

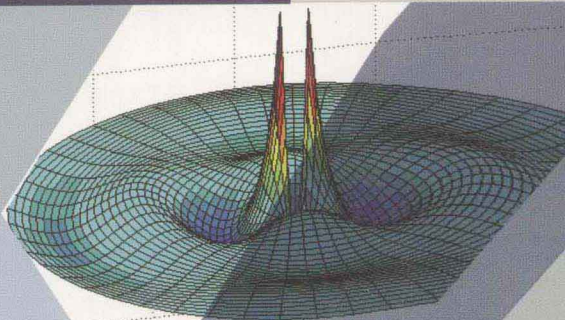


浙江省“十一五”重点教材建设项目

大学工科数学核心课程系列教材

# 数学物理方程

主 编 徐定华



 高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



浙江省“十

大学工科数学

# 数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

主 编 徐定华  
副主编 葛美宝 徐映红  
编 者 陈瑞林 韩亚洲 刘唐伟 支文英



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书集作者长期教学经验和研究成果,吸收国内外数学物理方程及其相关领域的精华,在把握数学思想、提炼数学方法、剖析数学难点、展示数学应用、促进学生研究性学习等方面做了系统设计和稳妥处理,按照四篇(模型篇、方法篇、应用篇、延伸篇)共十三章展开。

本书提出了以“融合背景、剖析思想、多维表达、多层训练”为主要内容的教学设计思想,注重数学物理方程建模与巧妙应用,体现数学思想美。注重数学公式、数值计算、图形动画相结合,克服传统教材“公式腿长、图形腿短、数值更短”的缺陷,力图通过数学内容的多维表达让学生透彻理解数学理论与方法。设置了应用篇和延伸篇,并在每章开始、结尾分别撰写了科学家名言、数学史与科学家故事、多层次训练题,激发学生生活学活用数学的兴趣,更好地培养学生的数学素养。

本书可供普通高校,特别是以培养创新应用型人才为目标的本科院校的理工类本科生或研究生使用,也可作为数学类本科专业学生的教材或参考书、教师和科技工作者的参考资料。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 / 徐定华主编. -- 北京:高等教育出版社,2013.11

ISBN 978-7-04-038580-9

I. ①数… II. ①徐… III. ①数学物理方程—高等学校—教材 IV. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 244237 号

策划编辑	杨波	责任编辑	杨波	特约编辑	董达英	封面设计	赵阳
版式设计	余杨	插图绘制	尹莉	责任校对	窦丽娜	责任印制	韩刚

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 廊坊市文峰档案印务有限公司  
开本 787mm×960mm 1/16  
印张 13.75  
字数 250千字  
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598  
网址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landrac.com>  
<http://www.landrac.com.cn>  
版次 2013年11月第1版  
印次 2013年11月第1次印刷  
定价 22.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 38580-00

# 学数学需掌握理论与方法,更要培养数学素养

——“大学工科数学核心课程系列教材”序言

我国于2010年颁布了《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》,教育部2011年开始实施了《高等学校本科教学质量与教学改革工程》,2012年又出台了“教育部关于全面提高高等教育质量的若干意见”。这为我国实现高等教育强国目标提出了战略部署,为高校培养具有实践能力、创新精神、国际视野的高素质高级专门人才提出了更高要求。我国高等教育进入大众化教育阶段的新形势、新任务,让我们深刻地感受到新一轮教育教学改革的必要性和紧迫性,也为大学工科数学教育教学改革明确了方向。

根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“大学数学基础课程教学基本要求”,结合本科高校的特点,以培养高素质应用型人才、复合型人才和卓越工程师为目标,浙江省高等学校数学类专业与数学基础课程教学指导委员会组织编写了大学工科数学核心课程系列教材,含《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》与《数学软件与大学数学实验》。本系列教材融合了编者的长期教学经验和教学改革成果,着眼于培养学生学习能力、实践能力和创新能力,让学生不仅学会数学知识、理论与方法,还使其数学思想和数学思维得到培养。该系列教材的特点可概括如下:

