

图 1-3

易见,当乘客在 t_0 时刻之前到达该站时,候车时间就不会少于 2 分钟,从而 $D(S)=6,D(A)=4.P(A)=\frac{D(A)}{D(S)}=\frac{2}{3}$.

[例 1-9]　会面问题　两人相约在某天上午 10:00—11:00 在预定地方见

面，先到者要等候 20 分钟，过时则离去，如果两人在该天上午 10：00—11：00 内任一时刻到达是等可能的，求约会的两人会见到面的概率.

解 设 $A=\{$两人会见到面$\}$，x,y 分别为两人到达预定地点的时刻，则两人到达时间的一切可能的结果落在边长为 60 的正方形内，此正方形正是样本空间 S，A 发生的充要条件是 $|x-y|\leqslant 20$，即 $x-y\leqslant 20$ 且 $y-x\leqslant 20$.（见图 1－4）.于是

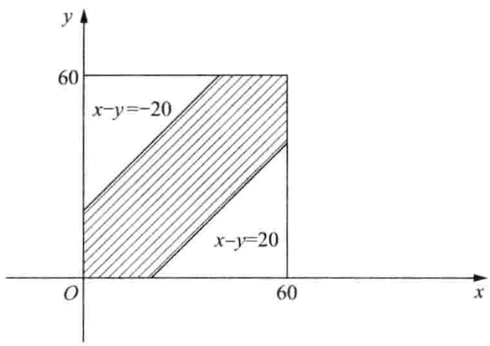


图 1－4

$$P(A)=\frac{D(A)}{D(S)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

1.2.4 概率和公理化定义及性质

前面分别介绍了概率的统计定义、概率的古典定义及概率的几何定义，它们在解决各自适应的实际问题中，都起着很重要的作用，但它们都有一定的局限性，如几何概率虽然把样本空间扩展到无限集，但仍保留样本点的等可能性要求；统计定义则要求建立在大量试验基础上，有时成本太大或根本难以实现，等等.直到 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫在总结前人成果的基础上，抓住概率是事件的函数的本质及其满足非负性、规范性及可列可加性等重要性质，提出了概率的公理化结构，明确了概率的定义和概率论的基本概念，对概率论的迅速发展起了积极作用.

1.2.4.1 概率的公理化定义

定义 1.6 设 S 是试验 E 的样本空间，对任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$.若 $P(A)$满足：

公理 1 非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2 规范性：$P(S)=1$；

公理 3 可列可加性：当可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$，两两互斥时，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1.2.4.2　概率的性质

性质 1　不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$.

性质 2　概率具有有限可加性,即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 3　对任意的事件 A,有　$P(A)=1-P(\overline{A})$

性质 4　若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

证明　因为 $A\supset B$,且 B 与 $A-B$ 互斥,所以 $A=B+(A-B)$

由性质 2 知　$P(A)=P(B)+P(A-B)$.即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

显然,若 $A\supset B$,由性质 4 知　$P(A)\geqslant P(B)$

性质 5　设 A,B 是任意两个事件.则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.此式称为加法的一般公式.

证明　因为 A 与 $B-AB$ 互斥,且 $A\cup B=A\cup(B-AB)$

由性质 2 和性质 4 可得:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

同理可推得:$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$
$-P(BC)+P(ABC)$

[例 1-10]　设 A、B 是两个事件,已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$,$P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(AB)=\dfrac{1}{8}$,求 $P(A\cup B)$,$P(\overline{A}B)$,$P(\overline{AB})$,$P[(A\cup B)(\overline{AB})]$.

解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.625$

$P(\overline{A}B)=P[(S-A)B]=P(B)-P(AB)=0.375$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.875$

$$\begin{aligned}P[(A\cup B)(S-AB)]&=P(A\cup B)-P[(A\cup B)(AB)]\\&=P(A\cup B)-P(AB)=0.5\end{aligned}$$

1.3 条件概率与全概率公式

1.3.1 条件概率与乘法公式

在实际问题中,往往既要考虑事件 A 的概率 $P(A)$,还要考虑在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率,而且,后者的概率与前者的概率一般未必相同,为此,我们把后者称为条件概率,记为 $P(A/B)$.

[例 1-11]　等可能地向单位正方形投点.A、B 分别表示阴影部分区域(见图 1-5).求在已知 B 发生的条件下 A 发生的概率.

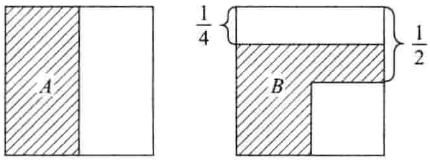


图 1-5

解　由几何概率知，无条件情况下 $P(A)=\frac{1}{2}$

当已知事件 B 发生，即点落在区域 B 中，考察问题的样本空间已不再是原来的 S，而是 B，而在 B 发生情况下 A 发生相当于点落在 $A\cap B$ 上.因此

$$P(A/B)=\frac{D(AB)}{D(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

这说明："B 发生"这个条件对 A 发生的概率发生了影响.

