高职高专“十一五”规划教材

经济应用数学

崔湛林　齐晓东　李风梅　主编　　吕芝　主审

JINGJI YINGYONG SHUXUE

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

经济应用数学

崔湛林　齐晓东　李风梅　主　编
吕　芝　　　　　　　　　　主　审

化学工业出版社
·北京·

本教材在编写过程中，充分吸收了当前我国高职高专经济类各专业数学教材的长处，密切结合高职高专院校经济类各专业教学改革的实际，一是突出用数学思想解决问题的思路，以数学应用能力的培养为主线，结合经济类各专业需求特点，淡化理论，务实结论的应用；二是力求将看似深奥的数学问题用通俗的语言表述，避开较深的理论推理证明，尽可能用直观图形加以阐述，引入较多的实例加以引导运用，做到了通俗直观，容易理解和掌握；三是融高等数学与经济问题为一体，加强了数学方法解决经济问题的思路和方法，增添了经济问题建模的基本思路和步骤，内容简练，针对性更准确，实用性更强.

该书共分六章，主要内容有：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数微分学的应用，不定积分，定积分及其应用，经济问题中的数学建模问题.

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级院校经济、管理类各专业的数学教材，也可供在职人员自学使用.

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/崔湛林，齐晓东，李风梅主编.
北京：化学工业出版社，2010.9
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-09109-3

Ⅰ.经… Ⅱ.①崔…②齐…③李… Ⅲ.经济数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第132276号

责任编辑：张双进　　装帧设计：王晓宇
责任校对：徐贞珍

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：北京市兴顺印刷厂
787mm×1092mm　1/16　印张 9¾　字数240千字　2010年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：20.00元

版权所有　违者必究

编审人员名单

主　　编　崔湛林　齐晓东　李风梅

副 主 编　甄晨光　冯英杰　刘　徽

参编人员：（按姓名汉语拼音排序）

布秀敏　董　蕊　刘　平　胡秀平

槐文谦　邵伟如　魏俊领　翟素娟

主　　审　吕　芝

前 言

经济应用数学是高职高专经济类各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、逻辑推理、严谨作风、创新能力以及用数学思想解决实际问题的能力都有着非常重要的作用．编者经过长期的教学实践和总结，根据新的课程标准的要求，结合经济类各专业对应用数学需求的特点，编写《经济应用数学》教材．

该书共分六章，主要内容有：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数微分学的应用，不定积分，定积分及其应用，经济问题中的数学建模问题．

本书的编者，都是来自教学一线，有着丰富的教学经验，近年来致力于数学建模的探索和研究，力求通过本课程的教学能够使学生领略数学的魅力，建立数学思想，培养学生运用数学模型解决实际问题的能力．

编者在编写本教材的过程中，充分吸收了当前我国现有的高职高专经济类各专业数学教材的长处，密切结合当前高职高专院校经济类各专业教学改革的实际，努力编出具有自身特色的经济类各专业的数学教材，其特色具体反映如下．

1．突出用数学思想解决问题的思路，以数学应用能力的培养为主线，结合经济类各专业需求特点，淡化理论，强化结论的应用．

2．力求将看似深奥的数学问题用通俗的语言表述，避开较深的理论推理证明，尽可能用直观图形加以阐述，引入较多的实例加以引导运用，做到了通俗直观，容易理解和掌握．

3．融高等数学与经济问题为一体，加强了数学方法解决经济问题的思路和方法，增添了经济问题建模的基本思路和步骤，内容简练，针对性更准确，实用性更强．

本教材由吕芝策划和主审，崔湛林、齐晓东、李风梅任主编，甄晨光、冯英杰、刘微任副主编．参加编写的还有（按姓名汉语拼音排序）布秀敏，董蕊，刘平，胡秀平，槐文谦，邵伟如，魏俊领，翟素娟．崔湛林负责全书的统稿，李风梅、魏俊领负责校对工作．

在本书的编写过程中，我们参考了经济应用数学领域的许多教材和资料，得到了兄弟院校同行的指导和帮助，在此向原作者和各位专家表示衷心的感谢！

由于编写者的能力和水平有限，不足之处恳请同行学者、专家和读者提出宝贵的批评意见．

编者

2010 年 5 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1-1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 x 依照某一对应规则 f，总有一个确定的数值 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$．数集 D 称为函数的定义域，x 称为为自变量，y 称为为因变量．当 x 取遍 D 中的一切数值时，相应的 y 值的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域．f 称为函数的对应法则（也称对应关系）.

