初中部分

TI 图形计算器与中学数学教学

——动态平面几何

主编 郭璋

人民教育出版社

TI 图形计算器

与

中学数学教学

初中部分——动态平面几何

郭 璋 主编

人民教育出版社

·北京·

图书在版编目（CIP)数据

TI图形计算器与中学数学教学. 初中部分：动态平面几何 / 郭璋主编.—北京：人民教育出版社，2001
ISBN 7-107-14142-2

Ⅰ.T…
Ⅱ.郭…
Ⅲ.几何课—计算机辅助教学—初中—教学参考资料
Ⅳ.G633.633

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第04077号

人民教育出版社 出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京联华印刷厂印装　全国新华书店经销
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
开本: 890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张: 8
字数: 150 千字　印数 : 0 001~ 5 200 册
定价: 15.10 元

前　　言

本书是《TI图形计算器与中学数学教学（初中部分）——动态平面几何》. TI图形计算器是美国德州仪器公司（Texas Instruments，简称TI公司）设计、生产、推广的图形计算器. TI图形计算器是手持式的教学工具，它内部设置了功能强大的数学专用软件，如计算机符号代数系统、几何绘图系统、数据处理系统等. 还具有程序编辑功能. 它与计算机之间可以进行数据、图象和程序等的传输，可以从互连网上下载最新研制的软件，可以对自己进行软件升级，从而使之获得强大的生命力. 它具有便携、经济等特点，为中学数学的创新教育提供了新的技术.

我们初步研究了它的几何绘图功能.

一、作图功能

(1) 作点、线段、射线、直线、圆等.

(2) 作角、角的平分线和等角线等.

(3) 作平行线、垂线.

(4) 作线段的中点、线段的中垂线.

(5) 作对称点、反射点、反演点.

(6) 作几何变换中的平移、旋转、位似、对称、反射等.

(7) 作点、线、面等几何图形的运动（即动画功能）.

二、自动测量功能

测量角度、长度、距离、半径、周长、弧度角、弧长、面积、斜率等.

三、通过点或直线的运动，让观察者想象出无穷远点、无穷远直线

TI图形计算器这些强大的绘图功能呼唤着一种新的几何来展示它. 这就是我们所要说的动态平面几何.

教育部颁布的九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲明确指出：数学内容中普遍存在运动变化、相互联系、相互转化等观点. 这是辩证唯物主义的观点，这是中国数学教学大纲的特色. 我们的数学教学要根据大纲的要求，把运动变化引入到教学中. 在实际教学时可以从以下几方面着手：

(1) 通过观察、操作、分析、归纳、猜测、推理等方法认识几何图形；

(2) 探究几何图形之间的关系及其性质；

(3) 通过具体实例体会和理解图形变换的概念及其基本性质；

(4) 了解并欣赏现实生活中与变换有关的图案设计及其应用，并能利用变换设计图案.

至于什么是动态几何呢？我们把用运动变化的方法研究的几何叫做动态几何. 这真正反映了几何学的本质. 几何学是研究几何图形在运动中不变的那些性质的科学，进一步说，几

何学是研究在相似变化下不变的那些性质的科学．应用计算机和TI图形计算器探究几何图形的运动变化是一种强强联合，使计算机和TI图形计算器又有了一个用武之地，也使几何学的研究和教学更加深入、更加简明．

本书分五章，有25篇短文．每篇短文都是独立的．有的是研究一个概念，有的是探究一个定理，有的是探究定理之间的联系，有的是分析例题或习题．这些概念、定理、例题、习题，一般是取自人教版的初中几何教科书，或北京市数学实验教材的几何书．但观点都是一个——用运动变化的观点和方法研究它们．每篇短文都是编著者在教学、教材分析或教学专题讲座中应用过的，即经过教学和教学研究的实践，是编著者教学和教学研究的结晶．这些短文力图展示几何图形的动态美和变化美，培养学生的数学审美能力，丰富他们的想象力和创造力，使TI图形计算器帮助学生探索、帮助学生发现、帮助学生创新．由于我们的水平有限，不妥之处，敬请专家、老师和同学们指正．

在编写过程中，我们参考了很多的资料和文献．主要参考的资料和文献列于书后．还有一些我们没有写上，在此一并表示感谢．

编 者

2000年10月

目　　录

前言 …… (1)

第一章　简单图形 …… (1)

一、旋转射线形成角、深化角的形成过程 …… (1)

二、从等量公理进入几何简单证明 …… (4)

三、一次探究性活动 …… (7)

第二章　全等三角形 …… (14)

一、关于三角形的高和垂心的变化 …… (14)

二、全等变换和利用全等变换证明几何问题 …… (19)

三、一道有背景的几何题 …… (24)

第三章　四边形 …… (29)

一、关于四边形定义的讨论 …… (29)

二、关于中点四边形问题的研究 …… (32)

三、对四边形内角和的再研究 …… (40)

四、关于定值问题的探究举例 …… (42)

五、把具有方向的量引入几何教学 …… (46)

六、两道有关正方形的问题及其变化 …… (48)

七、一道课本习题的变化和引伸 …… (55)

附录：关于四边形的面积 …… (61)

第四章　相似三角形 …… (65)

一、相似变换 …… (65)

二、从全等三角形到相似三角形 …… (66)

三、梯形中位线定理的推广 …… (76)

四、按照新大纲要求，进行几何习题教学例析 …… (79)

第五章　圆 …… (84)

一、与圆有关的角 …… (84)

二、一个基本图形的变化、引伸、应用及联想 …… (87)

三、从角平分线到等角线 …… (95)

四、圆幂定理与运动不变量 …… (99)

五、一题多变，培养学生思维的深刻性 …… (103)

六、从圆的五种位置关系，探索课本中一道例题的变化 …… (106)

七、正三角形、正四边形、……、正 n 边形 …… (110)

八、动态几何与中考数学问题 …… (113)

第一章 简单图形

一、旋转射线形成角、深化角的形成过程

我们知道，一条射线围绕它的端点旋转形成的几何图形叫做角.