(1) **问题驱动,融合背景。**在内容的编排上既考虑如何与中学衔接,又考虑到内在的逻辑关系,并注意到专业后续课程的需要。教材注重讲解“如何应用基本理论和方法分析与解决实际问题”的思想方法,适度增加工程技术应用领域中的案例、具有趣味性和活学活用的数学建模内容。融入数学建模方法,增加MATLAB数学软件介绍,培养学生运用其理论和方法解决实际问题的能力。内容力求简明,削减一些公式演算内容,降低对一些定理、公式的证明和一些数学表达形式的要求,使学生在正确理解的基础上,能够熟练地应用基本理论与方法。

(2) **剖析思想,深入浅出。**突出思想性,保持严谨性,着力揭示数学思想与概念的本质和解决问题的思想方法,充分体现数学理论的“源”与“流”的关系。为了使学生的数学思维得到必要的训练,教材的叙述与推理保持应有的严谨性,对于某些重要结论仍保留必要的分析、证明与讨论。讲解力求深入浅出,富有启发性。教材编写尽力从学生熟悉的实例和知识出发,用其熟悉的语言、知识、思

想方法或直观的几何形象,凭借联想、类比等思维方法,进行自然的、合乎规律的扩展和深化;尽量以问题为导向,采用“提出问题、讨论问题、解决问题”的方式来展开,以适应学生的思维习惯;语言叙述力求直观清晰、通俗易懂。

(3) **体例新颖,强化训练。**以加强学生数学素养的养成、综合应用能力的增强为目标,设计新体例。新体例将充分体现问题引入、数学模型、理论与方法、综合训练、拓展阅读、研究性学习等特点。注重基本运算能力的培养,特别注重数学思想方法的培养,以适量的应用实例为学生提供应用能力训练的素材;为培养学生的综合能力,精心设计了各种不同类型的习题,包括基本理论题、有一定难度的综合题和研究性应用题。书中附录编入 MATLAB 上机演练与实验题目。

(4) **资源丰富,实现共享。**系列教材具有丰富的课程数字化资源,教学设计能较好反映教学中重点、难点的巧妙处理。利用现代化网络技术,把这些精彩的数字教学资源(含讲稿、教案、课件、案例、专题论文和研究性课题)集成,建成一个数字化的课程教学资源网站,构建一个内容丰富的、师生共享的、“活的”课程教学环境。

该系列教材力求内容简明,体系科学合理,揭示数学思想,融入数学建模,展示思维方法,引入现代数学软件,强化应用能力和创新能力的培养,深入浅出,富于启发性,促进学生学习。本系列教材适合于高等院校工科专业的本科生,也可供理科专业和其他相关专业大学生、研究生学习。

浙江省高等学校数学类专业  
与数学基础课程教学指导委员会  
主任委员 裘松良

2012年5月15日

# 前 言

偏微分方程是描述自然科学、工程技术和社会科学中的运动变化规律的重要连续型模型,物理学、化学、材料、医学、经济学等领域中的许多原理和规律都可以描述成偏微分方程的相应定解问题。

数学物理方程是高等学校不少理工科专业(如数学、物理学、力学、控制、电子信息类专业)的重要基础理论课,其内容主要取材于偏微分方程理论与方法。微分方程理论性强,涉及众多学科领域,建模灵活;模型复杂,类型众多;内容丰富,求解冗长;背景广泛,结果分析综合性强。这些特点要求教材编写和教学方法要有新思路、新举措。为此,我们对本教材进行了大胆而稳妥的处理,并提出了针对本课程的教学设计思想,即“融合背景、剖析思想、多维表达、多层训练”,简称 BIMM 教学设计(Background integration, Idea interpretation, Multidimensional description, Multilevel training)。遵循上述教学设计思想,本教材力求在“体现数学思想、提炼数学方法、剖析数学难点、展示数学应用”四个方面有新突破,并强调数学内容的创意处理与数学理论的表达技术相结合,两者缺一不可。