由函数的定义可知，函数的定义域和对应法则是函数的两个决定性要素，当它们一经确定，函数的值域也随之确定.

2. 函数的定义域

(1) 定义域的表示方法

定义域的表示方法如下.

① 用集合表示．

② 用区间表示．

③ 用邻域表示.

集合与区间较为熟悉，下面介绍邻域的概念.

定义 1-2　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中，点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$$

若把邻域 $U(a,\delta)$的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 去心的 δ 邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域，当不需要特别表明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

(2) 求函数定义域的一般方法

在分式中分母不能为零；在根式中，负数不能开偶次方；在对数式中，真数要大于零；在反三角函数中，要符合反三角函数的定义域；若函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

【例 1】 求下列函数的定义域

① $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$.

【解】 要使函数 y 有意义，必须 $\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\geqslant -2\end{cases}$.

所以函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

② $y=\lg x(x-1)$.

【解】 要使函数 y 有意义，必须 $x(x-1)>0$，即 $x<0$ 或 $x>1$.

所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

③ $y=\tan\dfrac{2x}{3}$.

【解】 要使函数 y 有意义，必须 $\dfrac{2x}{3}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0;\pm 1;\pm 2;\cdots)$.

$$x\neq\frac{3}{2}k\pi+\frac{3\pi}{4}$$

所以函数的定义域为 $\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{3}{2}k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k=0;\pm 1;\pm 2;\cdots\right\}$.

3. 函数的表示法

函数的表示方法通常有三种：**表格法、图像法、解析法**. 用得较多的是解析法，即通过分析变量之间的对应关系后，用解析公式把它表示出来.

二、函数的几种基本特性

1. 函数的奇偶性

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，均有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称.

如函数 $y=x^2$、$y=x\sin x$ 在定义域内都是偶函数. 函数 $y=x$、$y=x\cos x$ 在定义域内都是奇函数. 函数 $y=e^x$，$y=x+x^2$ 在定义域内都是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

定义 1-4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数，统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. 而函数 $y=x$、$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的.

3. 函数的周期性

定义 1-5　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 T，使得对于定义域内的一切 x，均有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数．T 称为函数 $y=f(x)$ 的周期．通常周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

4．函数的有界性

定义 1-6　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 I 上的一切 x，均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是有界函数．如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M（不一定局限于正数），使函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有上界，并且任意一个 $N\geqslant M$ 的数 N 都是函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的一个上界；如果存在常数 m，使 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有下界，并且任意一个 $l\leqslant m$ 的数 l 都是函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的一个下界.

显然，函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

例如，函数 $y=\cos x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在（0，1）内无界，在（1，2）内有界.

三、分段函数

定义 1-7　若函数在其定义域的不同范围内，用两个或两个以上的解析式来表示，这一类函数叫做分段函数.

例如下面的例 2、例 3、例 4 中的函数都是分段函数.

【例 2】　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

【例 3】　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

【例 4】　（出租车费用）设某城市白天出租车的收费 y(单位:元)与路程 x(单位:公里)之间的关系为

$$f(x)=\begin{cases}5+1.2x & 0<x\leqslant 7\\ 10+2.1(x-7) & x>7\end{cases}$$

注：分段函数虽有几个式子，但它们合起来表示一个函数，而不是几个函数.

四、反函数

定义 1-8　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每个数 y，都存在唯一的一个 x（$x\in D$），使得 $y=f(x)$ 成立．则称 x 是 y 的函数，记作 $x=\varphi(y)$．这

个函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数．也常记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 来表示.

注： 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例如函数 $y=x-1$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内存在反函数，其反函数是 $y=x+1$.

五、复合函数

基本初等函数是一种结构简单的函数，实际问题中遇到的函数其结构往往较为复杂．比如，函数 $y=\sin^2 x$，$y=(2x-3)^2$，$y=\ln(1+e^x)$ 等已不是基本初等函数.

定义 1-9 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$；u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$；如果 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记为

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]$$

式中，u 称为中间变量.