在 TI 图形计算器上画出射线，拖动射线绕它的端点旋转，并测算角的大小.

例如，图 1 是 0 °的角，图 2 是锐角，图 3 是直角，图 4 是钝角，图 5 是平角，图 6 是优角，图 7 是周角.

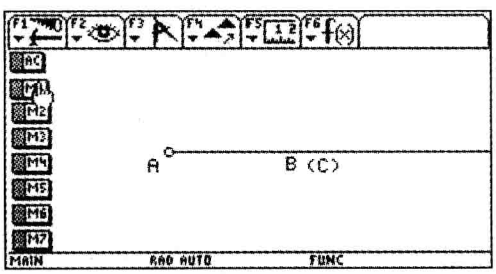


图 1

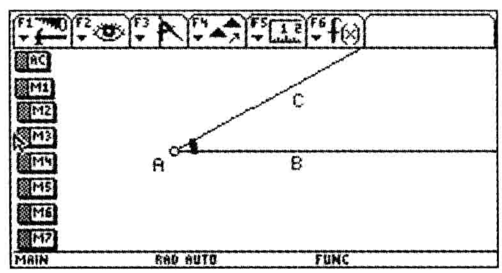


图 2

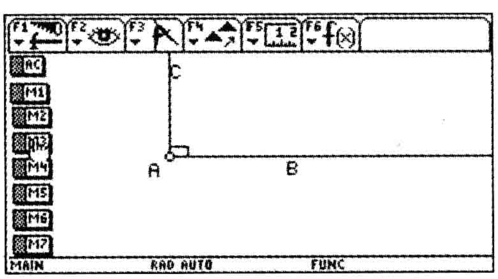


图 3

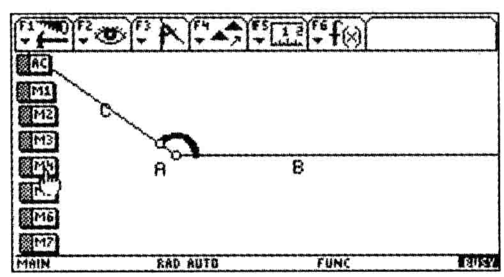


图 4

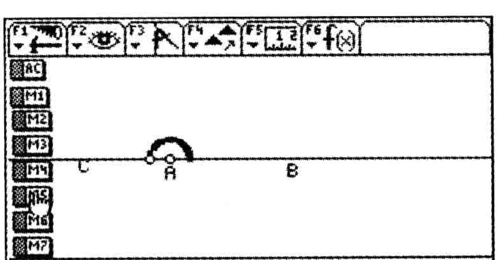


图 5

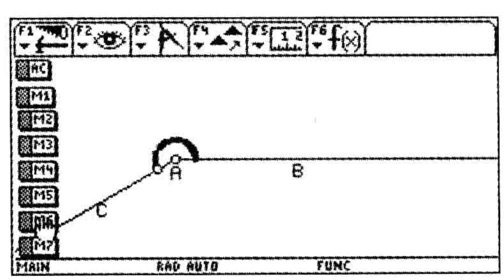


图 6

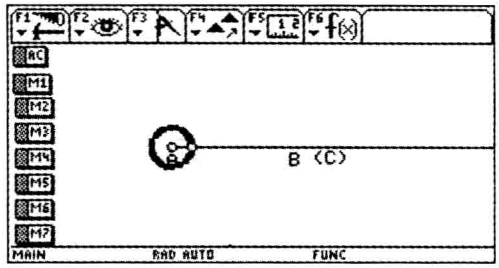


图 7

以上过程形成了初中平面几何中各种类型的角．这种由旋转射线形成角，使我们对角的认识更加深刻了．

下面我们通过一个题目来巩固上面的动态做法．

已知：如图 8，O 是直线 CD 上一点，$\angle AOB=90°$．

求证：(1) $\angle AOC+\angle BOD=90°$．

(2) 试问，当$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转一周的过程中，$\angle AOC+\angle BOD$ 的度数如何变化？

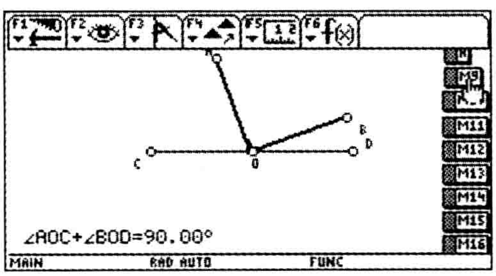


图 8

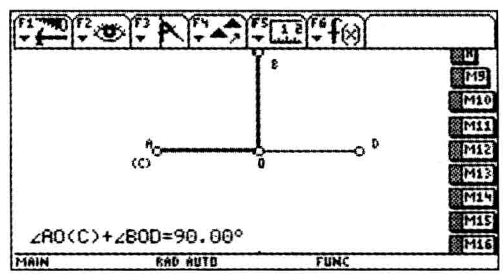


图 9

在 TI 图形计算器上画出图 8，拖动$\angle AOB$ 绕 O 点旋转，测算$\angle AOC+\angle BOD$ 的度数，看它的变化规律，给证明 (1)、(2) 找出思路．

