微積分學

微分學

第一章

公式彙覽

1. **初等代數與幾何中之公式** 茲爲學子便利計，特於 1 至 4 節中彙列各公式，茲請自代數始。

「(1) 二次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$.

解 1. 因子分解法：分解 Ax^2+Bx+C 之因子，令各因子爲零而解出 x.

2. 配方法：將 C 移項除以 x^2 之係數，取 x 係數之半加入兩邊，而開平方。

3. 用公式 $x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$.

根之性質 公式中根號下之 B^2-4AC 稱爲判別式 (Discriminant). 視判別式之爲正，爲零，或爲負，可定出二根之爲實而不等，實而等，或爲虛。

(2) 對數†

$\log ab=\log a+\log b.\quad \log a^n=n\log a.\quad \log 1=0.$

$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.\quad \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a.\quad \log_a a=1.$

(2) 二項式定理 (n 爲一正整數).

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{\underline{\lfloor 2}}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{\lfloor 3}}a^{n-2}b^2$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{\underline{\lfloor r-1}}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

(4) 階乘積 $n!=\underline{\lfloor n}=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(n-1)n.$」

在下列初等幾何之各公式中，r 或 R 表半徑，a 表高，B 表底面積，而 s 表斜高。

「(5) 圓. 周長$=2\pi r$. 面積$=\pi r^2$.

(6) 扇形. 面積$=\frac{1}{2}r^2\alpha$，式中 $\alpha=$此扇形之中心角，而以弧度法量得之值.

---

*「本章公式未能齊備，書中又未附對數諸表，殊不便檢查，讀者宜購本局出版之'理科簡明手冊'以備翻閱。

†關於對數，尚有一重要互化式見後文第〔89〕頁（此改訂本之 81 頁），今并錄於此備查。

$\log_{10}N=\log_{10}e\cdot\log_e N=\log_e N/\log_e 10$. 故 $\log_e N=\log_e 10\log_{10}N$

在此 $e=2.71828\cdots$, $\log_{10}e=0.4343\cdots$, $\log_e 10=2.303\cdots$——譯者.」

(7) 角柱. 體積$=Ba$.

(8) 角錐. 體積$=\frac{1}{3}Ba$.

(9) 直圓柱. 體積$=\pi r^2 a$. 側面積$=2\pi ra$.
全面積$=2\pi r(r+a)$.

(10) 直圓錐. 體積$=\frac{1}{3}\pi r^2 a$. 側面積$=\pi rs$.
全面積$=\pi r(r+s)$.

(11) 球. 體積$=\frac{4}{3}\pi r^3$. 表面積$=4\pi r^2$.

(12) 直圓錐之截體. 體積$=\frac{1}{3}\pi a(R^2+r^2+Rr)$.
側面積$=\pi s(R+r)$.

2. 平面三角中公式. 下列諸公式甚多有用者.

(1) 角之度量. 普通量角之法有二; 換言之: 卽有, 二種單位角.

角度. 此單位角, 乃旋轉一周之$\frac{1}{360}$, 而稱曰一度.

弧度. 此單位角, 乃其所對弧長等於半徑者, 而稱爲一弧度(亦譯作弳).

此二種單位角間之關係, 由下列方程式定之.

$$180\text{ 度}=\pi\text{ 弧度}\ (\pi=3.14159\cdots).$$

解此卽得.

$$1\text{ 度}=\frac{\pi}{180}=0{,}0174\cdots\text{弧度};\ 1\text{ 弧度}=\frac{180}{\pi}=57.29\cdots\text{度},$$

本此定義, 卽有

$$\text{一角之弧度數}=\frac{\text{所對弧長}}{\text{半徑長}}.$$

用此等方程式卽可化一種度量爲他種者.

(2) 關係式

$$\cot x=\frac{1}{\tan x};\quad \sec x=\frac{1}{\cos x};\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x;\ 1+\cot^2 x=\csc^2 x.$$

(3) 化角之公式

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

* 方括內數碼之說明, 見後 p.35 —— 譯者.

(4) $(x+y)$ 與 $(x-y)$ 之函數.

