初中数学学习指导

说　　明

本书是根据一九七九至一九八〇年度我省对初中三年级教学内容要求编写的，供初中学生升学考试使用，亦可作初中一、二年级学生学习时参考。

这本书的主要特点是：1.着重基础知识和基本技能训练；2.从本届初三学生过去使用几种版本课本和知识质量实际出发，注意补充全国统编课本的必要内容，为升入高中继续学习全国统编课本打好基础；3.选用了较为典型的例题，指出分析思考方法，有的题给出了多种解法，注意揭示解题规律；4.习题分为A、B两类，A类为基本题，B类为较灵活和稍有难度的题。

由于编写的时间仓促，水平所限，错误之处，在所难免，望批评指正。

编者　王万祥　赵凤石　孙铁　傅于天

一九八〇年三月一日

目　录

代 数 部 分

几 何 部 分

代 数 部 分

一 实 数

（一）自然数

1、自然数的概念：自然数就是指1，2，3，……这些数所组成的整体，它有第一个数1，但没有最后一个数，因而自然数的个数是无限的。以后，我们常把自然数这个整体称为自然数集合。

在自然数集合内，加、乘法运算永远可行（即加、乘运算的结果仍为自然数）。但是，减法运算不能完全施行（小数减大数，或相等的两数相减，结果就不是自然数了。）

2、整除：对于两个自然数 a、b，如果存在一个自然数c，使 $b\times c=a$，这里有 $a\div b=c$，我们说 a 能被 b 整除，或者说，b整除a，a叫做b和c的倍数；反过来，b和c 都叫做a的因数（约数）。

3、和与差的整除性：

(1)如果两个数都能被同一个数整除，那么它们的和与差也能被这个数整除。

(2)如果两个数中有一数能被某数整除，另一个数不能被某数整除，那么它们的和与差都不能被这个数整除。

(3)如果两个数都不能被同一个数整除，那么它们的和

与差能否被这个数整除，就不一定了。

4、质数与合数：除1以外，只能被1和它本数整除的自然数叫做质因（或素数），质数的个数是无限的。不但能被1和本数整除，还能被其他自然数整除，这种自然数叫做合数。1既不是质数，也不是合数。

5、自然数的质因数分解：一个自然数的因数是质数时，叫做这个数的质因数。把一个自然数分解成若干个质因数的连乘积，叫做自然数的质因数分解。

自然数的质因数，如2、3、5等可根据数的整除性的特征来确定，其他的质因数只能根据试除来确定。一个自然数的质因数分解，一般用简除法（短除法）来完成。

6、几个数的公约数和最大的公约数：一个数同时是几个数的约数时，这个数叫这几个数的公约数。几个数的公约数的个数是有限的，其中最大的一个叫这几个数的最大公约数。

7、几个数的公倍数和最小公倍数：一个数同时是几个数的倍数时，这个数就叫这几个数的公倍数。几个数的公倍数是无限的，其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。

8、互质数：如果两个自然数的最大公约数是1，这两个数就叫互质数。因为互质质除1以外再没其他公约数，所以它们的最小公倍数就是这两个数的积。

（二） 整数

1、整数的概念：正整数（自然数）、零、负整数统称为整数。在整数集合中，加、减、乘法运算永远可行，但除法运算不一定能施行（商可能不是整数）。

2、数"0"：数0是个特殊的数，它是具有非常确定的内容的。0与其他数在一起可比较大小和运算。

3、偶数与奇数：一切能被2整除的整数叫做偶数（一般用$2k$表示，k为自然数），不能被2整除的整数叫奇数（一般表示为$2k-1$，k为自然数）。

（三）有理数：

1、有理数的概念：整数和分数（正分数）、（负分数）统称为有理数。p、q是整数，且$q\neq0$，任何一个有理数都可表示为$\frac{p}{q}$。

2、在有理数集合内，加、减、乘、除（除数不得为0）四种运算永远可行。

3、有理数的运算法则

原数 / 法则 / 运算	同号		异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加法	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减
减法	减法一个数等于加上它的相反数。			
乘法	+	相乘	−	相乘
除法	+	相除	−	相除

说明：（1）任何数加零或减零还等于原数。

（2）零不可作除数。

（3）零乘以或除以任何数（不为零）都得零。任

何数乘以或除以1还得原数。

（四）无理数

1、无理数的概念：无限不循环的小数叫做无理数。

（2）任何一个无理数，都可以用一个确定的有理数来近似地表示。在实际运算中，如果遇到无理数，一般可以将它截成一定精确度的近似数后再进行近似计算。

（五）实　数

1、实数的概念：有理数和无理数统称为实数。任何一个实数都可用有限小数和无限小数表示。上面所说的数，可以归结为如下的实数的系统表：

- 实数
  - 有理数
    - 整　数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分　数
      - 正分数
      - 负分数
      - 可化为
        - 有限小数
        - 无限循环小数
  - 无理数（即无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

2、数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。实数集会和数轴上点的集合是一一对应的。亦即：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应、（想一想：有理数集合和数轴上点的集合是否一一对应）