证明：(1) 如图 8，$\because\ \angle COD=\angle AOC+\angle AOB+\angle BOD=180°$，

又$\angle AOB=90°$，

$\therefore\ \angle AOC+\angle BOD=180°-90°=90°$．

(2) 如图 9，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OA 与 OC 重合时，$\angle AOC=0°$，$\angle BOD=90°$，故$\angle AOC+\angle BOD=90°$．

如图 10，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OC 在$\angle AOB$ 内部时，$\angle AOC+\angle BOD$ 的值不定．

如图 11，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OB 与 OC 重合时，$\angle AOC+\angle BOD=90°+180°=270°$．

如图 12，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当$\angle AOB$ 在直线 CD 另一侧时，$\angle AOC+\angle BOD=\angle COB+2\angle AOB+\angle AOD=90°+2\times 90°=270°$．

如图 13，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OA 与 OD 重合时，$\angle AOC+\angle BOD=180°$

$+90°=270°$.

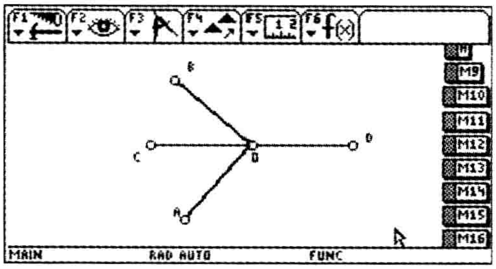


图 10

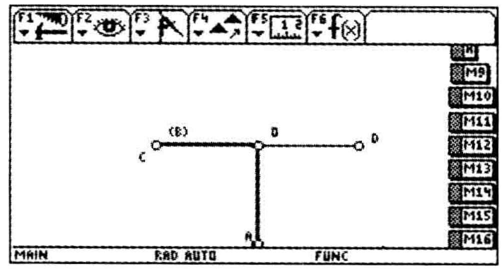


图 11

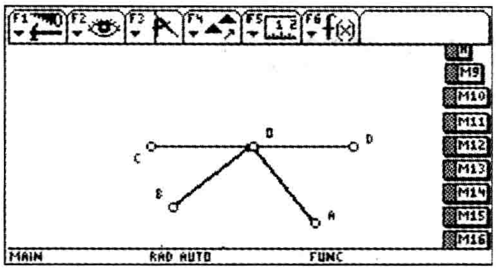


图 12

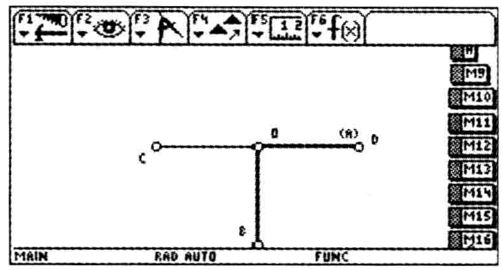


图 13

如图 14，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OD 在$\angle AOB$ 的内部时，$\angle AOC+\angle BOD$ 的值不定.

如图 15，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当射线 OB 与 OD 重合时，$\angle AOC+\angle BOD=90°+0°=90°$.

如图 16，$\angle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转，当$\angle AOB$ 回到原位置时，当然$\angle AOC+\angle BOD=90°$.

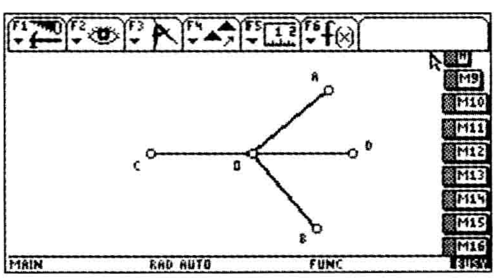


图 14

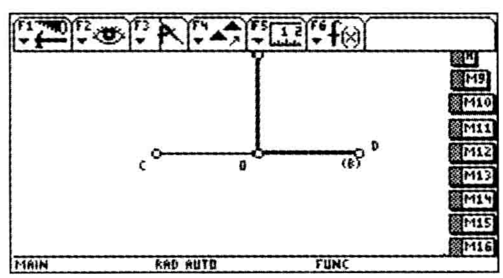


图 15

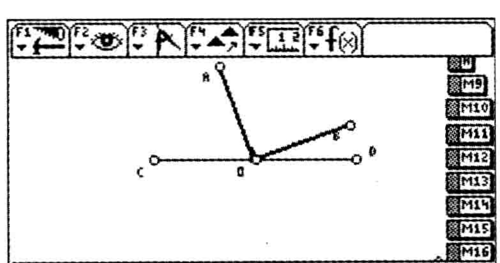


图 16

在图 10 和图 14 中，$\angle AOC+\angle BOD$ 的值不定，有什么变化规律吗?

有，设$\angle AOC=\alpha$，当$\alpha<90°$时，如图10，$\angle AOC+\angle BOD=2\alpha+90°$

当$\alpha>90°$时，如图14，$\angle AOC+\angle BOD=2\alpha-90°$.