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},\ \tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

(5) $2x$ 與 $\frac{1}{2}x$ 之函數.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\quad \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$
$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\ \tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$
$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x;\ \cos^2 x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos x.$$

(6) 和角定理.

$$\sin x+\sin y=2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\tfrac{1}{2}(x+y)\cos\tfrac{1}{2}(x-y).$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\tfrac{1}{2}(x+y)\sin\tfrac{1}{2}(x-y).$$

(7) 任意三角形關係式.

正弦定律. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

餘弦定律. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

面積公式. $K=\frac{1}{2}bc\sin A.$

$$K=\frac{\frac{1}{2}a^2\sin B\sin C}{\sin(B+C)}.$$
$$K=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ [\text{式中 } s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)]$$

3. 平面解析幾何中之公式. 較重要之公式如下列:

(1) $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2)$ 二點間距離.

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

P_1P_2 之斜率. $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$

中點. $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2).$

(2) 二線間之角.

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

(對於平行, $m_1=m_2$; 對於垂直線, $m_1m_2=-1$.)

(3) 直線之方程式.

點斜式. $y-y_1=m(x-x_1)$.

斜截式. $y=mx+b$.

兩點式. $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

截距式. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

(4) 自直線 $Ax+By+C=0$ 至 $P_1(x_1,y_1)$ 之垂直距離.

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

(5) 直坐標與極坐標間關係.

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\operatorname{arc}\tan\frac{y}{x}$$

(6) 圓之方程式.

心 (h,k). $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

(7) 拋物線之方程式.

頂點在原點者, $y^2=2px$, 焦點 $(\frac{1}{2}p,0)$.

$x^2=2py$, 焦點 $(0,\frac{1}{2}p)$.

頂點. (h,k). $(y-k)^2=2p(x-h)$, 軸為 $y=k$.

$(x-h)^2=2p(y-h)$, 軸為 $x=h$.

軸為 y 軸者. $y=Ax^2+C$.

(8) 他種曲線之方程式.

橢圓之心在原點而二焦點在 x 軸上者. $(a>b)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

雙曲線之心在原點而二焦點在 x 軸上者.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

等軸雙曲線之心在原點而以二坐標軸為漸近線者.

$$xy=C.$$

餘可參看第二十六章.」

4. 立體解析幾何中公式 若干較重要之公式如下列.

「(1) $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 二點間距離.

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

(2) 直線

方向餘弦： $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

方向數： a, b, c.

則 $$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

對於 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 之聯線

$$\frac{\cos\alpha}{x_2-x_1}=\frac{\cos\beta}{y_2-y_1}=\frac{\cos\gamma}{z_2-z_1}$$

(3) 二直線.

方向餘弦. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma; \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$.

方向數： $a, b, c; a', b', c'$.

如 θ =此二線間之角, 則

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'.$$

$$\cos\theta=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

平行線. $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

垂直線. $$aa'+bb'+cc'=0.$$

(4) 過 (x_1, y_1, z_1) 而方向數為 a, b, c. 之直線方程式.

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},$$

(5) 平面 在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 中,諸係數 A, B, C 乃此平面上一垂線之方向數.

過 (x_1, y_1, z_1) 而有方向數 A, B, C 之平面方程式.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

(6) 二平面.

方程式： $$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

交線之方向數：

$$BC'-CB', CA'-AC', AB'-BA'.$$

如 θ=此二平面間之角，則

$$\cos\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

5. 希臘字母。

字	音	字	音	字	音
A α	Alpha	I ι	Iota	P ρ	Rho
B β	Beta	K κ	Kappa	Σ σ	Sigma
Γ γ	Gamma	Λ λ	Lambda	T τ	Tau
Δ δ	Delta	M μ	Mu	Υ υ	Upsilon
E ϵ	Epsilon	N ν	Nu	Φ ϕ	Phi
Z ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	X χ	Chi
H η	Eta	O o	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

