"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何 下册

第三版

孟道骥 著

科学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何

(下 册)

(第三版)

孟道骥 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

数学分析、高等代数与解析几何是大学数学系的三大基础课程. 南开大学数学系将解析几何与高等代数统一为一门课程, 此举得到了同行们的普遍认同, 本书就是这种思想的尝试.

本书分上、下册, 第 1 章讨论多项式理论; 第 2 章介绍行列式, 包括用行列式解线性方程组的 Cramer 法则; 第 3 章矩阵, 主要介绍矩阵的计算、初等变换及矩阵与线性方程组的关系; 第 4 章介绍线性空间; 第 5 章介绍线性变换; 第 6 章多项式矩阵是为了讨论复线性变换而设的; 第 7 章介绍 Euclid空间; 第 8 章介绍双线性函数与二次型; 第 9 章讨论二次曲面; 第 10 章介绍仿射几何与射影几何. 本书附有相当丰富的习题.

本书可供高等院校数学系学生用作教材, 也可供数学教师和科研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等代数与解析几何（上、下册）/孟道骥著. —3 版. —北京：科学出版社, 2014.3

（“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材·南开大学数学教学丛书）

ISBN 978-7-03-039766-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孟… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 026688 号

责任编辑：王 静／责任校对：钟 洋

责任印制：阎 磊／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998 年 8 月第一版 开本：720 × 1000 B5

2007 年 1 月第二版 印张：31

2014 年 3 月第三版 字数：622 000

2014 年 3 月第十六次印刷

定价：54.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目录

（下 册）

第5章　线性变换

所谓线性变换就是一个线性空间到自身的同态映射 (即线性映射). 线性变换除线性映射的一般性质外, 还有许多特殊的性质, 如特征值, 特征向量, 不变子空间等. 另外, 就是将线性变换具体化为方阵, 利用线性变换的方阵表示给出线性变换的分类理论.

线性变换是线性代数中很重要的很精彩的理论, 线性变换的用处也极为广泛.

5.1　线性变换的定义

定义 5.1.1　设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间. $\mathcal{A}$ 是$\boldsymbol{V}$ 的一个变换 (即 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的映射), 并满足:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathcal{A}\boldsymbol{\beta},\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}; \tag{1}$$

$$\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\ \forall k\in\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}. \tag{2}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是$\boldsymbol{V}$ 的一个**线性变换**.

等式 (1), (2) 分别叫做 $\mathcal{A}$ **保持加法与保持纯量乘法**.

例 5.1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{P}^{n\times n}$, 定义 $\boldsymbol{P}^{n\times 1}$ 中变换 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{P}^{n\times 1},$$

则 $\mathcal{A}$ 是 $\boldsymbol{P}^{n\times 1}$ 的一个线性变换.

例 5.2　在 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中取定一个元素$\boldsymbol{A}$, 定义 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中变换 $\mathrm{ad}\boldsymbol{A}$ 如下:

$$\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA},\ \forall\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{P}^{n\times n}.$$

则由

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}\\=&(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})+(\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA})=\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})+\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})\\\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=&\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})-(k\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=k\mathrm{ad}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

知 $\mathrm{ad}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 的线性变换.

例 5.3 在平面上取定直角坐标系 XOY. 每个平面向量均由过原点 O 的向量表示, 将每个向量绕原点 O 旋转 θ 角, 这样得到平面向量空间的一个变换, 记为 I_θ, 如图 5.1 所示.

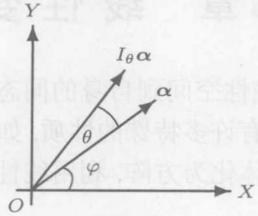

图 5.1

设向量$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 r, 幅角为 φ, 则$\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. $I_\theta\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 r, 幅角为 $\theta+\varphi$, 因而坐标为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

由此不难看出 I_θ 是一个线性变换.