本教材的教学设计重点有二:数学内容处理要有创意——体现数学思想美和数学的巧妙应用;图形数值表达要清晰准确——让深奥内容易懂,让学生透彻理解数学理论与方法,拓展数学思维,培养创新能力。坚持文字叙述、公式表达、数值表述、图形与动画呈现等方式相结合,克服传统教材“公式腿长、图形腿短、数值更短”的严重缺陷。同时每章篇首、篇尾分别撰写了科学家名言、数学史与科学家故事,以更好地培养学生数学素养,激发学生对数学、科学的热爱。

本教材的编写目标:方便教师教,更方便学生自学,体现学生自主学习、研究性学习的特点;体现新体系、新视野、新特色,激发学生学习兴趣。本教材定位:非数学类专业(理工类本科生或研究生)教材,学时为 32~48(2~3 个学分);也可作为数学类本科专业学生的教材或参考书。

本教材的编写原则如下:

融合背景,内容精炼。数学物理方程课程的教学目标定位是承上启下,联系实际,面向前沿。一方面让课程的内容紧贴工程实际,使学生从生活中去体悟数学,另一方面让课程的内容面向学科前沿、科研热点,培养学生的理论分析能力、解决问题能力和创新能力。如热传导、烟雾扩散、半导体内杂质扩散、膜振动、声

波传播、交通流、电磁波及若干类数学物理反问题等。

**剖析思想,深入浅出。**偏微分方程本身蕴含着丰富的数学思想,如数学建模的思想、复杂问题简化的思想、定解问题适定性的思想、级数与积分敛散性的思想、公式解与数值解的思想等。教师应当以数学知识为载体,有意识地引导学生将隐藏在知识背后的数学思想挖掘、提炼、概括出来,使之由隐形态变为显形态,使学生由对数学知识、数学方法的朦胧感受与死记硬背转化为明晰的理解、掌握和灵活运用,最终完成对数学知识、数学方法的本质把握。比如,对于综合性强的复杂问题,我们常常将它分解为几个简单问题,通过解决简单问题来完成复杂问题的求解与分析;对于复杂、难理解的新问题,我们常通过适当的变换转化为简单而又为大家熟知的、已经解决过的问题。再如,我们不让学生肤浅地记忆适定性的内涵(解的存在性、唯一性、稳定性),而特别强调适定问题的具体工程背景、不适定问题的广泛存在性,通过举例与分析让学生增强对数学建模、适定性理论、求解方法的理解,为学生生活活用数学打下基础。

**多维表达,启发思维。**单一死板、灌输式的教学难以培养出能力强、素质高的学生。让学生学会学习,教师首先要改革教学方法,进行教学方法的设计与选择。结合实际背景,精讲课程内容,对重点核心的内容采用多种表达形式进行阐述,对同一个问题采取不同的求解方法,利用同一方法求解多个不同问题,让学生逐步掌握课程的核心内容和数学本质,达到全面理解、熟练掌握的目的。比如对于物理现象的数学模型表达、规律分析、结果解释,我们坚持数形结合、公式与图形结合、符号与控制结合。再如模型求解与分析,我们尝试了解析解或数值解,实现结果或过程的可视化,以解释物理现象或工程技术规律。表达的多角度、多维度能起到启迪思维的效果,必将受到学生的欢迎。

**多层训练,鼓励探究。**在教学中,把建模训练、理论分析训练、求解模型训练和计算机模拟训练有机地结合在一起,让学生进行多层训练,并鼓励探究。这样不仅能培养学生的数学思维能力,而且让学生体会到数学在解决实际问题中的巨大作用,了解通过数学建模解决实际问题的全过程。既让学生学会求解各种微分方程的解析解或数值解的方法,又让他们掌握用计算机分析求解的思想和过程。根据上述教学设计思想与策略,整合了教学内容,编写出内容更新的数学物理方程教材,鼓励学生进行多层训练,完成开放性应用题,讨论、分析并解决一些小课题。我们建成了一个数字化的课程教学资源网站(<http://4a.zstu.edu.cn>),含课程讲稿、教案、课件、案例、大作业、小课题、专题论文、解的可视化(图形或动画)、程序集等,其教学设计反映了教学中重点、难点的巧妙处理,基于此构建了一个内容丰富的、师生共享的、“活的”课程教学生态环境。