「今爲便利檢查計，特補充若干數值表於書中空白處，譯者」

自然對數表 (1—99)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0.0000	6932	10986	3863	6094	7916	9459	*0794	1972
1	2.3026	3979	4849	5649	6391	7080	7726	8332	8904	9444
2	2.9957	*0445	0910	1355	1781	2189	2581	2958	3322	3673
3	3.4012	4340	4657	4965	5264	5553	5835	6109	6376	6636
4	3.6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918
5	3.9120	9318	9512	9703	9890	*0073	0254	0431	0604	0775
6	4.0943	1109	1271	1431	1589	1744	1897	2047	2195	2341
7	4.2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694
8	4.3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4.4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951

$\log_e 10 = 1/\log_{10}e = 1/M = 1/0.4343 = 2.3026$

$\log_e 0.1 = \mathrm{colog}_e 10 =$ [illegible] $\log_e 0.01 = \bar{5}.3849$

〔說明：〕

（一） 定位部僅於第一行各對數上註明，附星號* 者與其餘同橫列各對數，用下一橫列之定位部.

例如 $\log_e 7=1.9459$, $\log_e 9=2.1972$ $\log_e 54=3.9890$,

$\log_e 59=4.0775$.

（二） 小數之自然對數可加 $\log_e 0.1$ 或 $\log_e 0.01$; 10 之倍數者，可加 $\log_e 10$.

例如 $\log_e 59=4.0775$ $\log_e 59=4.0775$ $\log_e 59=4.0757$

$\log_e 0.1=\underline{\bar{3}.6974}$ $\log_e 0.01=\underline{\bar{5}.3948}$ $\log_e 10=\underline{2.3026}$

$\log_e 5.9=1.7749$ $\log_e 0.59=1.4723$ $\log_e 590=6.3891$

（二） 指數函數 e^x 表 （見第〔18〕頁）

（三） 度與弧度互化表 （見第〔186〕頁）

第二章

變數，函數，與極限

6. 變數與常數. 一量在某一研究中，如能取無限個數值則稱為變數. 變數常以字母中在後者表之.

一量在某一研究中有定值者，稱曰常數.

在一切問題中皆有同值者，曰數值常數或絕對常數(absolute constants)；如 2, 5, $\sqrt{7}$, π 等是.

泛定常數 (arbitrary constants) 乃常數之可與以任何數值者，但在某一研究中，則當始終取此所與之值. 此種常數，每以字母中在前者表之.

例如在方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

中 x 與 y 表此線上動點之變坐標，而 a 與 b 則為截距，可與以定值者.

常數 a 之數值（亦曰絕對值），與其代數值有別. 以 $|a|$ 表之. 例如 $|-2|=2=|2|$. 符號 $|a|$ 讀為"a 之數值".

7. 變數之間隔 吾人往往僅取數系之一部分，例如可限制變數，使其僅取 a 與 b 間之諸值，至於 a 與 b 之值，可在其內，或除去其一，或二者均除去之. 吾人即以符號$[a,b]$表 a,b 及其間之一切數，a 設為小於 b，如作他用，則另行說明. 符號$[a,b]$讀為"自 a 至 b 之間隔".

8. 連續變化 一變數 x 稱為經過間隔$[a,b]$連續變化者，即 x 之值自 a 起漸增，循大小之順序，歷 a 與 b 間一切值，以至於 b；或 x 之值自 $x=b$ 起漸減，陸續歷一切中間值，以至 $x=a$，此意可以幾何解釋之；如第 8 頁上之圖.

取 O 爲原點，在直線上定 A 及 B 二點，使各與 a 及 b 相當，更命 P 點相當於變數 x 之一特值，間隔 $[a,b]$ 顯然以線段 AB 表之。當 x 連續變化經歷間隔 $[a,b]$ 時，如 x 增加，則成線段 AB，如 x 減小，則成線段 BA。

$$\overset{}{\underset{O}{\circ}}\text{———}\overset{a}{\underset{A}{\circ}}\text{———}\overset{x}{\underset{P}{\circ}}\text{———}\overset{b}{\underset{B}{\circ}}$$

9. 函數　有二變數相關，當已知其一之值時，他一之值卽隨之而定，則後者稱爲前者之函數。

一切科學問題，幾於盡論此類之量與關係，且在日常生活之經驗中，吾人亦時時遇此二量相依之情形。例如當他事相同時，一人能舉之重視其力之大小而定，同理，一童子能奔走之距離，可視爲與時間相關，吾人可謂一正方形之面積乃其一邊長之函數，一球之體積乃其直徑之函數。