【例 5】 已知 $y=2^u$ $u=1+\lg x$ 求 y 关于 x 的函数.

【解】 $y=2^{1+\lg x}$.

【例 6】 写出下列函数的复合过程.

① $y=\cos\dfrac{1}{x}$； ② $y=\sin(1+2x)$；

③ $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$； ④ $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$.

【解】 ① $y=\cos u$，$u=\dfrac{1}{x}$.

② $y=\sin u$，$u=1+2x$.

③ $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$.

④ $y=u^3$，$u=\arcsin v$，$v=1-x^2$.

六、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数函数．这些函数的简单性质和图形如下所述.

(1) 幂函数 $y=x^\alpha$ ($\alpha\in R$)

它的定义域和值域随 α 的取值不同而不同，但是无论 α 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义．常见的幂函数的图形如图 1-1 所示.

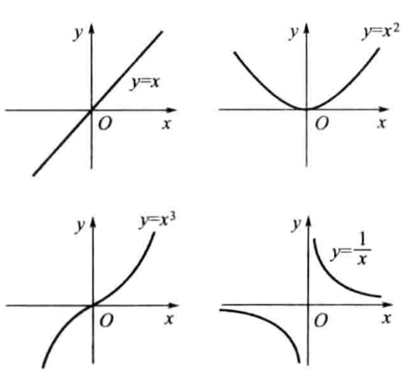

图 1-1

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0,a\neq1$)

指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$．指数函数的图形如图 1-2 所示.

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$)

对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．对数函数 $y=\log_a x$ 是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

指数函数 $y=a^x$ 的反函数．其图形如图 1-3 所示.

在工程中，常以无理数 e=2.718281828…作为指数函数和对数函数的底，并且记 $y=e^x$，$y=\ln x$. 函数 $y=\ln x$ 称为自然对数函数.

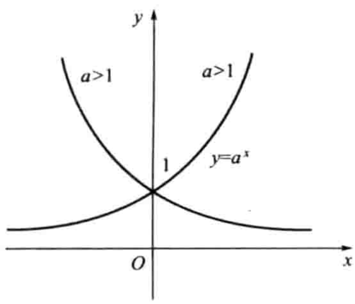

图 1-2

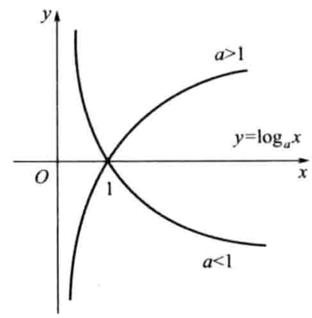

图 1-3

(4) 三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1-4 所示.

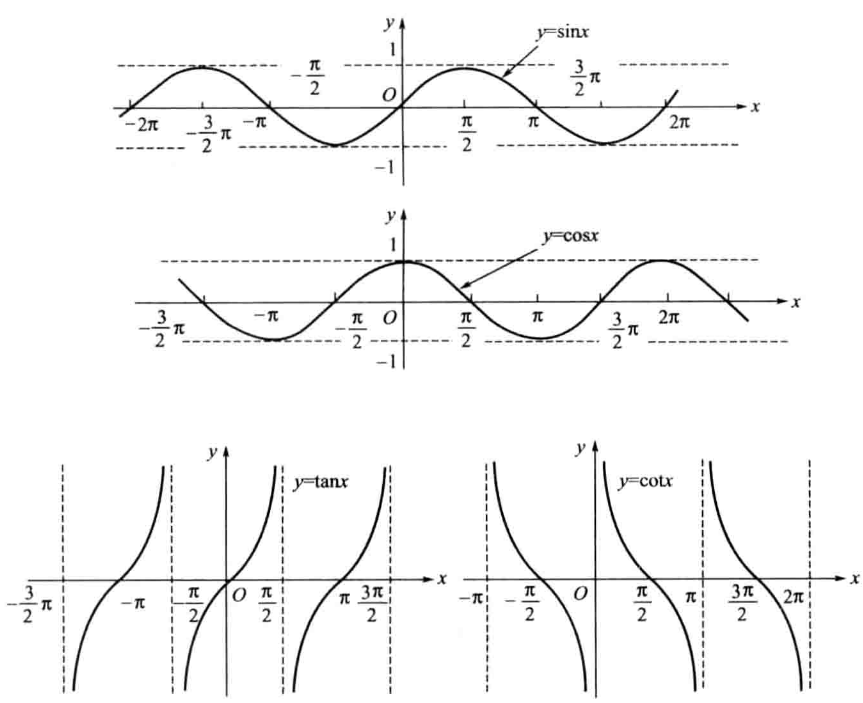

图 1-4

(5) 反三角函数

反三角函数包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=$

arctan$x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$. 它们的图形如图 1-5 所示.