本教材的学习建议如下:第一章至第七章是本课程的核心教学内容,在教学

方法上强调启发指导、师生互动,让课堂活起来,让学生忙起来,让思维激发出来,让资源丰富起来(简称“4A”课程,active class, active students, arousing thinking, abundant resources)。第八章至第十三章是本课程的应用背景和延伸内容的简介,建议在教师的指导下以学生自学为主。建议不同要求的专业选择合适的教学内容:32学时课程可修读第一章至第七章,48学时课程可修读第一章至第九章以及后面的部分章节内容。

本书由徐定华(浙江理工大学)任主编,葛美宝(浙江医学高等专科学校)和徐映红(浙江理工大学)任副主编。徐定华编写了前言、第一、二、四、六、十二、十三章和第五章(第1、2节),对本书进行了统稿;韩亚洲(中国计量学院)、徐映红、刘唐伟(东华理工大学)分别编写了第三章与第五章(第3、4节)、第七章与第八章、第十章与第十一章。各章的数值实现与图形绘制由葛美宝完成,他还撰写了第九章。名家名言与史料趣话由陈瑞林(浙江理工大学)、支文英(浙江理工大学)编写。

本书得到了浙江省高等学校数学类专业与基础数学课程教学指导委员会的支持和指导,高等教育出版社数学分社的领导和编辑们为本书的出版付出了辛勤劳动,复旦大学谭永基教授、程晋教授,吉林大学马富明教授,解放军理工大学黄思训教授,电子科技大学黄廷祝教授仔细审阅了本教材并提出了中肯的修改建议,在此一并致以崇高的谢意!感谢崔芃、徐嘉、文雷为本书文稿编辑付出的努力。在编写过程中,编者阅读并吸纳了国内外数学物理方程及其反问题教材、论文资料的精华,启迪和收获不小,在此向参考文献的各位作者表示衷心的感谢。

限于编者自身水平,教材中必有不足之处,敬请专家、师生和读者不吝赐教,并将意见和建议通过高等教育出版社(邮箱:yangbo@hep.com.cn)反馈给我们,以便今后有机会修订时对本书做出改进和完善。

编 者

2013年7月



## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

一个国家只有数学蓬勃地发展,才能展现它国力的强大.数学的发展和至善与国家繁荣昌盛密切相关.

——拿破仑

一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量.

——拉奥

## 目 录

### 模型篇 常见数学物理方程

第一章 科学与工程中的数学物理方程举例与基本概念 .....	3
1.1 热传导方程及其定解问题 .....	4
1.2 波动方程及其定解问题 .....	7
1.3 稳态电磁场方程及其定解问题 .....	10
1.4 扩散方程及其定解问题 .....	12
1.5 基本概念 .....	14
【史料趣话】偏微分方程的发展历程 .....	15
习题一 .....	18
第二章 叠加原理与齐次化原理 .....	20
2.1 线性定解问题的叠加原理 .....	20
2.2 非齐次方程的齐次化原理 .....	21
【史料趣话】数学家阿达玛 .....	23
习题二 .....	24