10. 自變數與因變數　變數之值，可在某特殊問題所定之範圍內，任意指定者，曰自變數 (independent variable) 亦稱主元 (argument)；另一變數其值視此自變數之已知值而定者，曰因變數 (dependent variable) 卽函數也。

當吾人處理二相關變數時，可隨意任選其一爲自變數；然一經選定後，苟無某種聲明或變易，不得改換之。例如一正方形面積爲其邊長之函數，反之邊長亦爲面積之函數。

11. 函數之記法　符號 $f(x)$ 卽用以表 x 之函數者，讀爲 "f of x"*　欲於數種函數間示別，可易所冠之字母如 $F(x)$, $\phi(x)$, $f'(x)$† 等等。

在任何研究中，一函數符號指出此函數對於變數之同一相依法則。在較簡之情形，此法則可取一組運算施於變數以表之。在此情形，函數符號表示對變數諸組相異值之同一運算或一組運算。例如

$$f(x)=x^2-9x+14,$$

$$f(y)=y^2-9y+14.$$

*〔在我國，或仍讀爲 "x 之函數"，或讀爲 "x 之 f"—譯者〕

†〔f' 讀爲 "f 撇"，英語爲 "f prime"。—譯者〕

又 $f(b+1)=(b+1)^2-9(b+1)+14=b^2-7b+6,$

$$f(0)=0^2-9\cdot0+14=14,$$

$$f(-1)=(-1)^2-9(-1)+14=24,$$

$$f(3)=3^2-9\cdot3+14=-4.$$

12. 零不得爲除數. a 與 b 二數之商,乃一數 x,能使 $a=bx$ 者,由此定義,顯見零不得爲除數.因如 $b=0$,試思任何數與零相乘爲零,可見除 $a=0$ 外,x 不能存在.縱苟如是,則 x 可爲任何數,故

$$\frac{a}{0},\ \frac{0}{0},$$

等形爲無意義.

「愼勿於不知不覺間以零爲除數,下列之謬證可爲一例:

假設 $a=b$.

則顯有 $ab=a^2$.

減去 b^2, $ab-b^2=a^2-b^2$.

分解因子. $b(a-b)=(a+b)(a-b)$.

除以 $a-b$. $b=a+b$.

但 $a=b$;

故 $b=2b$,

或 $1=2$.

此種不合理之結果,乃因吾人曾以 $a-b=0$ 相除也.」

習題 1.

1. 已知 $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$,試證 $f(0)=-30$, $f(2)=0$, $f(3)=f(5)$, $f(-1)=-6f(6)$.
2. 如 $f(x)=x^3+3x^2-5$,試求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.
3. 如 $F(x)=4^x$,試求 $F(0)$, $F(-1)$, $F(\frac{1}{2})$.
4. 已知 $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$,試證 $f(x-2)=x^3-16x^2+83x-140$.
5. 已知 $f(x)=x^2-3x+7$,試證 $f(x+h)=x^2-3x+7+(2x-3)h+h^2$.
6. 已知 $f(x)=x^2+4x-1$,試證 $f(x+h)-f(x)=(2x+4)h+h^2$
7. 已知 $f(x)=\frac{1}{x}$,試證 $f(x+h)-f(x)=-\frac{h}{x^2+xh}$.

8. 設 $\phi(x)=a^x$, 試證 $\phi(y)\cdot\phi(z)=\phi(y+z)$.

9. 已知 $\phi(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$. 試證 $\phi(y)+\phi(z)=\phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$.

10. 已知 $f(x)=\sin x$, 試證

$$f(x+2h)-f(x)=2\cos(x+h)\sin h$$

〔提示〕 用第 3 頁之 (6) 式.