我们可以适当变化$\angle AOB$的度数，如$\angle AOB=60°$，$\angle AOB=110°$，与上述旋转过程相同，可以训练学生角的运算.

【图形制作】

（1）拖动射线AC绕点A旋转；

（2）拖动$\angle AOB$绕点O旋转.

二、从等量公理进入几何简单证明

在开始学习证明几何题时，我们常用到一组等量公理.

（1）等量加等量，和相等；即，如果$a=b$，那么$a+c=b+c$.

（2）等量减等量，差相等；即，如果$a=b$，那么$a-c=b-c$.

（3）等量的同倍量相等；即，如果$a=b$，那么$ma=mb$（m为正整数）.

（4）等量的同分量相等；即，如果$a=b$，那么$\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$（m为正整数）.

（5）在等式中，一个量可以用它的等量来代换（简称为"等量代换"）；即，如果$a=b$，$b=c$，那么$a=c$.

下面，我们应用以上公理解决几个问题：

例1　已知：如图1，CD是线段AB上两点，且$AC=BD$.

求证：$AD=BC$.

（北京市数学实验教材，几何第一册第64页例1）

证明：$\because$　$AC=BD$（已知），

又$CD=CD$，

$\therefore$　$AC+CD=BD+CD$（等量加等量，和相等）.

即$AD=BC$.

在TI图形计算器上画出图1，拖动C点在AB上运动.

如图2，保持$AC=BD$不变，让点C和D在AB上运动，使点C与点D重合，AD还等于BC吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

如图3，保持$AC=BD$不变，让点C和D在AB上运动，点C在点D右侧，AD还等于BC吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

如图4，保持$AC=BD$不变，让点C和D在AB上运动，点C在点B右侧，点D在点A左侧，AD还等于BC吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

如图5，保持$AC=BD$不变，让点C和D在AB上运动，点C在点A左侧，点D在点B右侧，AD还等于BC吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

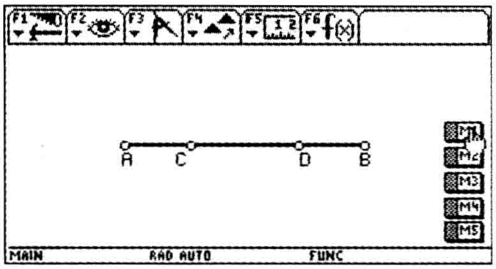


图 1

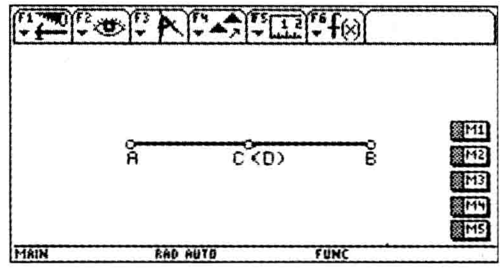


图 2

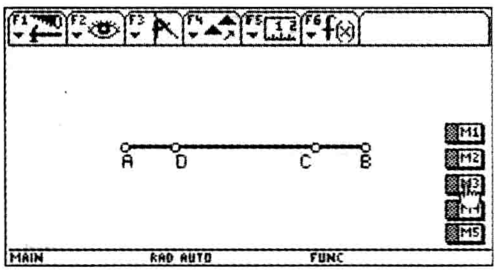


图 3

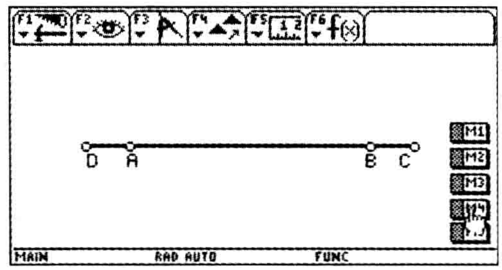


图 4

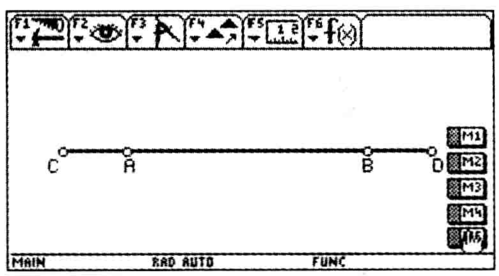


图 5

在图 2 至图 5 的证明中，你使用了什么公理？谈谈你证明以上问题的体会.

例 2　已知：如图 6，$\angle AOB=\angle COD$.

求证：$\angle AOC=\angle BOD$.

（北京市数学实验教材，几何第一册第 65 页例 2）

证明：$\because$　$\angle AOB=\angle COD$（已知），

又$\angle AOD=\angle AOD$，

$\therefore$　$\angle AOD-\angle COD=\angle AOD-\angle AOB$

（等量减等量，差相等），

即$\angle AOC=\angle BOD$.

在 TI 图形计算器上画出图 6，拖动$\angle AOB$绕顶点 O 旋转.

如图 7，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使射线 OB 与 OC 重合，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

如图 8，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使$\angle AOB$ 在$\angle COD$ 外，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由.