3、实数的绝对值：正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。因此，实数 a 的绝对值是：即

$$|a| = \begin{cases} a（当a>0时） \\ 0（当a=0时） \\ -a（当a<0时） \end{cases}$$

由实数a的绝对值可知，不论a为什么实数，它的绝对值都不负，即$|a|\geqslant 0$。$|a|$的几何意义，是数a在数轴上对应点到原点的距离。

4、算术根：在实数范围内，一个正数的正的n次方根叫做算术根。记做$\sqrt[n]{a}$

5、实数大小的比较：

(1)、按实数在数轴上所对应点的排列顺序来比较大小，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大，也就是任何正数都大于0，任何负数都小于0，任何正数都大于任何负数。正实数中，绝对值大的数就大；负实数中，绝值对大的数却小。

(2)用求差法比较两个实数的大小，即若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b=0$，则$a=b$；若$a-b<o$，则$a<b$。$(a>o)$。当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术方根$(a>0)$。根据算术平方根的定义，可得$\sqrt{a^2}=|a|$。

6、实数的运算法则和运算律

(1)、实数的运算法则（略）

(2)、实数的运算律：

①、交换律：$a+b=b+a$；

$a\times b=b\times a$

②、结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

③、乘法对于加法的分配律：$a\times(b+c)=ab+ac$

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方，开方，再算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。去括号时，如果括号前为正号，括号内数的符号不变；如果括号前为负号

则把括号内数的符号都改变和原来相反的符号。

例题：

1、三个连续整数的平方和是50，求这三个整数。

解：设这三个连续整数是$k-1$、k、$k+1$（k为整数），则由这意得：$(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=50$

整理得：$k^2=16$

$$k=\pm 4$$

∴这三个整数是3、4、5或-5、-4、-3。

说明：(1) 二整数连续，就是这两个数相邻且相差为$|1|$；

(2)注意整数的概念是包括正整数、零、负整数的。

2、有一个三位数，它的十位数字比个位字大2，百位数比个位数字小2，又这个三位数等于三个数字之和的17倍。求这个三位数。

解：设这个三位数的个位数字是x，则十位数字是$x+2$，百位数字是$x-2$。

由题意得：$100(x-2)+10(x+2)+x$

$$=17[(x-2)+(x+2)+x]$$

整理得：$60x=180$

$$x=3$$

这个三位数是153。

说明：(1)解这一类问题时，应把多位数同个数位上的数字两者区分清楚；

(2)任一个十进整数都可表示为：$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots\cdots + 10a_1 + a_0$。

3、计算：$\dfrac{3\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3} \times 0.5 \times \frac{3}{17} - 0.125 \div \frac{17}{3}}{1.25 \div 5\frac{2}{3}}$

解、原式 $= \dfrac{\left(\frac{7}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \times \frac{3}{17}}{\frac{4}{5} \times \frac{3}{17}}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$

$= \dfrac{6-1}{10} = \dfrac{1}{2}$.

说明：(1)、有理数运算的问题中，如果既有分数，又有小数，常将小数化为分数，较为方便。最好能熟记下列换算：$0.5 = \frac{1}{2}$，$0.25 = \frac{1}{4}$、$0.125 = \frac{1}{8}$，$0.75 = \frac{3}{4}$；

(2)几个有理数相加减，如果它们有公因数，则把公因数提出来，可减少运算的手续；

(3)如果分子分母都是分数，则同乘以一个适当整数，也可简化运算。

4、计算：$-2^2 + (-2)^2 - (-1)^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{6} - |-1|$

解：原式 $= -4+4-1-1=-2$.

说明：要注意符号的运算和运算的顺序。

5、解方程：$|x-4|=5$

解：当 $x-4>0$，即 $x>4$ 时，$|x-4|=x-4$

原方程可化为：$x-4=5$

$\therefore\ x=9$

当 $x-4<0$，即 $x<4$ 时，$|x-4|=-(x-4)$

原方程可化为：$-(x-4)=5$

$\therefore\ x=-1$

当 $x-4=0$，即 $x=4$ 时，$|x-4|=0$，这与原方程矛盾，无解。

$\therefore$ 原方程的解为：$x=9$ 或 $x=-1$。

说明：(1) 为了去掉绝对值的符号，必须依照绝对值的定义，对绝对值符号内的数进行讨论；

(2) 如解 求使 $|x-3|+|x-81=5$ 成立的实数 x 时，就要去掉几个绝对值的符号，这时常采用在数轴上分段讨论的办法，讨论时不要漏掉转折点代表的数。