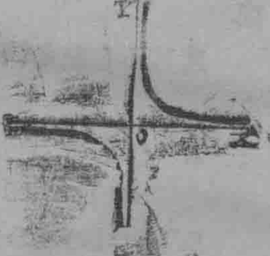
13. 函數之圖解; 連續性 試取函數 x^2, 而令

(1) $$y=x^2.$$

對於 x 之任一值此關係式定一 y 值; 換言之, 對自變數之一切值 y 之值由 (1) 確定之 (defined). (1) 之軌跡爲一拋物線 (見右圖), 而稱爲函數 x^2 之圖解 (graph). 如 x 連續變化 (第 8 節) 自 $x=a$ 至於 $x=b$, 則 y 亦連續變化, 自 $y=a^2$ 至於 $y=b^2$, 而 $P(x,y)$ 一點則沿曲線連續移動, 自點 (a,a^2) 至於點 (b,b^2). 且 a 與 b 得有任何值, 如是吾人謂 "函數 x^2 對一切 x 值爲連續".

繼取函數 $\frac{1}{x}$,

(2) $$y=\frac{1}{x}$$



除 $x=0$ 外 (第 12 節), 每一 x 值, 均可由此方程式得一 y 值. 對於 $x=0$, 此函數未嘗確定, (2) 之軌跡所成圖解, 乃一等軸雙曲線 (如圖). 如 x 連續增加, 經歷一不含 $x=0$ 之任何間隔 $[a,b]$, 則 y 值連續減小, 自 $\frac{1}{a}$ 以至於 $\frac{1}{b}$, 而 $P(x,y)$ 一點描出圖解上介乎 $\left(a,\frac{1}{a}\right)$ 與 $\left(b,\frac{1}{b}\right)$ 間之一段. 如是吾人謂 "函數 $\frac{1}{x}$ 除 $x=0$ 外, 對其他之一切 x 值均爲連續". 對 $x=0$ 此圖解上無點.

諸例釋明函數連續性之概念, 其定義見第 17 節.

15. 變數之極限. 初等幾何學中求圓面積之公式時, 即含有變數趨於極限之概念. 取一內接正多角形之面積, 其邊數爲任意數 n 而設 n 值無限增加.

如此則變面積趨於一極限,此極限卽定爲圓之面積,此時變數 v(指面積)常增,而差數 $a-v$ 漸減,終至小於任何小之預定數,在此 a 爲圓之面積.

將此例所示之關係,更求明確,卽成下之

定義. 變數 v 稱爲趨於常數 l 以之爲極限者,乃 v 之相續值能使差數 $v-l$ 之數值終小於任何預定之正數,且永小於是數.

如此確定之關係可書爲 $\lim v=l$,爲便利計,吾人可用符號 $v\to l$,讀如"v 趨於 l 以爲極限",或更簡作"v 趨於 l".(有若干著者用符號 $v\doteq l$.)

「〔例〕 命 v 之值爲

$$2+1,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{4},\ \cdots,\ 2+\frac{1}{2^n},\ \cdots,$$

以至於無限,則顯導 $\lim v=2$,或 $v\to 2$.」

如吾人在一直線上,做第 8 節所述,標出一點 L,使與極限 l 相當,更於 L 點兩旁,各取無論如何小之長度 ϵ,則 v 所定之諸點終必盡在與間隔〔$l-\epsilon$, $l+\epsilon$〕相當之線段內.

15. 函數之極限論. 在應用方面,所遇之情況每如下述,吾人有一變數 v,及已知一 v 之函數 z,自變數 v 所取之值,使 $v\to l$,吾人乃取因變數 z 之值考驗之,特別注意者,乃決定 z 是否趨於一極限.如有一常數 a,使 $\lim z=a$,則此所述之關係可書爲.

$$\lim_{v\to l} z=a.$$

讀如"當 v 趨於 l 時,z 之極限爲 a."

16. 關於極限諸定理. 計算一函數之極限時,每須用及下列諸理.其證見第 20 節.

設 u, v, 與 w 爲一變數 x 之函數,更假定

$$\lim_{x\to a} u=A,\quad \lim_{x\to a} v=B,\quad \lim_{x\to a} w=C.$$

則有下列各關係:

(1) $$\lim_{x\to a}(u+v-w)=A+B-C.$$

(2) $$\lim_{x\to a}(uvw)=ABC.$$

(3) $$\lim_{x\to a}\frac{u}{v}=\frac{A}{B},\text{ 但 } B \text{ 不得爲零.}$$

簡言之,代數和,積,或商之極限,分別等於各極限之同一和,積,或商,但在末述一款中,分母之極限,不得爲零.