### 方法篇 数学物理方程的典型解法

第三章 分离变量法 .....	27
3.1 矩形区域上齐次方程的分离变量法 .....	27

3.2	规则区域上齐次方程的分离变量法 .....	34
3.3	非齐次方程的解法 .....	44
3.4	非齐次边界条件的处理 .....	49
3.5	泊松方程 .....	54
	【史料趣话】数学物理学家达朗贝尔与泊松 .....	57
	习题三 .....	59
<b>第四章</b>	<b>行波法</b> .....	<b>62</b>
4.1	一维波动方程柯西问题的达朗贝尔公式——行波法 .....	62
4.2	三维波动方程柯西问题的泊松公式——球面平均法 .....	67
4.3	二维波动方程柯西问题的泊松公式——降维法 .....	69
4.4	非齐次波动方程柯西问题——齐次化原理 .....	71
4.5	二阶线性偏微分方程的特征线方法 .....	73
	【史料趣话】数学家柯西 .....	75
	习题四 .....	76
<b>第五章</b>	<b>积分变换法</b> .....	<b>78</b>
5.1	傅里叶变换 .....	78
5.2	拉普拉斯变换 .....	81
5.3	傅里叶变换的应用 .....	83
5.4	拉普拉斯变换的应用 .....	86
	【史料趣话】数学物理学家傅里叶 .....	89
	习题五 .....	90
<b>第六章</b>	<b>格林函数法</b> .....	<b>92</b>
6.1	$\delta$ 函数与拉普拉斯方程的基本解 .....	92
6.2	格林公式与调和函数的表示 .....	95
6.3	格林函数与拉普拉斯方程解的表示 .....	98
	【史料趣话】数学家格林 .....	103
	习题六 .....	104
<b>第七章</b>	<b>差分解法初步</b> .....	<b>106</b>
7.1	差分方法的基本思想 .....	106
7.2	一些典型定解问题的差分法 .....	109
	【史料趣话】数学家欧拉 .....	120
	习题七 .....	122

## 应用篇 数学物理方程的若干应用专题

第八章 科学与工程中的若干应用专题 .....	127
8.1 张力和压力作用下的膜动力学方程 .....	127
8.2 烟雾浓度的扩散模型 .....	128
8.3 交通流模型 .....	130
8.4 半导体内杂质扩散方程 .....	131
8.5 亥姆霍兹方程 .....	133
【史料趣话】数学家希尔伯特 .....	134
第九章 数学物理方程反问题简介 .....	136
9.1 反问题举例 .....	136
9.2 热传导方程反问题 .....	138
9.3 波动方程反问题 .....	144
9.4 拉普拉斯方程反问题 .....	148
【史料趣话】反问题趣话 .....	151
习题九 .....	151

## 延伸篇 正交规范基与积分方程

第十章 正交规范基与特殊函数简介 .....	155
10.1 向量空间 $\mathbf{R}^n$ 及其正交规范基 .....	155
10.2 函数空间的正交规范基 .....	157
10.3 几类特殊函数及其图形表示 .....	159
【史料趣话】数学家贝塞尔、勒让德与埃尔米特 .....	165
习题十 .....	167
第十一章 特征值与特征函数 .....	168
11.1 典型常微分方程特征值问题 .....	168
11.2 施图姆-刘维尔特征值问题 .....	171
【史料趣话】施图姆-刘维尔理论的创始人 .....	173
习题十一 .....	174
第十二章 积分变换的性质与应用 .....	175
12.1 傅里叶变换的性质与证明 .....	175
12.2 积分变换的例题 .....	176

---

12.3 积分变换简表 .....	180
【史料趣话】数学物理学家拉普拉斯 .....	184
习题十二 .....	186
<b>第十三章 积分方程初步</b> .....	<b>188</b>
13.1 积分方程的基本概念 .....	188
13.2 第二类弗雷德霍姆型积分方程逐次逼近法 .....	189
13.3 第一类弗雷德霍姆型积分方程的特征 .....	191
【史料趣话】积分方程先驱弗雷德霍姆 .....	193
习题十三 .....	193
<b>部分习题提示</b> .....	<b>195</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>203</b>

# 模型篇 常见数学物理方程



现代高能物理到了量子物理以后,有很多根本无法做实验,在家用纸笔来算,这跟数学家想象的差不了多远,所以说数学在物理上有着不可思议的力量.