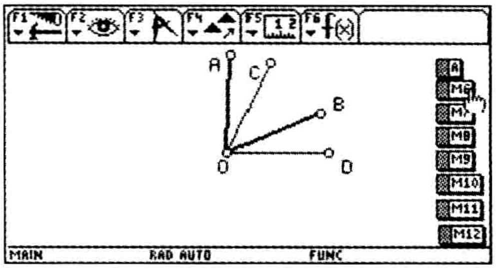


图 6

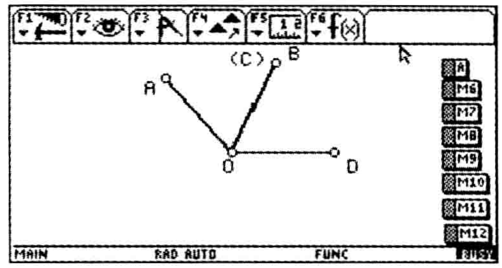


图 7

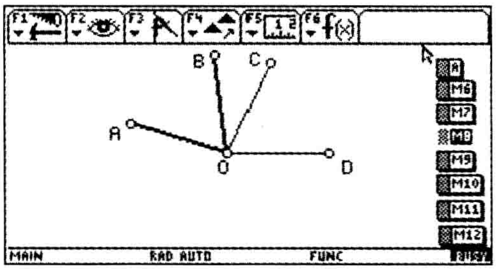


图 8

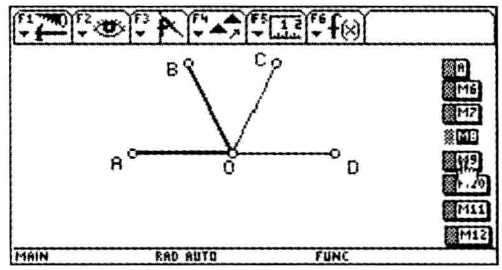


图 9

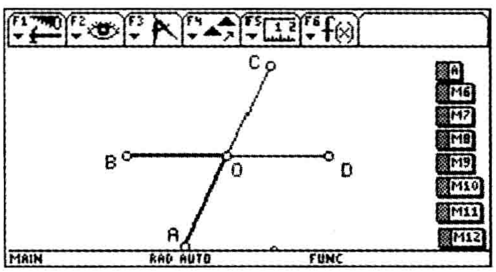


图 10

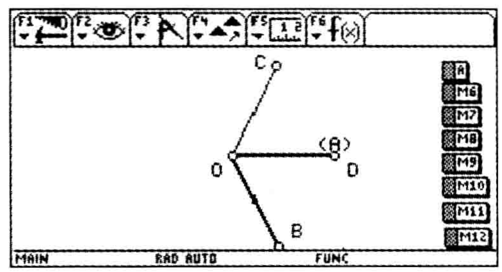


图 11

如图 9，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使射线 OA、OD 互为反向延长线，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由．

如图 10，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使射线 OD、OB 互为反向延长线，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由．

如图 11，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使射线 OA、OD 重合，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由．

如图 12，以 O 为旋转中心，逆时针旋转$\angle AOB$，使射线 OA 在$\angle COD$ 的内部，$\angle AOC$ 还等于$\angle BOD$ 吗？如果相等，请证明；如果不等，说明理由．

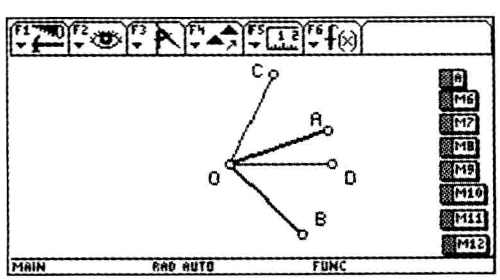


图 12

训练学生学会证明，要有良好的训练系统，入门时，运用等量公理是比较好的训练方法，这是优秀的几何教师在长期教学当中的体会.

【图形制作】

（1）标记向量 CA，点 B 按向量方向平移形成点 D. 拖动点 C，则有 $AC = BD$.

（2）做$\angle AOB = \angle COD$，拖动$\angle AOB$ 绕 O 点旋转.

三、一次探究性活动

2000 年 3 月教育部颁布的九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版，以下简称新大纲），要求每学年在数学课中搞一次探究性活动，在活动中要激发学生学习数学的好奇心和求知欲，通过独立思考，不断追求新知，发现、提出、分析并创造地解决问题，使数学学习成为再发现、再创造的过程，从而实现培养学生的创新意识和实践能力的目的.

下面是我们对一个几何问题的深入探究：

已知：如图 1，$AB /\!/ CD$.

求证：$\angle B + \angle D = \angle E$.

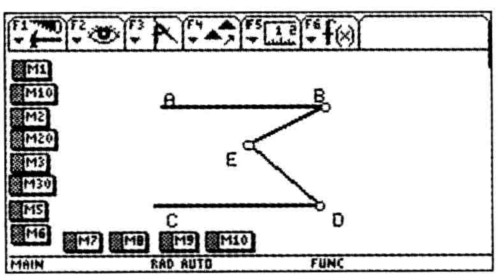


图 1

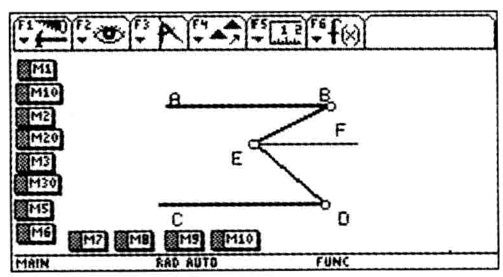


图 2

第一个要求：用多种方法证明.

证法一：如图 2，

过点 E 作 $EF /\!/ AB$，

$\therefore\ \angle B = \angle BEF$.