例 5.4 在空间取定直角坐标系 $OXYZ$. 设 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha} \neq 0$, 又$\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OQ}$. 过 Q 作 OP 的垂线, 垂足为 Q_0, 称向量 $\overrightarrow{OQ_0}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的**投影**. 定义变换 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$ 为将$\boldsymbol{\beta}$ 映到 $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的投影, 记为 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}$, 如图 5.2 所示.

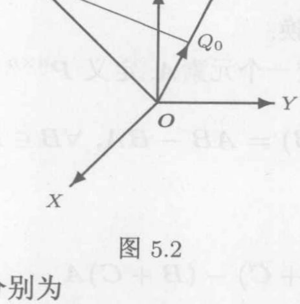

图 5.2

设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}$ 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

于是 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, 且 $|\lambda\boldsymbol{\alpha}|^2+|\overrightarrow{QQ_0}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2$. 而

$$\overrightarrow{QQ_0}=\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\lambda x_0-x\\ \lambda y_0-y\\ \lambda z_0-z\end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{aligned}&(\lambda x_0)^2+(\lambda y_0)^2+(\lambda z_0)^2+(\lambda x_0-x)^2+(\lambda y_0-y)^2+(\lambda z_0-z)^2\\=&x^2+y^2+z^2.\end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda=(xx_0+yy_0+zz_0)/(x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

因而

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}&=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}=\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\begin{pmatrix}x_0^2x+x_0y_0y+x_0z_0z\\ x_0y_0x+y_0^2y+y_0z_0z\\ x_0z_0x+y_0z_0y+z_0^2z\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\begin{pmatrix}x_0^2&x_0y_0&x_0z_0\\ x_0y_0&y_0^2&y_0z_0\\ x_0z_0&y_0z_0&z_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此知 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$ 是线性变换.

例 5.5 设 $C^\infty(a,\ b)$ 是区间 $(a,\ b)$ 上任意次可微函数的集合, 则 $C^\infty(a,b)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的无限维线性空间. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是 $C^\infty(a,\ b)$ 的变换, 由微分学知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 保持加法与纯量乘法, 故 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 是 $C^\infty(a,\ b)$ 的线性变换.

例 5.6 闭区间 $[a,\ b]$ 上全体连续函数的集合 $C[a,\ b]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 在 $C[a,\ b]$ 中定义变换 S 如下:

$$S(f(x))=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall f(x)\in C[a,\ b].$$

则由积分学知 S 保持加法与纯量乘法, 因而是 $C[a,\ b]$ 上的线性变换.

下面总假定$\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间.

零变换 0, 即 $0(\boldsymbol{\alpha})=0,\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$.

在书写时, 数零, 零向量与零变换都不加区别, 但要注意它们在意义上的区别.

恒等变换 (**单位变换**) id, 即 $\mathrm{id}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$.

显然这是线性变换, 有时也记为 $\mathcal{E}$, I.

数乘变换 k, 即将 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应到 $k\boldsymbol{\alpha}$, 这里 k 是 $\boldsymbol{P}$ 中一个固定的数. 显然, 这是线性变换. 当 $k=0$ 时, 为零变换; $k=1$ 时, 为恒等变换.

由于线性变换是一类特殊的同态映射, 故同态映射的性质对线性变换都成立, 如

$$\mathcal{A}(0)=0;$$
$$\mathcal{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha});$$
$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{r}k_i\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i);$$

$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\cdots$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 线性相关;

$\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的子空间 ($\dim\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ 称为 $\mathcal{A}$ 的**秩**, 记为 $R(\mathcal{A})$, $\operatorname{rank}\mathcal{A}$) 等.

习 题

判断 1 ~ 12 中定义的变换 $\mathcal{A}$ 是否为线性变换.

1. 在线性空间 $\boldsymbol{V}$ 中, $\mathcal{A}\xi=\xi+\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一固定向量.

2. 在线性空间 $\boldsymbol{V}$ 中, $\mathcal{A}\xi=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的一固定向量.

3. 在 $\boldsymbol{P}^{1\times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1^2,\ x_2+x_3,\ x_3^2)$.