——邱成桐

## 第一章 科学与工程中的数学物理 方程举例与基本概念

数学物理方程来源于科学、技术、工程诸多领域. 本章以热传导、波动、电磁场分布、物质扩散为例介绍数学物理方程及其定解问题的数学归结,并介绍方程分类、基本概念与偏微分方程发展简史.

数学物理方程常通过物理模型所遵循的物理定律来建立. 常用的几个物理定律列举如下:

(1) 牛顿(Newton)第二运动定律:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

(2) 胡克(Hooke)定律:在弹性限度内,弹性体的张应力与弹性体的形变量(即相对伸长)成正比,即张应力=杨氏模量×相对伸长.

(3) 傅里叶(Fourier)热传导定律:在时间  $dt$  内,通过面积元  $dS$  流入小体积元的热量  $dQ$  与沿面积元外法线方向的温度变化率  $\frac{\partial u}{\partial n}$  成正比,也与  $dS, dt$  成正比,即

$$dQ = k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt,$$

其中  $k$  是导热系数,由物体的材料决定.

(4) 牛顿冷却定律:单位时间内从周围介质传播到边界上单位面积的热量  $dQ$  与边界和外面的温度差成正比,即

$$dQ = H(u_1 - u|_r),$$

其中  $u_1$  是外界介质的温度,  $u|_r$  为边界  $\Gamma$  上的温度,  $H$  为比例系数.

(5) 菲克(Fick)扩散定律:单位时间内扩散流过某横截面的杂质量  $m$  与横截面  $S$  和浓度梯度  $\frac{\partial u}{\partial n}$  成正比,即



$$m = -DS \frac{\partial u}{\partial n},$$

其中  $D$  为扩散系数, 负号表示扩散是向着杂质浓度减少的方向进行的.

(6) 高斯(Gauss)静电场定律: 通过任一闭曲面的电通量等于这个闭曲面所包围的自由电荷电量的  $\frac{1}{\varepsilon}$  倍, 即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho dV,$$

其中  $\varepsilon$  为电荷所处介质的介电常数,  $\rho$  为电荷体密度.

## 1.1 热传导方程及其定解问题

### 一、三维热传导方程

设空间中有一均匀的、各向同性的物体  $G$ , 其内部有热源, 与周围没有热交换. 函数  $u(x, y, z, t)$  表示物体  $G$  内某点  $M(x, y, z)$  处在时刻  $t$  的温度值.

由于物体  $G$  内各点处的温度不同, 则热量从温度较高的点处向温度较低的点处传播, 这种现象称为热传导.

利用微元法对热量传递进行分析, 取  $G$  内任一点  $M$  附近的体积元  $\Omega$ , 其边界为  $\Gamma$ , 如图 1.1 所示.

热传导按傅里叶定律进行: 在充分小时段  $dt$  内流过一个充分小曲面面积  $dS$ , 流过的热量与沿法线方向  $\mathbf{n}$  的方向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  成正比, 即

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt,$$

其中  $k(x, y, z)$  为物体在点  $M(x, y, z)$  处的热传导系数,  $k > 0$ . 当物体为均匀的且各向同性时,  $k$  为常数.

因此从时刻  $t_1$  到时刻  $t_2$ , 经过曲面  $\Gamma$  流入区域  $\Omega$  的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iint_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} dS \right] dt.$$

又设热源密度(单位时间单位体积中所产生的热量)为  $F(x, y, z, t)$ , 则在时间间隔  $(t_1, t_2)$  中区域  $\Omega$  内所产生的热量为

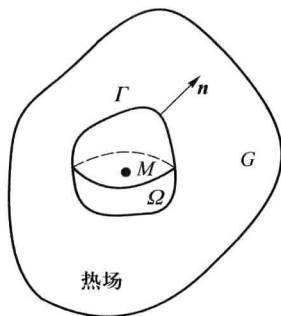


图 1.1 区域  $G$  内热场示意图