1.3.1.1　条件概率的定义

定义 1.7　设 E 的样本空间 S，对任意两事件 A,B，其中 $P(A)>0$，则称

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

同理，可定义

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\qquad (P(B)>0)$$

易见，条件概率 $P(A/B)$ 也具有概率的一切性质.

(1)非负性：$P(A/B)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(S/B)=1$；

(3)可列可加性：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i/B)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i/B)$$

(4)$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$

(5)一般加法公式：$P(A\cup C/B)=P(A/B)+P(C/B)-P(AC/B)$

1.3.1.2　乘法原理

由上述条件概率的公式，立即可得下述定理

$$P(AB)=P(A)P(B/A)\quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A/B)\quad (P(B)>0)$$

此式称为概率的乘法公式，此式可以推广到多个事件的情形，例如，

当 $P(AB)>0$　(此时 $P(A)\geqslant P(AB)>0$)时，有

$$P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

一般地，当 $n\geqslant 2$ 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，用数学归纳可证，得：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1),\cdots,P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

［例 1 - 12］ 某车厢内共有三个孩子，已知其中至少有一个是女孩，求至少有一个男孩的概率(假设一个小孩为男孩或女孩是等可能的)

解　设 $A=\{$至少有一个女孩$\}$，$B=\{$至少有一个男孩$\}$，则 $\overline{A}=\{$三个全是男孩$\}$，$\overline{B}=\{$三个全是女孩$\}$

于是：　$P(\overline{A})=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$，$P(\overline{B})=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$

"至少有一个是女孩，且至少有一个是男孩"的事件为 AB，因为 $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$，因此，

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})]$$

$$=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

从而，在已知至少有一个为女孩的条件下，求至少有一个是男孩的概率为

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$$

［例 1 - 13］ 袋中有 n 个球($n-1$ 个白球，1 个红球)，n 个人依次从袋中各随机地取一球，并且每人取出一球后不再放回袋中，试求第 k 人取得红球的概率．

解　设 $A_k=\{$第 k 人取得红球$\}$，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A_1)=\frac{1}{n}$$

因为 $A_2\subset\overline{A}_1$，故 $A_2=\overline{A}_1A_2$　所以

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

同理　$P(A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

……

$$P(A_n)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1),\cdots,P(\overline{A}_{n-1}/\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-2})P(A_n/\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1})$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2-(n-3)}{n-(n-2)}\cdot\frac{1}{n-(n-1)}=\frac{1}{n}$$

这就是说，每个人取到红球的概率相等，与抽取的先后次序无关，从而用乘法公式来再一次说明“抽签原理”的正确性．

1.3.2　全概率公式和贝叶斯公式

下面介绍在实际中经常用到的两个计算概率的重要公式．

1.3.2.1　全概率公式

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件．如果

(1) $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,(i,j=1,2,\cdots,n)$；

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$.

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分．

定理 1.1　(全概率公式)设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\cdots+P(B_n)P(A/B_n)$$

证明　　因为 $A=SA=(B_1\cup B_2\cup,\cdots,\cup B_n)A=B_1A\cup B_2A\cup,\cdots,\cup B_nA$

由假设 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $(AB_i)(AB_j)=\varnothing,i\neq j$，得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1A)+P(B_2A)+\cdots+P(B_nA)\\&=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\cdots\\&\quad+P(B_n)P(A/B_n)\end{aligned}$$

可见，若直接求 $P(A)$ 有困难，但容易找到 S 的一个划分 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，且 $P(B_i)$、$P(A/B_i)$ 容易求得，则可用上述公式计算 $P(A)$.

[例 1-14]　盒中有 12 个乒乓球，其中有 9 个是新球，第一次比赛时从中任取 3 个，用后仍放回盒中，第二次比赛时再从盒中任取 3 个，求第二次取出的球都是新球的概率．

解　设 $A_i=\{$第一次取出的 3 个球中有 i 个新球$\}(i=0,1,2,3)$，$B=\{$第二次取出的球都是新球$\}$.

由题意　$$P(A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\qquad(i=0,1,2,3)$$

而　$$P(B/A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

由全概率公式，有 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B/A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}\approx$ 0.145 8

值得注意的是：全概率公式可直观地解释为：只要知道了各种原因发生的条件下事件 A 发生的概率及各种原因发生的概率，即可求得事件 A 的概率．

现在考虑上述问题的“逆问题”：如果已知各种“原因”概率，又假设在进行随