4. 在 $\boldsymbol{P}^{1\times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1,\ x_2,\ x_3)=(2x_1-x_2,\ x_2+x_3,\ x_1)$.

5. 在 $\boldsymbol{P}[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x)=f(x+1)$.

6. 在 $\boldsymbol{P}[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x)=f(x_0)$, 其中 x_0 是 $\boldsymbol{P}$ 中一固定的数.

7. 把复数域作为复数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi=\bar{\xi}$, $\bar{\xi}$ 为 ξ 的共轭数.

8. 把复数域作为实数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi=\bar{\xi}$.

9. 在 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中, $\mathcal{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$, 其中 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{P}^{n\times n}$ 中两个固定矩阵.

10. 在 $C^{\infty}(a,\ b)$ 中
$$\mathcal{A}f(x)=\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot f(x).$$

11. 在 $C^{\infty}(a,\ b)$ 中
$$\mathcal{A}f(x)=\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\sin x\cdot f(x).$$

12. 在 $C[a,\ b]$ 中
$$\mathcal{A}f(x)=\int_a^x K(t)f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall f(x)\in C[a,\ b].$$

其中 $K(x)$ 是 $C[a,\ b]$ 的一固定函数.

13. 求 $\boldsymbol{P}[x]$ 的线性变换 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的像及核

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{P}[x]=\left\{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\middle|\, f(x)\in\boldsymbol{P}[x]\right\},$$

$$\ker\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\left\{f(x)\in\boldsymbol{P}[x]\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0\right\}.$$

14. 求 $\boldsymbol{P}[x]$ 的线性变换

$$L_x(f(x))=xf(x)$$

的像 $L_x(\boldsymbol{P}[x])$ 及核 $\ker L_x$.

5.2 线性变换的运算

设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间, $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的所有线性变换的集合, 本节将定义 $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 中的几种运算.

1. 加法 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的**和** 定义为

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}.$$

求和的运算称为加法.

事实上, 若$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$, $k\in\boldsymbol{P}$, 我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\&=\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}+\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}+\mathcal{B}\boldsymbol{\beta}=(\mathcal{A}+\mathcal{B})\boldsymbol{\alpha}+(\mathcal{A}+\mathcal{B})\boldsymbol{\beta},\\(\mathcal{A}+\mathcal{B})(k\boldsymbol{\alpha})&=\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha})+\mathcal{B}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+k\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}=k(\mathcal{A}+\mathcal{B})\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}$$

因而 $\mathcal{A}+\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$.

2. 纯量乘法 设 $k\in\boldsymbol{P}$, $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, 定义 k 与 $\mathcal{A}$ 的**积** 如下:

$$(k\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha}=k\cdot\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}.$$

不难证明 $k\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$.

3. 乘法 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, 则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的**积**为

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\boldsymbol{\alpha}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}.$$

$$\begin{tikzcd}\boldsymbol{V}\arrow[r,"\mathcal{B}"]\arrow[dr,"\mathcal{A}\mathcal{B}"'] & \boldsymbol{V}\arrow[d,"\mathcal{A}"]\\ & \boldsymbol{V}\end{tikzcd}$$

若 $k,\ l \in \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$, 则

$$\begin{aligned}(\mathcal{AB})(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})) = \mathcal{A}(k\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}+l\mathcal{B}\boldsymbol{\beta}) \\ &= k\mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha})+l\mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\beta}) = k(\mathcal{AB})\boldsymbol{\alpha}+l(\mathcal{AB})\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

故 $\mathcal{AB} \in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$.

线性变换对于上述三种运算满足下面性质.

