

胡術五
余介石
張通謨
編著

復興高級中學
幾何學

商務印書館發行

胡術五
余介石
張通謨
編著

復興高級中學
幾何教科書

何學



胡術五



商務印書館發行

中華民國二十三年七月初版
中華民國二十四年五月增訂二版

周

(57021.2)

高級中學用

復興幾何學 一冊

每冊定價大洋壹元貳角

外埠酌加運費匯費

編著者

胡術通 余介石 張謨

主編兼
發行人

王雲五
上海河南路

印刷所

商務印書館
上海河南路

發行所

商務印書館
上海及各埠

版 翻
權 印
所 必
有 究

編 輯 大 意

(一)本書係完全按照最近部頒課程標準編輯,適合高中一年級之用。

(二)按部頒標準,高中一年級上學期每週授幾何三小時,下學期每週授幾何二小時,內容分平面幾何,立體幾何二部,而在實施方法概要中,則明言立體幾何可僅授大意,故本書將平面,立體兩部份,酌量分配,平面部份約占全書 $\frac{2}{3}$, 立體部份約占 $\frac{1}{3}$, 以備高中一年級上下學期之用。

(三)部頒標準規定,高一幾何三角並授,故本書力求與本館出版的高中三角切實聯絡,同時採用,可收互相啓發之益。

(四)幾何一科最重系統,初高中所授教材應有親切的聯絡,本書與徐子豪女士和著者合編的復興初中幾何密相銜接,已習過該書者,進修本書,更易得益。

(五)初中幾何因教授時間及學生程度關係,理論未能周備,本書對此頗爲注意,如對不可通約量等理,皆

有較完密的討論，但仍以學生程度所能了解爲限。

(六)軌跡與作圖最足發展學生探求發明的能力，本書特立專編，詳加研究。

(七)本書純用簡潔白話講解，使學者不致生文字上的困難，以阻礙其學習的興趣。

(八)算理專名，尙無標準漢譯，本書所用名詞，概從最通用者，並於初見時，附註英文原名。

(九)此次部頒課程標準，高中算學部份，幾何中平面部份編制最爲新穎，故中西佳著雖多均不能供他山攻錯之用，編時至感困難，著者雖係該案起草之一人，亦深苦不易着手，祇以學校需要甚急，復承段師撫羣之督責與指導，不得不勉力以赴，倉卒成書疵謬定所不免，敬乞海內方家及教師嚴加指正。

(十)本書論極大極小及對稱兩部份大體根據 Schultze-Sevenoak-Schuyler: Plane Geometry, 每習題前之證題示意亦係師此書中 Method of proof 之意 (見該書 70, 75, 76, 77, 94, 93 等節)。立體幾何則以 L. D. Haertter: Solid Geometry 爲藍本。謹附誌於此，以示不敢掠美。

民國二十四年冬編者謹識

目次

平面幾何學

第一編 緒論 1—13

1. 爲什麼要學幾何? 2. 基本元素. 3. 定義. 4. 無定義的名詞. 5. 幾何的抽象性. 6. 定理與問題. 7. 證法的基礎. 8. 普通公理. 9. 幾何公理. 10. 作圖公法. 習題一. 11. 幾何學派別. 12. 幾何命辭. 13. 命辭的通式. 14. 命辭四式. 15. 四式關係. 16. 相關命辭的真妄. 17. 符號. 習題二.

第二編 直線形.....14—63

18. 直線. 19. 角. 20. 角的名稱. 21. 平角相等定理. 22. 相關兩角的名稱. 23. 對頂角定理. 24. 關於角的定理. 習題三. 25. 三角形. 26. 三角形的分類. 27. 全等形. 28. 全等三角形定理一. 29. 疊合法. 30. 全等三角形定理二. 31. 等腰三角形定理. 32. 等腰三角形逆定理. 33. 全等三角形定理三. 34. 垂線, 中