如 c 爲一常數(對於 x 爲獨立)而 B 不爲零,則按上理,有

(4)　$\lim\limits_{x\to a}(u+c)=A+c,\quad \lim\limits_{x\to a} cu=cA,\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{v}=\dfrac{c}{B}.$

今取例題數則考之.

「1.　試證 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x)=12.$

〔解〕　此已知函數爲 x^2 與 $4x$ 之和.吾人可先求此二函數之和.按(2).

$$\lim_{x\to 2} x^2=4,\ 因\ x^2=x\cdot x\ 也.$$

按(4).

$$\lim_{x\to 2} 4x=4\lim_{x\to 2} x=8.$$

是以按(1).知答數爲 $4+8=12.$

2.　試證 $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2-9}{z+2}=-\dfrac{5}{4}.$

〔解〕　取分子論之,按(2)與(4).有 $\lim\limits_{z\to 2}(z^2-9)=-5.$ 對於分母 $\lim(z+2)=4.$ 有以按(3)得所求之結果.」

17.　連續函數與不連續函數.　在上節之例1中曾證明

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4x)=12.$$

試察此答數卽函數當 $x=2$ 時之値.換言之,當 x 趨於2以爲極限時,此函數之極限値,等於 $x=2$ 時之函數値.此函數稱爲在 $x=2$ 連續,其普通之定義如次:

定義.　函數 $f(x)$ 稱爲在 $x=a$ 連續(continuous)者,乃當 x 趨於 a 爲極限時,此函數之極限値卽爲 $x=a$ 時函數所取之値,以符號表之,如

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

則 $f(x)$ 在 $x=a$ 爲連續.

謂函數在 $x=a$ 爲不連續(discontinuous)者*,乃不合上述條件也.

有常遇函數如次須加注意.

*數習見者有二種.一已見第18節一見第69節.——譯者.

第一款. 今以例釋函數對變數特值爲連續之情形,可考函數

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}.$$

與 $x=1$ 時 $f(x)=f(1)=3$. 且如 x 趨於 1 爲極限, 函數 $f(x)$ 趨於 3 爲極限 (第 16 節) 故此函數在 $x=1$ 爲連續.

第二款. 連續函數之定義中,須設函數在 $x=a$ 業已確定. 如其不然,有時可指定此函數在 $x=a$ 有某值,使仍合於連續之條件. 下列定理即網羅此等情形.

定理. 如 $f(x)$ 在 $x=a$ 未確定, 且設

$$\lim_{x\to a} f(x)=B,$$

則苟以 B 爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 時之值, $f(x)$ 在 $x=a$ 爲連續.

例如函數 $\qquad \dfrac{x^2-4}{x-2}.$

在 $x=2$ 未確定(因此時有零爲除數也). 但對於 x 之他值,

$$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2;$$

且 $$\lim_{x\to 2}(x+2)=4;$$

是故 $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

此函數在 $x=2$ 雖未嘗確定, 然吾人苟於 $x=2$ 時, 任意指定其值爲 4, 則此函數於是值遂爲連續.

一函數 $f(x)$ 稱爲在一間隔內連續者, 乃對在此間隔內之一切 x 值皆爲連續也.*

在微積分中, 吾人每需計算變數 v 之函數當 v 趨於 a 以爲極限時之值, a 所在之間隔中, 此函數爲連續. 此極限值, 即函數在 $v=a$ 時之值.