$\because\ AB /\!/ CD$，

$\therefore\ EF /\!/ CD$.

$\therefore\ \angle D = \angle DEF$.

$\therefore\ \angle B + \angle D = \angle BEF + \angle DEF$.

即$\angle B + \angle D = \angle BED$.

证法二：如图 3，

过点 E 作 $EG /\!/ AB$，

$\therefore\ \angle B + \angle BEG = 180°$.

$\because$　$AB /\!/ CD$,

$\therefore$　$EG /\!/ CD$.

$\therefore$　$\angle D + \angle DEG = 180°$.

$\therefore$　$\angle B + \angle D + \angle BEG + \angle DEG = 360°$.

$\because$　$\angle BED + \angle BEG + \angle DEG = 360°$,

$\therefore$　$\angle B + \angle D = \angle BED$.

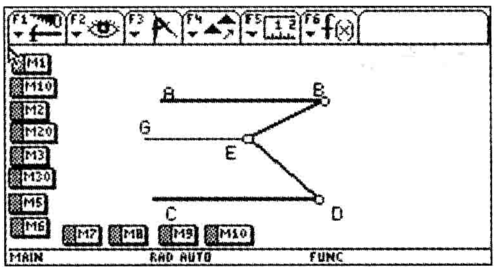


图 3

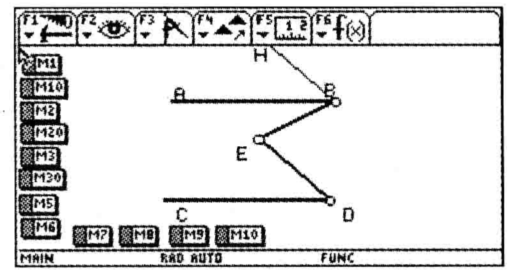


图 4

证法三：如图 4，

过点 B 作 $BH /\!/ DE$，

$\therefore$　$\angle EBH = \angle E$,

即$\angle ABH + \angle ABE = \angle E$.

$\because$　$AB /\!/ CD$，$BH /\!/ DE$,

$\therefore$　$\angle D = \angle HBA$,

$\therefore$　$\angle ABE + \angle D = \angle E$.

第二个要求：点 E 在平面内任意运动，$\angle B + \angle D$ 还等于$\angle E$ 吗？

如果$\angle B + \angle D$ 与$\angle E$ 相等，请给出证明；

如果不等，请说明理由.

通过　TI 图形计算器的测算，$\angle B + \angle D = \angle E$ 依然成立.

如图 5，点 E 在 AB 上，请给出证明.

如图 6，B、E、D 三点共线，请给出证明.

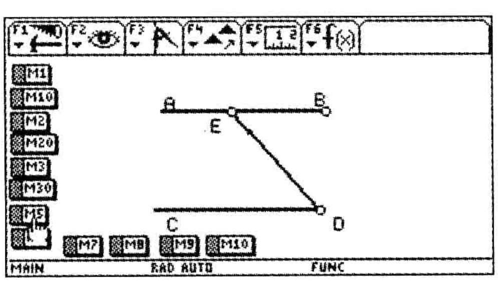


图 5

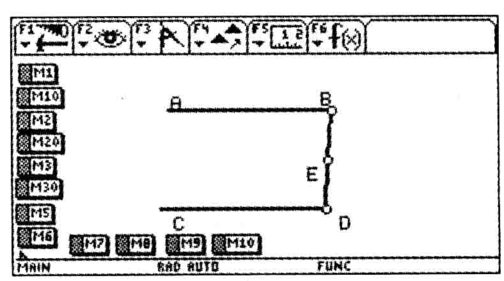


图 6

如图 7，$\angle BED$ 为优角，请给出证明.

如图 8，点 E 在两平行线的 AB、CD 的外部，请给出证明.

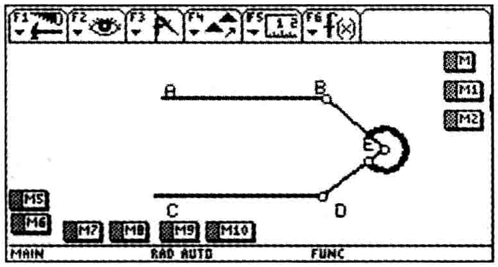


图 7

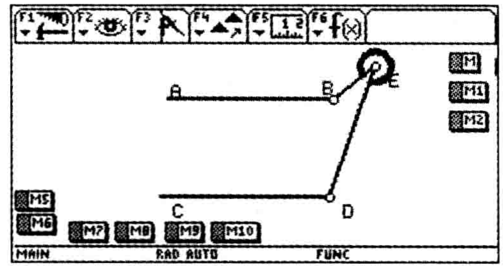


图 8

以下图中的优角或大于优角的角我们不一一标出，请老师和同学们自己标出.

如图 9，点 E 在两平行线的外部，且点 E、B、D 共线，此时$\angle E$ 为周角，请给出证明.

如图 10，点 E 在两平行线的外部，且$\angle E$ 大于周角，请给出证明.