線. 習題四. 35. 求作一線段與一已知線段等長. 36. 求平分一已知線段. 37. 求平分一已知角. 38. 求由一已知線上一點作一角等於一已知角. 39. 求於一已知線上一已知點作這線的垂線. 40. 求於一已知線外一已知點作這線的垂線. 習題五. 41. 三邊關係定理. 42. 外角定理. 43. 邊角關係定理. 44. 邊角關係逆定理. 45. 非全等三角形定理. 46. 非全等三角形逆定理. 47. 證辭通法. 48. 直接證法. 49. 間接證法. 習題六. 50. 平行線. 51. 三線八角. 52. 平行判別定理. 53. 平行線作圖. 54. 平行性質定理. 55. 相交線判別定理. 56. 三線平行定理. 57. 三角形內角和定理. 58. 全等直角三角形定理一. 59. 全等直角三角形定理二. 60. 全等直角三角形定理三. 習題七. 61. 四邊形. 62. 多邊形. 63. 平行四邊形性質定理. 64. 平行四邊形判別定理. 65. 平行線段內等線段定理. 66. 分一已知線段爲若干等分. 67. 全等平行四邊形定理. 68. 多邊形內角和定理. 習題八. 69. 軌跡. 70. 軌跡定理的充要性. 71. 分角線軌跡定理. 72. 垂直平分線軌跡定理. 73. 三角形內心定理. 74. 三角形外心定理. 75. 三角形重心定理. 76. 共點線, 與共線

點. 77. 梯形中線分對角線定理. 習題九.

第三編 圓 64—93

78. 圓. 79. 關於圓的線與角. 80. 關於圓與圓.
81. 圓徑定理. 82. 等圓定理. 83. 全等圓定理. 84. 圓
心定理. 85. 圓與點關係定理. 86. 直徑分圓定理.
87. 圓心角對弧定理. 88. 圓心角對弧逆定理. 89. 弧
對弦定理. 90. 弧對弦逆定理. 91. 垂徑分弦定理.
92. 作圖題. 93. 弦心距定理. 94. 弦心距逆定理. 習
題十. 95. 幾何度量. 96. 有理數, 無理數. 97. 公度.
98. 極限. 99. 圓心角定理. 100. 切線定理. 101. 切線
長. 102. 切線長定理. 103. 弦切角定理. 104. 圓周角
定理. 105. 作圖題. 106. 平行截弧定理. 107. 圓內角
定理. 108. 圓外角定理. 109. 連心線定理. 110. 共圓
點與共點圓. 111. 九點圓. 112. 西摩松線. 113. 角的
正負. 114. 麥氏點. 習題十一.

第四編 比例及相似形 94—116

115. 比例定義. 116. 比例定律. 117. 內分與外分.
118. 三角形二邊成比例線段定理. 119. 三角形二邊

成比例線段逆定理. 120. 作圖題. 121. 三角形內(或外)分比例線段定理. 習題十二. 122. 相似多角形. 123. 相似多角形周界比定理. 124. 相似三角形判別定理. 125. 直角三角形母子相似定理. 126. 作圖題. 127. 畢氏定理. 128. 畢氏定理推廣. 129. 相交割切線段定理. 130. 交弦和交割線線段定理. 習題十三. 131. 線段的正負. 132. 孟氏定理. 133. 帥氏定理. 習題十四.

第五編 計算117—146

134. 量與數. 135. 面積. 136. 等積形. 137. 長方形比較定理一. 138. 長方形比較定理二. 139. 長方形面積定理. 140. 平行四邊形面積定理. 141. 三角形面積定理. 142. 梯形面積定理. 143. 作圖題. 144. 任意直線形及曲線形的求積. 習題十五. 145. 正多角形內角定理. 146. 相似正多角形判別定理. 147. 圓內接正多角形定理. 148. 正多角形與圓關係定理. 149. 圓內接外切正多角形定理. 150. 作圖題. 151. 正多角形面積定理. 152. 相似正多角形周界比定理. 153. 相似正多角形面積比定理. 154. 同圓的內接, 外

切正多角形的極限觀. 155. 兩圓周長比定理. 156. 圓周定理. 157. 圓面積定理. 158. 圓周率求法. 習題十六. 159. 極大, 極小. 160. 等周形. 161. 極大面積直角三角形定理. 162. 極小周界等積三角形定理. 163. 極大面積等周三角形定理. 習題十七. 164. 極大面積內接多角形定理. 165. 極大面積定邊多角形定理. 166. 極大面積等周多角形定理. 167. 等周正多角形定理. 168. 等積正多角形定理. 習題十八.