定理 5.2.1　设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间, $\boldsymbol{V}$ 的所有线性变换的集合为 $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, 则

1) $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 对加法及纯量乘法为 $\boldsymbol{P}$ 上线性空间;

2) $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 中乘法满足结合律

$$\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C},\ \forall \mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C} \in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V},$$

且

$$\mathrm{id}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,\mathrm{id} = \mathcal{A},\quad 0\mathcal{A} = \mathcal{A}0 = 0;$$

3) $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 中乘法及加法适合分配律

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB}+\mathcal{AC};\quad (\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A} = \mathcal{BA}+\mathcal{CA};$$

4) $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 中乘法与纯量乘法满足

$$k(\mathcal{AB}) = (k\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(k\mathcal{B}),\ \forall k \in \boldsymbol{P},\ \mathcal{A},\ \mathcal{B} \in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}.$$

证　定理 5.2.1 可直截了当地验证, 读者可自行完成.

特别指出, 线性空间 $\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 的零元素就是 $\boldsymbol{V}$ 的零变换 0. $\mathcal{A}$ 的负元素 $-\mathcal{A} = (-1)\mathcal{A}$, 于是

$$(-\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}.$$

若 $k \in \boldsymbol{P}$, 则 $k\,\mathrm{id}$ 就是由 k 决定的数乘变换 k.

此外, 乘法交换律一般不成立.

定义 5.2.1　若 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 还是一一对应, 则称 $\mathcal{A}$ 为**可逆线性变换**, 否则称 $\mathcal{A}$ 为**不可逆**.

显然, $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在.

定理 5.2.2　设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间, $GL(\boldsymbol{V})$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的所有可逆线性变换的集合, 则

1) $\mathrm{id} \in GL(\boldsymbol{V})$;

2) $\mathcal{A} \in GL(\boldsymbol{V})$, 则 $\mathcal{A}^{-1} \in GL(\boldsymbol{V})$, 且 $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$;

3) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in GL(\boldsymbol{V})$, 则 $\mathcal{AB}\in GL(\boldsymbol{V})$, 且

$$(\mathcal{AB})^{-1}=\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

证 $\mathcal{A}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 的可逆线性变换, 即 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的同构映射, 因而由 4.11 节知定理 5.2.2 成立.

定义 5.2.2 设 $\boldsymbol{V}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间, 又 $\mathcal{A}\in\operatorname{End}\boldsymbol{V}$. 定义

$$\mathcal{A}^0=\mathrm{id},\quad \mathcal{A}^{n+1}=\mathcal{A}\mathcal{A}^n.$$

$\mathcal{A}^n$ 称为 $\mathcal{A}$ 的**n 次幂**.

又若 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i\in\boldsymbol{P}[x]$, 定义

$$f(\mathcal{A})=a_0\,\mathrm{id}+a_1\mathcal{A}+\cdots+a_m\mathcal{A}^m.$$

称为 $\mathcal{A}$ 的**一个多项式**.

定理 5.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是$\boldsymbol{P}$ 上线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的线性变换. 定义 $\boldsymbol{P}[x]$ 到 $\operatorname{End}\boldsymbol{V}$ 的映射 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 为

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x))=f(\mathcal{A}),\ \forall f(x)\in\boldsymbol{P}[x].$$

则有以下结论:

1) $\varphi_{\mathcal{A}}$ 是线性空间 $\boldsymbol{P}[x]$ 到线性空间 $\operatorname{End}\boldsymbol{V}$ 的线性映射.

2) $\varphi_{\mathcal{A}}$ 保持乘法, 即

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x))=\varphi_{\mathcal{A}}(f(x))\varphi_{\mathcal{A}}(g(x)),\ \forall f(x),\ g(x)\in\boldsymbol{P}[x].$$

3) $\ker\varphi_{\mathcal{A}}=\{f(x)|f(\mathcal{A})=0\}$ 是 $\boldsymbol{P}[x]$ 的子空间, 且若 $f(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$, 则

$$f(x)g(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}},\ \forall g(x)\in\boldsymbol{P}[x].$$

证 1) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i$, $k\in\boldsymbol{P}$, 则

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)+g(x))&=\varphi_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i\right)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)\mathcal{A}^i\\&=\sum_{i=0}^{n}a_i\mathcal{A}^i+\sum_{i=0}^{n}b_i\mathcal{A}^i=\varphi_{\mathcal{A}}(f(x))+\varphi_{\mathcal{A}}(g(x)).\end{aligned}$$

$$\varphi_{\mathcal{A}}(kf(x))=\varphi_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=0}^{n}ka_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{n}ka_i\mathcal{A}^i=k\sum_{i=0}^{n}a_i\mathcal{A}^i=k\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)).$$

故 1) 成立.