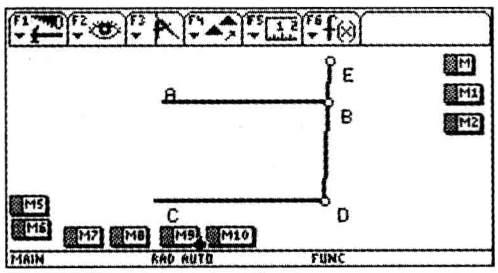


图 9

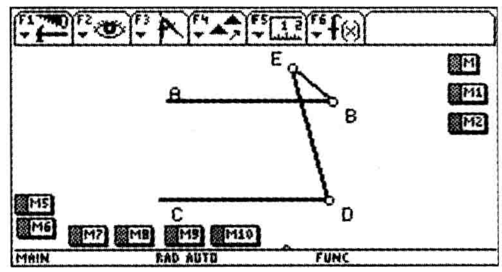


图 10

第三个要求：点 E 分裂为两个点 E_1、E_2，探索$\angle B+\angle D$ 与$\angle E_1+\angle E_2$ 的关系.

如图 11，显然$\angle B+\angle D$ 不等于$\angle E_1+\angle E_2$，可以观察出$\angle B+\angle D<\angle E_1+\angle E_2$，那么$\angle B+\angle D$ 再加上多少度的角就等于$\angle E_1+\angle E_2$?

通过 TI 图形计算器的测算，$\angle B+\angle D+180°=\angle E_1+\angle E_2$. 如图 12，添加辅助线 $E_1F /\!/ AB$，$E_2G /\!/ AB$，通过推理也能得到$\angle B+\angle D+180°=\angle E_1+\angle E_2$.

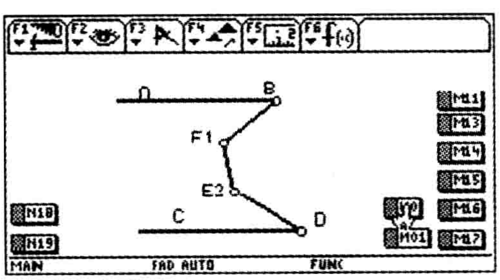


图 11

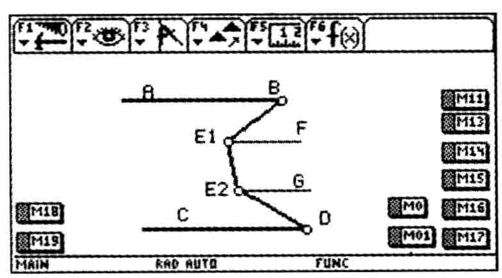


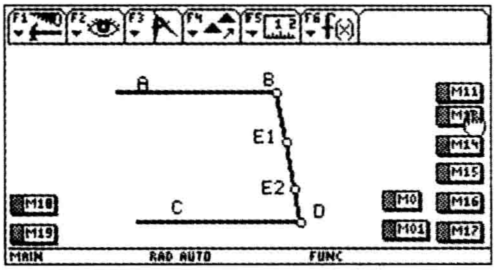
图 12

第四个要求：点 E_1、E_2 在平面内任意运动，$\angle B+\angle D+180°$还等于$\angle E_1+\angle E_2$ 吗? 如果相等，给出证明；如果不等，说明理由.

通过 TI 图形计算器的测算，依然有$\angle B+\angle D+180°=\angle E_1+\angle E_2$.

如图 13，点 B、E_1、E_2、D 四点共线，请给出证明.

如图 14，$\angle E_1$、$\angle E_2$ 为优角，请给出证明.



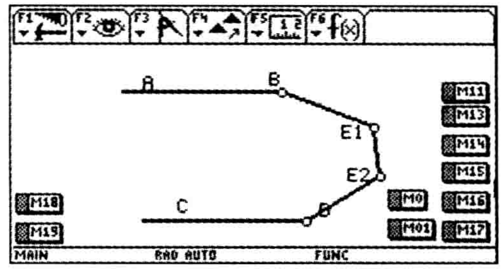
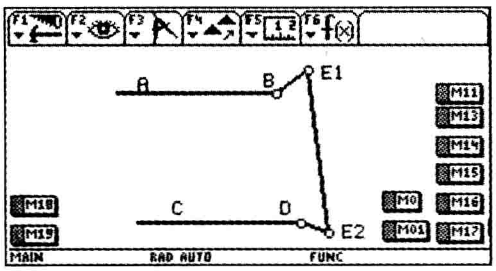


图 13　　　　图 14

如图 15，点 E_1、E_2 在两平行线的外部，分别为优角，请给出证明.

如图 16，点 E_1、E_2 在两平行线的外部，点 E_1、B、D、E_2 四点共线，请给出证明.



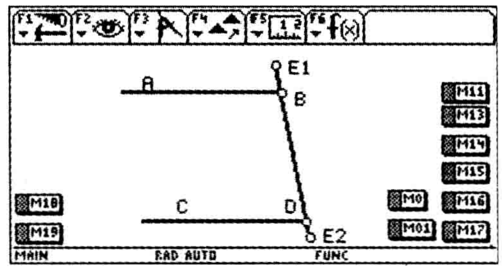
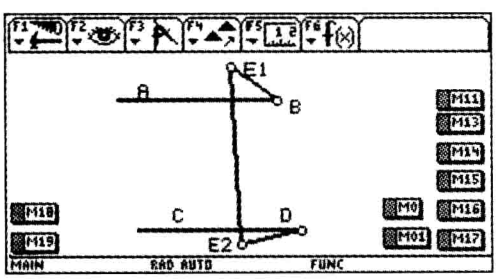


图 15　　　　图 16

如图 17，点 E_1、E_2 在两平行线的外部，请给出证明.