第六編 軌跡及作圖 147—190

169. 心對稱. 170. 心對稱形. 171. 軸對稱. 172. 軸對稱形. 173. 對稱基本定理. 174. 兩種對稱的關係. 習題十九. 175. 軌跡的對稱性. 176. 軌跡的探求. 177. 軌跡性質的預斷. 178. 特殊點的確定. 179. 阿氏圓. 180. 等幂軸. 習題二十. 181. 軌跡證例. 182. 爲圓的軌跡. 習題二十一. 183. 爲弧的軌跡. 184. 爲直線的軌跡. 185. 爲線段的軌跡. 習題二十二. 186. 作圖規約. 187. 不可作與無解. 188. 作圖步驟. 189. 代數解析. 190. 黃金分割. 習題二十三. 191. 軌跡交截法. 192. 軌跡交截法舉例. 習題二十四. 193. 輔助

圖法. 習題二十五. 194. 相似形法. 195. 包線. 習題二十六. 196. 變位法. 197. 反射. 198. 平移. 199. 旋轉. 習題二十七. 200. 等積變圖. 習題二十八.

立體幾何學

第七編 空間直線與平面 191—226

201. 立體幾何. 202. 平面. 203. 平面公理. 204. 平面決定法. 205. 直線與平面的相交. 206. 垂直. 習題二十九. 207. 垂面確定定理. 208. 垂線成面定理. 習題三十. 209. 面上垂線定理. 210. 斜線定理. 211. 點面距離. 習題三十一. 212. 直線與平面的平行. 213. 不相交直線. 214. 同面垂線定理. 習題三十二. 215. 平行線面定理. 216. 不相交線定理. 習題三十三. 217. 同線垂面定理. 218. 截線平行定理. 219. 角邊平行定理. 220. 平行截面定理. 習題三十四. 221. 二面角. 222. 二面角的平面角. 223. 平面角定理. 224. 二面角的相等. 225. 相等二面角定理. 226. 二面角的分類. 227. 二面角的度量. 228. 垂面含線定理. 習題三十五. 229. 含垂線面定理. 230. 垂面交線定

理. 231. 過線垂面定理. 232. 射影. 233. 直線與平面交角. 習題三十六. 234. 不相交線距離定理. 235. 基本軌跡. 習題三十七.

第八編 多面角,多面體 227—253

236. 多面角. 237. 全等多面角. 238. 對稱多面角. 239. 三面角面角定理. 240. 多面角面角和定理. 241. 全等三面角定理. 習題三十八. 242. 多面體. 243. 正多面體. 244. 角柱. 245. 特殊角柱. 246. 截面. 247. 斷角柱. 248. 角柱平行截面定理. 習題三十九. 249. 角柱側面積定理. 250. 全等角柱定理. 251. 體積. 252. 等積直角柱定理. 253. 平行六面體. 254. 平行六面體對面定理. 習題四十. 255. 平行六面體等分定理. 256. 長方體體積. 257. 角柱體積. 習題四十一. 258. 角錐. 259. 角錐截面定理. 260. 角錐臺. 261. 正角錐. 262. 正角錐側面定理. 習題四十二. 263. 角錐體積. 264. 角錐臺體積. 習題四十三.

第九編 柱面,錐面,球 254—288

265. 柱面. 266. 柱. 267. 特殊柱. 268. 圓柱的切面. 269. 圓柱與角柱. 270. 圓柱的極限觀. 271. 圓柱

的度量. 習題四十四. 272. 錐面. 273. 錐. 274. 特殊錐. 275. 圓錐截面定理. 276. 圓錐的切面. 277. 圓錐與角錐. 278. 圓錐的極限觀. 279. 圓錐的度量. 習題四十五. 280. 錐臺. 281. 角錐臺與圓錐臺. 282. 圓錐臺的極限觀. 283. 圓錐臺的度量. 284. 旋轉面. 285. 直圓錐與直圓錐臺側面積的又一公式. 286. 相似直圓柱及錐. 287. 相似直圓柱與錐的側(或全)面積比及錐體積比. 習題四十六. 288. 球. 289. 球的特性. 290. 球的截面定理. 291. 大圓. 292. 極. 293. 二點定大圓定理. 294. 球面距離. 295. 極距離. 296. 大圓特性. 習題四十七. 297. 小圓極距離定理. 298. 大圓極點定理. 299. 切線, 切面. 300. 切面定理. 301. 球與多面體. 302. 四面體內切球定理. 303. 切球. 習題四十八. 304. 四面體外接球定理. 305. 球多角形. 306. 球三角形各邊關係定理. 307. 球面上兩點距離定理. 308. 球面幾何學. 309. 非歐幾何學. 習題四十九. 310. 鼓壁. 311. 球面積. 312. 球面積定理. 313. 月形. 314. 球度. 習題五十. 315. 球體積. 316. 球體積定理. 317. 球面角錐. 318. 梳形. 319. 漏斗形. 320. 鼓體. 習題五十一