2) 首先, 由于线性变换乘法的结合律, 故有

$$\mathcal{A}^m\mathcal{A}^n=\mathcal{A}^{m+n},\ m,\ n\in\mathbf{Z},\ m\geqslant 0,\ n\geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x))&=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)\mathcal{A}^k=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\mathcal{A}^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}b_j\mathcal{A}^j\right)\\&=\varphi_{\mathcal{A}}(f(x))\varphi_{\mathcal{A}}(g(x)).\end{aligned}$$

因而 2) 成立.

3) 由 4.11 节知 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 是 $\boldsymbol{P}[x]$ 的子空间. 设 $f(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$, $g(x)\in\boldsymbol{P}[x]$. 于是由

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x))=f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})=0$$

知 $f(x)g(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$.

推论 1　$m,\ n\in\mathbf{Z},\ m\geqslant 0,\ n\geqslant 0$, 则

$$(\mathcal{A}^n)^m=\mathcal{A}^{mn}.$$

这是因为 $(x^n)^m=x^{mn}$, 由 2) 即可得上式.

推论 2　若 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}\neq\{0\}$, 以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 表示 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低的首一多项式, 称为 $\mathcal{A}$ 的**最低多项式**, 则 $f(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $d_{\mathcal{A}}(x)|f(x)$. 等价地说, 有

$$\ker\varphi_{\mathcal{A}}=\{d_{\mathcal{A}}(x)g(x)|g(x)\in\boldsymbol{P}[x]\}.$$

证　以 $q(x)$, $r(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 的商式与余式. 由

$$f(\mathcal{A})=d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})q(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})=r(\mathcal{A})$$

知 $f(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $r(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$. 但 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 为 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低者, 若 $r(x)\neq 0$, 由 $\deg r(x)<\deg d_{\mathcal{A}}(x)$, 这是不可能的, 故 $r(x)=0$.

例 5.7　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为空间一非零向量, 在直角坐标系 $OXYZ$ 中 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\alpha}$, 过 O 作平面 π 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 垂直. 又 $\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OQ}$, $\boldsymbol{\beta}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的投影为 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OQ_0}$. 过 Q 作 π 的垂线, 垂足为 Q_1. $\overrightarrow{OQ_1}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 在 π 上的投影, 记为 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'}$. 如图 5.3 所示.

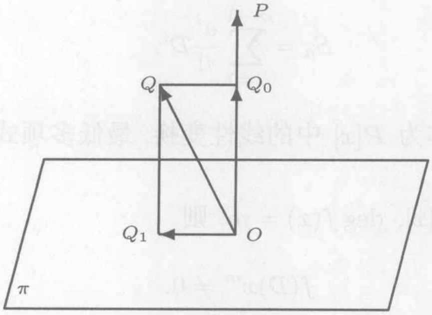

图 5.3

由于 id, $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{End}\, \boldsymbol{V}$, 故 id$-\Pi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{End}\, \boldsymbol{V}$. 但

$$(\mathrm{id} - \Pi_{\boldsymbol{\alpha}})\boldsymbol{\beta} = \mathrm{id}\boldsymbol{\beta} - \Pi_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta} = \Pi_{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\beta},$$

故 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'} = \mathrm{id} - \Pi_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{End}\, \boldsymbol{V}$.

显然有

$$\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \Pi_{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \Pi_{\boldsymbol{\alpha}'}^2 = \Pi_{\boldsymbol{\alpha}'},$$

因而 $x^2 - x \in \ker \varphi_{\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}}$, $x^2 - x \in \ker \varphi_{\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'}}$. 但 $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq 0$, $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}} \neq \mathrm{id}$; $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq 0$, $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'} \neq \mathrm{id}$, 故

$$d_{\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}}(x) = d_{\Pi_{\boldsymbol{\alpha}'}}(x) = x^2 - x.$$

例 5.8 $d_{\mathrm{id}}(x) = x - 1$.