13. 無窮大(∞). 如一變數 v 之數值在後可大於任何預定之正數而永較之爲大, 則吾人謂 v 化爲無窮大(infinite). 如 v 僅取正值, 則

---

*「本書中吾人僅論普通爲連續之函數, 即得於某某孤立值爲例外, 對其餘一切 x 值均爲連續, 吾人所得之結果, 普通皆指僅於問題中函數確爲連續之 x 值, 始能成立.」

化為正無窮大；如僅取負值，則化為負無窮大，此三款之符號各為

$$\lim v=\infty,\qquad \lim v=+\infty,\qquad \lim v=-\infty.$$

在諸款中，v 并不類第 14 節所云之趨於極限。符號 $\lim v=\infty$，$v\to\infty$，應讀為“v 化為無窮大”而非“v 趨於無窮大。”*

例如吾人可書

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

意即指 $\frac{1}{x}$ 於 x 趨於零時化為無窮大。

試就第 17 節可見

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,$$

即如當 x 趨於 a 為極限時 $f(x)$ 化為無窮大，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 為不連續。

當自變數化為無窮大時，函數可有一極限值。例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

且普遍情形，如當 $x\to\infty$ 時 $f(x)$ 趨於定值 A 以為極限，吾人可用第 17 節之符號而書

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

有數種特殊之極限，時時見及，茲列舉於下。其中之常數 c 不為零。

	以極限式書之	以簡式書之
(1)	$\lim_{v\to 0}\frac{c}{v}=\infty.$	$\frac{c}{0}=\infty.$
(2)	$\lim_{v\to\infty}cv=\infty.$	$c\cdot\infty=\infty.$
(3)	$\lim_{v\to\infty}\frac{v}{c}=\infty.$	$\frac{\infty}{c}=\infty.$
(4)	$\lim_{v\to\infty}\frac{c}{v}=0.$	$\frac{c}{\infty}=0.$

*「因所採之符號及為一致計，$v\to+\infty$ 一式有時亦讀為“v [illegible]限正無窮大”。同理，$v\to-\infty$ 可讀為“v 趨於極限負無窮大”，而 $v\to\infty$ 則讀為“v 在數值上趨於極限無窮大”。

此種語法甚為便利，但學子慎勿忘無窮大非一極限，因無窮本即非數也。」

在當變數化爲無窮大時,求二多項式所成商式之極限値,此等特殊法甚爲有用,下例卽釋明此法:

〔例〕 試證 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}=-\dfrac{2}{7}$。

〔解〕 分子分母同以其中所有 x 之最高冪 x^3 除之,如是則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x}-7}.$$

分子或分母中含有 x 之各項按 (4) 知其爲零,是以按第 16 節之 (1) 與 (3),卽得答案.在相類之款中第一步如次:

分子分母同以其中所有變數之最高冪除之.

如 u 及 v 爲 x 之函數,且設

$$\lim_{x\to a}u=A,\quad \lim_{x\to a}v=0。$$

設 A 不爲零,則

$$\lim_{x\to a}\frac{u}{v}=\infty。$$

此記號爲第 16 節 (3) 所舉之例外情形備一格,卽當 $B=0$ 而 A 零之時也.更可參考第 20 節.

習 題 2

試證下例各陳述語:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2}=-\dfrac{2}{5}$。

〔證〕 $$\lim_{x\to\infty}\frac{5-2x^2}{3x+5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x^2}-2}{\dfrac{3}{x}+5}$$

〔分子分母同以 x^2 除之.〕

按 (4) 知分子分母中含有 x 之各項爲零,是以按第 16 節之 (1) 與 (3) 卽得答案.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{3x}=\dfrac{1}{3}$。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+3x^2}{3x^4-16x^2}=-\dfrac{1}{2}$。

4. $\lim\limits_{h\to 0}(4y^3+3hy^2-2h^2)=4y^3$。

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-3hx+h^2)=\infty$。

6. $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(2x+k)^2-3kx^2}{x(3x+k)}=2.$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{x^2+2x-7}=3.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{6-5x^2}=0.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\dfrac{a_0}{b_0}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=\infty.$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}=0.$

13. $\lim\limits_{s\to a}\dfrac{s^4-a^4}{s^2-a^2}=2a^2.$

14. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=n$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=-\dfrac{1}{3}$

16. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

〔證〕 此極限値不能由於代入 $h=0$ 求得之,因如是則(按第 12 節)即得不定式 $\dfrac{0}{0}$. 於此吾人取一適宜之法以化此式如下,換言之,即化去其分子之根號也.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}};$$

是以 $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

17. 已知 $f(x)=x^2$, 求證.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x.$$

18. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$, 求證.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+b.$$

19. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, 求證.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{x^2}.$$