6、设 $a=\sqrt{5}$，b 是 a 的小数部分，

求：$a-\dfrac{1}{b}$ 的值。

解：$\because$ $a=\sqrt{5}$ 是一个无限不循环的小数(无理数)，可是 $\sqrt{5}$ 的整数部分是 2，$\therefore$ 它的小部分 $b=\sqrt{5}-2$，因此，

$$\text{原式}=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-(\sqrt{5}+2)=-2.$$

$$\therefore \quad a-\frac{1}{b}=-2 .$$

说明：(1) 注意无理数，无理数的整数部分，无理数的小数部分三者的关系：如这种不尽的平方根数和无理数为正，则这个无理数等于它的整数部分加小数部分；

试想，如这种无理数为负，那么这个负无理数，它的整数部分，小数部分关系又怎样呢？

(2) 注意分母的有理化。

8，证明$\sqrt{2}$不是有理数。

证明：用反证法。

假定$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$就可以表示成$\frac{p}{q}$，其中p、q都是自然数，且p、q互质（即p与q的最大公约数是1）。由此，可以推得：$(\frac{p}{q})^2=2$，即$\frac{p^2}{q^2}=2$ $\therefore$ $p^2=2q^2$ 即 p^2是偶数，从而p也是偶数，设$p=2r$，（r是自然数），那么$(2r)^2=q^2$ 即$4r^2=2q^2$，$q^2=2r^2$，可是q也是偶数。这样p,q除1以外就还有公约数2了。这与p、q互质相矛盾。因此，$\sqrt{2}$不是有理数。

说明：反证法是一种间接证法。它根据，对一事物的判断要么是对的；要么是不对的，二者必有且只有一种是成立的。用反证法证明问题时，首先设出和求证的结论相反的假定，然后从这个假定出发导出不合理的结果。因此，和求证的结论相反的假定是不正确的，从而断定原来的结论是正确的。

练习 A

1 能被2、3、4、5、9、11整除的数各有什么特征？以下各数能被上述哪些数整除？

57312； 459140； 4537665。

2 将48、693、120分解质因数。

3 将五位数3427△里的△的位置上应填上哪些数字，就能使这个数成为：

(1) 2的倍数；(2) 3的倍数；

(3) 5的倍数；(4) 11的倍数；

4 有没有最小的的自然数？有没有绝对值最小实数？如果有，把它写出来？

5 如果$|m|<3$，求整数m的值；并把结果表示在数轴上

6 写出绝对值不大于1的所有整数。再写出绝对值不小于3而又不大于的5所有整数。

7 当a是什么数时，下列各式成立：

(1) $|a|=|-a|$；(2) $|a|=-a$；

(3) $|a|=a$；(4) $a=-a$；(5) $-a$是负数。

8 求下列各式中的x：

(1) $|x|=\frac{2}{3}$；(2) $|x|=0$；(3) $|x|\sqrt{10}$

(4) $|x|=\pi$；(5) $|x-1|=5$

9 写出下列各数的相反数；相反数的倒数：3、$\frac{1}{2}$、-5

$-\frac{3}{4}$

10　证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

11　计算：

(1)　$-2^2+(-2)^3-(-3)^2-(-3)^3+(-4839)\times 0$

(2)　$4\times(-3)+18\times(-2)^3-18\div 3+(-60)\div(-5)-(-2)\times 3+4(-6)^2$

(3)　$1\frac{2}{3}+(-1\frac{2}{5}+(-\frac{4}{3})-(-0\cdot 4)+2\frac{1}{2}$;

(4)　$1\frac{1}{2}\times\left[3\times(-\frac{2}{3})^2-1\right]-\frac{1}{3}$

$[(-2)^2-(-4.5+3)]$

(5)　$\frac{2}{5}+2\frac{4}{9}\div\left[(7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4})\div 22\frac{1}{2}+10\times\frac{5}{18}\right]-\frac{4}{5}$

(6)　$(-1)^5\times\left\{\left[4\frac{2}{3}\div(-4)+(-1\frac{1}{4})\times(-0\cdot 4)\right]\div(-\frac{1}{3})-2-2\right\}$

(7)　$|-5|-|-7^2|+|\frac{1}{3}|-|5\div(-6)|-\sqrt{(-3)^2}$

(8)　$-(-2.5+75-22.5+15)\times(-\frac{1}{5})+(-428)\times 12\times 0-(-5)\times(-8)\div(-10)$

(9)　$-\operatorname{tg}45°-|-\cos 60°-1|+\sqrt{(-1)^2}$

$$-3\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$$

(10) $$\frac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right)\times 2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+4\frac{3}{20}-1\frac{5}{48}-5\frac{2}{5}\right)\div 3\frac{1}{12}}$$

练习B

1 计算：(1)$\sqrt{(x-1)^2}$；(2) $|2x-3|$

(3)$|1-a|+|2a-1|$；(4)$\frac{|x|}{x}$。

2 在实数集合内，下列各式中的x是什么数 值时，才有意义？

(1)$\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$；(2)$\sqrt{2a+1}+\sqrt[3]{1-2a}$

3、 求用32、36、48去除时，都余15的数。

4、 (1) 在自然数集合内，解方程①$x-4=5$

②$3x+4=5$

(2) 在有理数集合内，解方程：

①$5x+4=0$　　　　②$x^2-2=0$

(3) 在实数集合内，解方程：

①$x^2+x-1=0$　　　　②$x^2-x+1=0$

5、 用几何方法在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点，并用代数方法证明$\sqrt{3}$不是有理数。

6、(1)设$x=a_1+\sqrt{b_1}$、$\beta=a_2+\sqrt{b_2}$，其中a_1、a_2、是有理数，$\sqrt{b_1}$和$\sqrt{b_2}$是无理数，在什么条件下$\alpha=\beta$？