例 5.9 $d_0(x) = x$.

例 5.10 设 $\mathcal{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \in \mathrm{End}\, \boldsymbol{P}[x]_n$, 显然

$$\mathcal{D}^n(f(x)) = 0, \quad \forall f(x) \in \boldsymbol{P}[x]_n;$$

$$\mathcal{D}^k(x^{n-1}) \neq 0, \quad k < n.$$

故

$$d_{\mathcal{D}}(x) = x^n.$$

例 5.11 设 $a \in \boldsymbol{P}$. 定义 $S_a \in \mathrm{End}\, \boldsymbol{P}[x]_n$ 如下

$$S_a(f(x)) = f(x + a), \quad \forall f(x) \in \boldsymbol{P}[x]_n.$$

由于

$$f(x + a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k},$$

因而

$$S_a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!}\mathcal{D}^i.$$

例 5.12　$\mathcal{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 作为 $\boldsymbol{P}[x]$ 中的线性变换, 最低多项式不存在, 即 $\ker \varphi_{\mathcal{D}} = \{0\}$.

事实上, 设 $f(x) \in \boldsymbol{P}[x]$, $\deg f(x) = m$, 则

$$f(\mathcal{D})x^m \neq 0.$$

故 $f(x) \notin \ker \varphi_{\mathcal{D}}$, $\forall f(x) \in \boldsymbol{P}[x]$.

以后, 将证明若 $\dim \boldsymbol{V} < \infty$, 则任何 $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \boldsymbol{V}$ 的最低多项式一定存在.

最后, 若 $\mathcal{A} \in GL(\boldsymbol{V})$, $k \in \mathbf{Z}$, 定义

$$\mathcal{A}^{-k} = (\mathcal{A}^{-1})^k.$$

则 $\forall m,\ n \in \mathbf{Z}$ 有

$$\mathcal{A}^m \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{m+n};\quad (\mathcal{A}^m)^n = \mathcal{A}^{mn}.$$

习　　题

1. 在空间取定直角坐标系 $OXYZ$. 以 $\mathcal{A}$ 表示空间绕 OX 轴由 OY 向 OZ 方向旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{B}$ 表示绕 OY 轴由 OZ 向 OX 方向旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{C}$ 表示绕 OZ 轴由 OX 向 OY 方向旋转 90° 的变换. 证明

$$\mathcal{A}^4 = \mathcal{B}^4 = \mathcal{C}^4 = \mathrm{id};$$

$$\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA};\quad \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2\mathcal{A}^2.$$

并验证 $(\mathcal{AB})^2 = \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2$ 是否成立.

2. $\mathcal{A},\ \mathcal{B} \in \operatorname{End} \boldsymbol{P}[x]$, 其中 $\mathcal{A}f(x) = f'(x)$, $\mathcal{B}f(x) = xf(x)$. 证明 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathrm{id}$.

3. 设 $\mathcal{A},\ \mathcal{B} \in \operatorname{End} \boldsymbol{V}$, 且 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathrm{id}$. 试证 $\mathcal{A}^k\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^k = k\mathcal{A}^{k-1}$, $k > 1$.

4. 设 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \boldsymbol{V}$. 证明 $\mathcal{A} \in GL(\boldsymbol{V})$ 当且仅当 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\ \mathcal{A}\varepsilon_2,\ \cdots,\ \mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关.

5. 设线性空间 $\boldsymbol{V}$ 有直和分解 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M} \dotplus \boldsymbol{N}$. 作 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{V}$ 的映射 $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ 如下:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_1 \in \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in \boldsymbol{N};$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_1 \in \boldsymbol{M},\ \boldsymbol{\alpha}_2 \in \boldsymbol{N}.$$

分别称为 $\boldsymbol{V}$ 关于上述分解对 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ 的投影. 证明:

1) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$;

2) $\boldsymbol{V}\neq \boldsymbol{M}$ 时 $\mathcal{A}\notin GL(\boldsymbol{V})$;

3) $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathrm{id}$, $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$;

4) 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}\notin GL(\boldsymbol{V})$, 则 $d_{\mathcal{A}}(x)=d_{\mathcal{B}}(x)$.