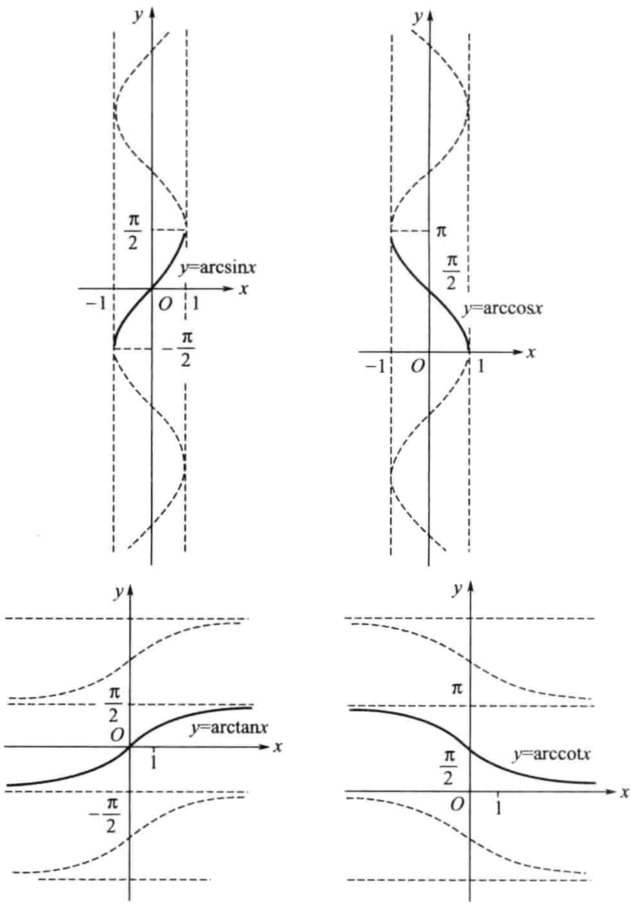

图 1-5

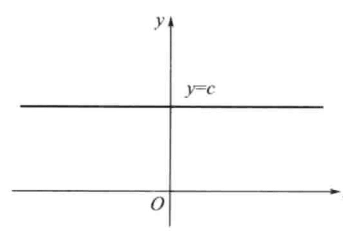

图 1-6

(6) 常数函数　$y=c$（c 为常数）

常数函数 $y=c$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形是一条水平的直线，如图 1-6 所示.

2. 初等函数

定义 1-10　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成并且用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln(\sin x+4)$，$y=e^{2x}\sin(3x+1)$，$y=\sqrt[3]{\sin x}$，都是初等函数．初等函数是常见的函数，显然分段函数不是初等函数，例如符号函数，取整函数 $y=[x]$等分段函数就是非初等函数.

七、经济中常用的数学模型一经济函数

用数学方法解决经济问题，首先要将经济问题转化为数学问题，即建立数学模型，这实际上就是找出经济问题中的各种变量之间的函数关系．下面重点介绍经济学中常用的一些函数.

1. 需求函数

一般情况下，一种产品的市场需求量 Q 与该产品的价格 p 密切相关 ，产品价格越高，

需求量越小．如果只考虑价格的变动对需求量的影响，价格以外的其他因素不予考虑，在这种情况下，产品价格与需求量有关系．需求量 Q 可以看成是价格 p 的一元函数，称为需求函数，记作：

$$Q=Q(p)$$

需求函数 $Q=Q(p)$ 为价格 p 的单调减少函数.

常见的需求函数有以下几种类型.