附錄一 立體幾何公式彙覽	239—291
附錄二 索引(附英文原名)	292—296



平面幾何學

第一編 緒論

基本觀念

1. 爲什麼要學幾何？人生的活動，都在所居的空間內，舉目所見，盡是形形色色的圖象，因此有研究空間形狀的需要，這便是幾何學 (Geometry) 的目標。我們在初級中學時候，雖已經學過許多平面上圖形的性質，但重要問題，未能詳盡解決；雖已略知空間內圖形的基本觀念，但未及爲正式研究。本書上冊對平面幾何 (Plane Geometry)，作進一步的討論，下冊對立體幾何 (Solid Geometry)，用理解方法，講授大意。

2. 基本元素。幾何中的基本元素 (Element) 爲：
點 (Point) 線 (Line) 面 (Surface) 體 (Solid)。一切幾何圖形 (Geometrical figure)，莫不由其合成。他們彼此間的關係有兩種：

(一) 靜的關係。即體以面爲界，面以線爲界，線以點爲界。

(二) 動的關係. 即點動成線, 線動成面, 面動成體.

3. 定義. 幾何學說理, 須顯明確定, 故對論及的概念, 必須先立定義. 一概念的定義 (Definition) 即其主要性質的說明, 以示別於他種概念. 一概念既有定義, 其意義已確定, 再予以適當的名詞, 則意義更明顯.

定義有三要點, 即

(一) 扼要;

(二) 恰當;

(三) 無顛倒循環的毛病.

譬如說首尾銜接的曲線是圓, 就未講到圓的主要性質; 說平行四邊形中, 一組對邊平行, 一組對邊相等, 則嫌不夠, 但如當作梯形的定義, 又犯條件太多的毛病. 至於顛倒循環的毛病, 初學更宜留意. 有些書上說, 直線是有一定方向的線, 不知必先有直線的概念, 纔可以定方向; 又如說, 不曲的線則為直線, 這句話固然不錯, 卻是不能算定義, 因為曲線的定義是不直的線 (詳細的講法, 應說線上無一段為直線的, 叫曲線), 豈不是如上面的定義, 成一循環麼?

4. 無定義的名詞. 如上所述, 一概念的定義, 必賴他種概念, 為其說明, 照這樣遞推, 豈非永無底止. 因此

我們必須假設有若干基本概念，意義已極明確，不須再加說明，其實係無法再為說明。這些概念，叫他做原名 (Primary notion)，如點，線，面，直線等皆是。

5. 幾何的抽象性。幾何為論空間形態的科學，而非論物體的本質。實在的物體，雖可比擬幾何圖形，兩者實非一事。幾何中所說的點無大小，線無粗細，面無厚薄，皆與實物本性相背。所以幾何圖形，皆實物的抽象。

幾何雖只論抽象的概念，但是所得結果，對於實際方面，應用極大。因為實體形態上特性，不因抽象成概念後而失，而概念乃實物一理想的標準，故抽象之結果，仍得致用於具體的實物。

6. 定理與問題。幾何學研究圖形狀態，不外兩種問題：

(一) 定理 (Theorem)。已知一圖形有某種性質，而推證他必更有別種指定的性質，便成為定理。已知的性質，假設以為推理的前導，叫做前提 (Hypothesis)；求證所指定性質，是由假設可得而證明的必然結果，叫做結論 (Conclusion)。例如設已知一三角形有二邊相等為前提，則可證明對等邊的角必是相等的結論，合前提