6. 设 $\mathcal{A}\in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 证明:

1) $\boldsymbol{V}$ 有直和分解: $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{M}\dot{+}\boldsymbol{N}$, 其中 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ 分别为 $\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V}|\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\}$, $\boldsymbol{N}=\{\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V}|\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}=0\}$.

2) 若 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$, $k\neq 0, 1$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=0$.

7. 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$. 证明 $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}=0$.

8. 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in \mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$ 且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$. 证明若 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, 则 $(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\mathcal{AB})^2=\mathcal{A}+\mathcal{B}-\mathcal{AB}$.

5.3 线性变换的矩阵

本节是将有限维线性空间的线性变换具体化为矩阵. 线性变换的运算对应于矩阵的运算.

定理 5.3.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域$\boldsymbol{P}$ 上 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, 则对于 $\boldsymbol{V}$ 中任意 n 个向量 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_n$ 存在唯一的线性变换 $\mathcal{A}$ 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{1}$$

证 作$\boldsymbol{V}$ 的变换 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\beta}_i.$$

于是对 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^n l_i\boldsymbol{\alpha}_i\in\boldsymbol{V}$, k, $l\in\boldsymbol{P}$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})&=\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n(kk_i+ll_i)\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^n(kk_i+ll_i)\boldsymbol{\beta}_i\\&=k\left(\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\beta}_i\right)+l\left(\sum_{i=1}^n l_i\boldsymbol{\beta}_i\right)=k\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+l\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$. 又若 $\mathcal{B}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, 且 $\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. 则

$$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^n k_i\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\beta}_i=\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right).$$

因此 $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, 即满足 (1) 式的线性变换是唯一的.

特别地, 当 $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$ 时, $\mathcal{A}=\mathrm{id}$; 当 $\boldsymbol{\beta}_i=0,\ 1\leqslant i\leqslant n$ 时, $\mathcal{A}=0$.

由定理 5.3.1 知道, $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, $\mathcal{A}$ 完全由 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n$ 决定. 当然, 每个 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i$ 又由它的坐标决定. 由此事实引出下面定义.

定义 5.3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{P}$ 上 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, 记

$$\mathrm{crd}(\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{crd}\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}.$$

又 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$. 称矩阵

$$(\mathrm{crd}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\ \mathrm{crd}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \mathrm{crd}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) \tag{2}$$

为 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵, 记为

$$\boldsymbol{M}(\mathcal{A};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n).$$

在不混淆时, 简记为 $\boldsymbol{M}(\mathcal{A})$.

即固定$\boldsymbol{V}$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 后, 有

$$\mathrm{col}_j\boldsymbol{M}(\mathcal{A})=\mathrm{crd}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

更明确地说, 如果

$$\boldsymbol{M}(\mathcal{A};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n}\\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n}\end{pmatrix}$$

则 $\forall 1\leqslant j\leqslant n$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j&=a_{1\,j}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2\,j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n\,j}\boldsymbol{\alpha}_n\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\mathrm{col}_j\boldsymbol{M}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

显然, $\boldsymbol{M}(\mathrm{id})=\boldsymbol{I}_n,\ \boldsymbol{M}(0)=0$.

定理 5.3.2　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$ 是$\boldsymbol{P}$ 上线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基, $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,\boldsymbol{V}$, 则

$$\mathrm{crd}(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{M}(\mathcal{A};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\mathrm{crd}(\boldsymbol{\alpha};\ \boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n). \tag{3}$$

证　因为固定 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n$, 下面将坐标中的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 省去, 而使用简单记号. 由

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)\mathrm{crd}\boldsymbol{\alpha}$$