(1) 线性需求函数

$$Q=a-bp \quad (a>0,b>0)$$

(2) 二次需求函数

$$Q=a-bp-cp^2 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

(3) 指数需求函数

$$Q=ae^{-bp} \quad (a>0,b>0)$$

在需求函数中最简单的是线性需求函数，一般形式为

$$Q=a-bp \quad (a>0,b>0).$$

2. 供给函数

供给函数是站在产品生产厂家的立场上，在其他情况不变的条件下，只考虑销售价格 p 与供给量 q 之间的关系．一般情况下，供给量是价格的函数，此函数称为**供给函数**，记为

$$S=S(p)$$

供给函数 $S=S(p)$ 为价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数，二次函数，幂函数，指数函数等.

其中线性供给函数为

$$S=-c+dp \quad (c>0,d>0)$$

使某种产品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0，称为均衡价格．当市场价格 p 高于均衡价格 p_0 时，供给量将增加而需求量相应地减少，这时会产生“供大于求”的现象，从而使得价格 p 下降；当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量将减少而需求量相应地增加，这时会产生“供不应求”的现象，从而使得价格 p 上升．市场价格的调节就是这样来实现的.

【例 7】 当大米收购价为每千克 2.5 元时，某收购站每天能收购 3000kg. 若收购价每公斤提高 0.1 元，则收购量可增加 500kg，求大米的线性供给函数.

【解】 设大米的线性供给函数为

$$S=-c+dp,$$

则有

$$\begin{cases}3000=-c+2.5d,\\3500=-c+2.6d,\end{cases}$$

解得　$d=5000,c=9500$

所求供给函数为　$S=-9500+5000p.$

【例 8】 已知某种商品的供给函数和需求函数分别为

$$S=200-5p,\ Q=-10+25p.$$

求该商品的市场均衡价格 p_0 和市场均衡数量 Q_0.

【解】 由供需平衡条件 $Q=S$，可得

$$200-5p=-10+25p$$

因此，该商品的市场均衡价格为 $p_0=7$，市场均衡数量为 $Q_0=165$.

3. 总成本函数、总收入函数与总利润函数

在产品的生产经营活动中，成本、收入和利润这些经济变量都可以看做是产品的产量或销售量 q 的函数，分别称为总成本函数，记为：$C(q)$；总收入函数，记为：$R(q)$；总利润函数，记为：$L(q)$.

(1) 总成本函数

由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成，固定成本与产量 q 无关；可变成本随产量 q 的增加而增加，即

$$C(q)=C_1+C_2(q)$$

总成本函数 $C(q)$ 是 q 的单调增加函数.

平均成本函数是指生产 q 件产品时，单位产品成本平均值，记作 $\overline{C}$，则

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}$$

式中，$\frac{C_2(q)}{q}$ 称为**平均可变成本.**

(2) 总收入函数

如果产品的单位售价为 p，销售量为 q，则**总收入函数**为

$$R(q)=pq$$

(3) 总利润函数

因总利润等于总收入与总成本的差，所以**总利润函数**为

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

【例 9】 已知某厂生产灯泡的总成本函数为

$$C=100+\frac{q^2}{4}$$

求当生产 10 个灯泡时的总成本和平均成本.

【解】 由题意，产量为 10 个灯泡时的总成本为

$$C(10)=100+\frac{10^2}{4}=125$$

产量为 10 个灯泡时的平均成本为

$$\overline{C}(10)=\frac{C(10)}{10}=\frac{125}{10}=12.5$$

【例 10】 已知生产某种商品 q 件时的总成本（单位：万元）为

$$C(q)=10+5q+0.2q^2$$

如果每售出一件该商品的收入为 9 万元. ① 求该商品的总利润函数；② 求生产 10 件该商品的总利润；③ 求生产 20 件该商品的总利润.