如图 18，折线 BE_1E_2D 形成锯齿形，请给出证明.

如图 19，折线 BE_1E_2D 成为环状，请给出证明.



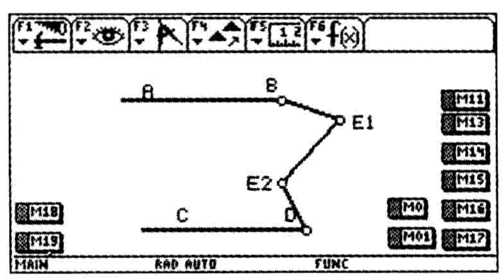


图 17　　　　图 18

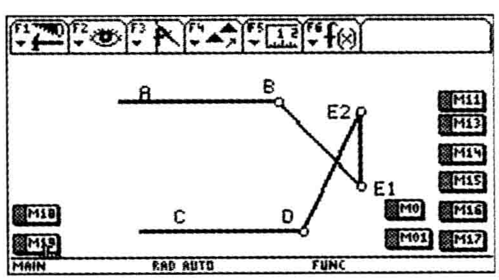


图 19

第五个要求：点 E_2 分裂成两个点 E_2、E_3，也即平行线内有三个点，$\angle B+\angle D$ 与 $\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3$ 有什么关系？

如图 20，显然$\angle B+\angle D$不等于$\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3$，那么$\angle B+\angle D$再加上多少度的角就等于$\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3$?

通过 TI 图形计算器的测算，$\angle B+\angle D+2\times180°=\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3$.

如图 21，添加辅助线 $E_1F/\!/AB$，$E_2G/\!/AB$，$E_3H/\!/AB$，通过推理也能得到$\angle B+\angle D+2\times180°=\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3$.

如图 22，折线 $BE_1E_2E_3D$ 形成锯齿形，请给出证明.

如图 23，折线 $BE_1E_2E_3D$ 形成环状，请给出证明.

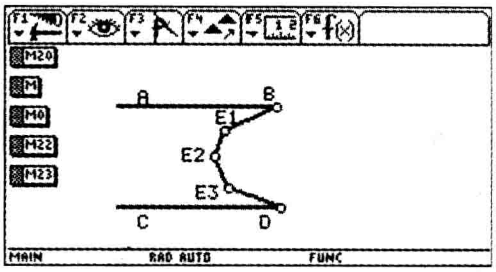


图 20

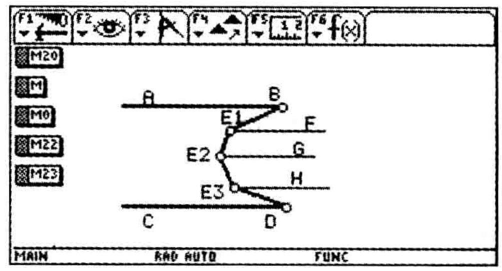


图 21

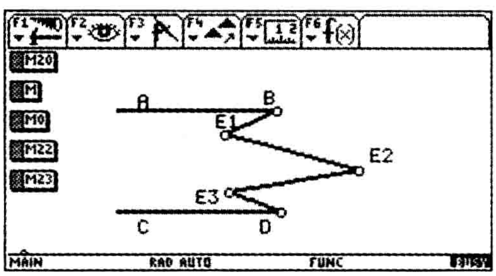


图 22

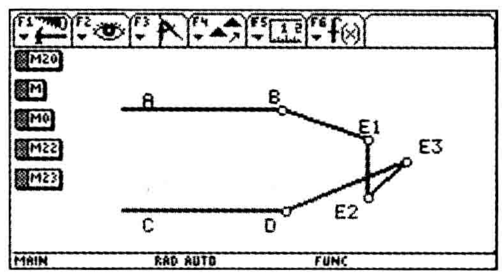


图 23

第六个要求：如图 24，点 E_3 分裂成两个点 E_3、E_4，也即平行线内有四个点，试猜想$\angle B+\angle D$与$\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3+\angle E_4$有什么关系?

由以上的关系，可以猜想到：$\angle B+\angle D+3\times180°=\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3+\angle E_4$.

如图 25，添加辅助线 $E_1F/\!/AB$，$E_2G/\!/AB$，$E_3H/\!/AB$，$E_4I/\!/AB$，通过推理也能得到$\angle B+\angle D+3\times180°=\angle E_1+\angle E_2+\angle E_3\angle E_4$.

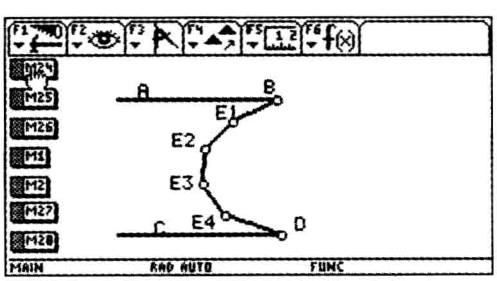


图 24

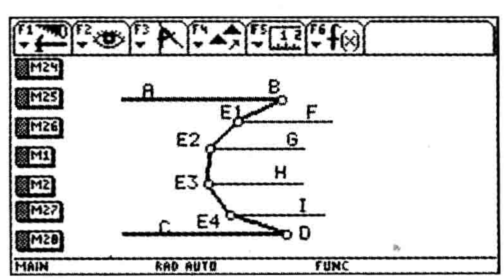


图 25