【解】 ① 由题意可知，该商品的总收入函数、总成本函数分别为

$$R(q)=9q\ (\text{万元}),\quad C(q)=10+5q+0.2q^2$$

所以该商品的总利润函数为

$$\begin{aligned}L(q)&=R(q)-C(q)\\&=9q-(10+5q+0.2q^2)\\&=4q-10-0.2q^2\ (\text{万元})\end{aligned}$$

② 生产 10 件该商品的总利润为

$$\begin{aligned}L(10)&=4\times10-10-0.2\times10^2\\&=10(\text{万元})\end{aligned}$$

③ 生产 20 件该商品的总利润为

$$\begin{aligned}L(20)&=4\times20-10-0.2\times20^2\\&=-10(\text{万元})\end{aligned}$$

从上面这个例子，可以看到这样的现象，即利润并不总是随销售量的增加而增加．生产者提供商品的首要目的就是获取利润，决定生产规模的原则也是获得最大利润．对于生产者来说，成本总是随着产量的增加而增加的，但并不能保证生产者所获得的利润随着产量的增加而增加．有时产量增加，利润反而下降，甚至会产生亏损．

练习 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-5}$；　(2) $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$.

2. 求函数 $y=\begin{cases}x & 2\leqslant x<3\\ x+1 & 3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$的定义域，并求 $f(2)$、$f(3)$、$f(5)$.

3. 设分段函数 $y=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$、$f(1)$、$f\left[f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$.

4. 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(2x+1)$.

5. 求函数 $y=u^2$，$u=\sin v, v=\dfrac{x}{2}$构成的复合函数.

6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$，求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$.

7. 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sin(x^4+4)$；　(2) $y=(2+\tan^2 x)^3$；

(3) $y=\ln\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$；　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$.

8. 已知某种商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=200-2p，S=10p-40$$

求该产品的市场均衡价格 p_0和市场均衡数量.

9. 某水泥厂生产水泥 1000t，定价为 80 元/t. 总销售在 800t 以内时，按定价出售，超过 800t 时，超出部分打 9 折出售，求销售收入是销售量函数的关系式.

10. 设某商品的成本函数是线形函数，并已知产量为零时，成本为 100 元，产量为 100 时成本为 400 元，求：① 成本函数和固定成本；② 产量为 200 时的总成本和平均成本.

11. 已知生产某种商品 q 件时的总成本（单位：万元）为：$C(q)=7+2q+q^2$.
如果每售出一件该商品的收入为 10 万元．① 求该商品的利润函数；② 求销量为 4 时该商品的总利润；③ 当销量为 10 时是赢利还是亏损？

第二节　函数的极限

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的，例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何上的应用．又如，春秋战国时期的哲学家庄子（公元前 4 世纪）在《庄子·天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日截其半，万世不竭”，其中就隐含了深刻的极限思想.

极限是研究变量的变化趋势的基本工具，高等数学中许多基本概念，如连续、导数、定积分等都是建立在极限的基础上．极限方法又是研究函数的一种最基本的方法．本节将介绍数列、函数极限的概念及其计算方法.

一、数列的极限

数列就是按照一定规律排列的一串无尽的数 x_1，x_2，…，x_n，…；简记为$\{x_n\}$，数列中的每一个数叫做该数列的项，第 n 项 x_n叫做数列$\{x_n\}$的**通项**或一般项．例如，

① $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

② $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$

③ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

④ $3, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \cdots$

⑤ $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$

⑥ $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

都是数列，它们的一般项依次为

$$\frac{1}{n},\ \frac{n-1}{n},\ \frac{1}{2^n},\ 2+\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ (-1)^{n-1},\ n$$

从上面例子可以看出，随着 n 的增大，各数列的变化趋势各异．下面分析这些变化趋势，给出数列极限的概念.

仔细观察这些例子，可以发现，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$和$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，当 n 逐渐增大时，x_n就逐渐变小，即当 n 无限增大时，x_n为正数且无限变小，即与常数 0 无限接近．在数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$中，当 n 逐渐增大时，x_n随之变大，它越来越与常数 1 无限接近．在数列$\left\{2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$中，随 n 的增大，x_n有增有减，但 x_n总是随 n 的无限增大而与常数 2 无限接近．而数列$\{(-1)^{n-1}\}$，当 n 逐渐增大，x_n总在 1 和 -1 这两个数值上跳跃不趋于一个常数．数列 $\{n\}$ 将随着 n 的无限增大而越来越大，也不趋于一个常数，但可以变得任意大.

定义 1-11　给定一个数列$\{x_n\}$．如果当 n 无限增大时，x_n无限接近某一个常数 A，则称当 n 趋于无穷时，数列$\{x_n\}$以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A\ (n\to\infty)$$

此时也称数列$\{x_n\}$收敛.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com