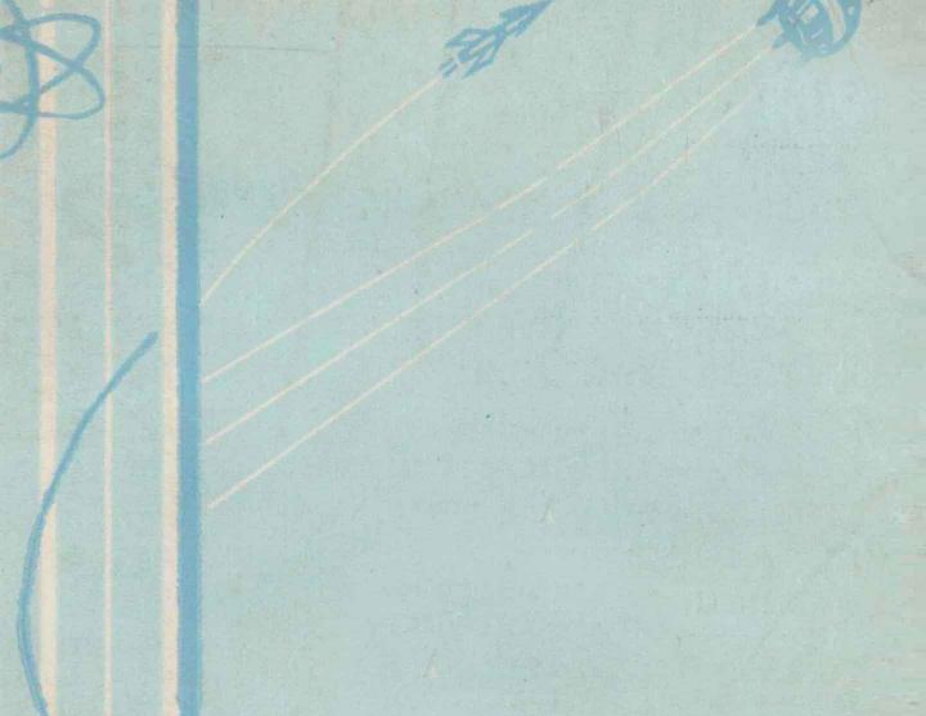

湖南省高师函授试用教材

解析几何

JIE XI JI HE

湖南省高师函授试用教材

解 析 几 何

湖南省中小学教学辅导部编

*

湖南人民出版社出版
湖南省新华书店发行
湖南省新华印刷一厂印刷

*

1978年11月第1版第1次印刷

印数：1—11,700册　印张：11.5

统一书号：K7109·1169　定价：0.72 元

编 者 的 话

遵照英明领袖华主席关于“采取有力措施，培训教师，加速编写新教材，充分利用各种现代化手段，提高教育质量”的指示，我们在省教育局党委的领导下，编写了“解析几何”函授试用教材，供我省高中数学教师进修学习使用.

由于我们水平有限，加之时间仓促，教材的错误和缺点一定很多，恳切希望广大读者把对教材的意见和发现的问题及时告诉我们，以便再版时改正。

目　　录

第一编　平面解析几何

第二编　空间解析几何

第一编　平面解析几何

在初等几何里，研究了一些基本的几何图形，如三角形、圆等．所采用的研究方法是综合法，也就是借助图形直接来研究几何问题的一种方法．这种方法只局限于研究比较简单的几何图形如直线、圆以及由它们组成的图形．对于比较复杂的曲线如人造地球卫星的运行轨道、桥梁建筑中的拱形曲线和某些机器零件的轮廓线等，用综合法就显得相当复杂，并且往往会失去作用．然而，在工农业生产和科学技术的研究方面，却要求我们刻画出各种复杂曲线的特征，掌握其计算方法和作图方法．因此，就要采用新的方法，就是本书将要介绍的解析法．解析法是通过坐标法间接来研究几何图形的方法，这种方法是借助于代数的运算，从表示图形的函数关系推出几何概念，用它可以解决比较复杂的几何问题．在本编的前两章里将学到解析几何的基本概念——平面坐标法和曲线方程的概念；在后两章里将利用这种基本概念，来研究平面上简单的但也是最主要的几何图形——直线和二次曲线．

第一章 坐 标 法

坐标法是用数来表示点的位置的方法，它使数和形结合起来，这是解析几何的基本出发点。因此，在本章里，我们首先建立直角坐标法和极坐标法，然后讨论平面上点的坐标变换，最后利用坐标法来解决平面上一些最基本的几何问题，如两点间的距离、线段的定比分割和三角形面积等。

§1 有向线段

在初等几何里，一条线段的主要特征是它的“长度”,并不考虑它的方向。但是很多重要的物理量，如力、速度、加速度等，只用线段的长度来表示是不够的，这只能表示它的大小，而无法表示它的方向，因此就要引入有向直线和有向线段的概念。

任意一条直线，都可以看作有两个相反的方向，如果指定其中一个方向作为正向，那么另一方向就是负向。一条指定了正向的直线叫做有向直线或简称为轴。在图1—1里有向直线的正向用箭头来表示。

图 1 — 1

在轴l上对于一个以A、B两点做端点的线段，如果指定它的一个端点作始点，另一个端点作终点，并规定由始点到终点的方向作为线段的方向.这种规定了方向的线段叫做有向线段.我们一般用符号$\overline{AB}$来表示始点是A、终点是B的有向线段.在图1—1里，有向线段$\overline{AB}$的方向和轴l的正向一致，而有向线段$\overline{BA}$的方向和轴l的正向相反.

设$\overline{AB}$是轴l上任意的一条有向线段，如果规定了长度单位，那么有向线段所含长度单位的倍数叫做这个有向线段的长度.线段的长度也是线段两端点间的距离.有向线段$\overline{AB}$的长度用符号$|AB|$表示，$|AB|$也叫做有向线段$\overline{AB}$的绝对值.注意，有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$虽然具有相反的方向，但是它们的长度是相同的，即$|AB| = |BA|$.

如果对于轴l上的有向线段$\overline{AB}$，我们规定当$\overline{AB}$的方向和轴l的正向一致时，在它的长度前面加上"+"号；当$\overline{AB}$的方向和轴l的正向相反时，在它的长度前面加上"−"号.这样得到的数叫做有向线段的代数值，简称为值，用符号AB来表示.如图1—2，a是单位线段，那么有向线段$\overline{BA}$的代数值为$+4$，即$BA = +4$，有向线段$\overline{AB}$的代数值为-4，即$AB = -4$.显然，有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的长度相等而方向相反，因此，它们的代数值之间的关系为：

$$AB = -BA$$

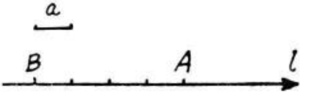

图1—2

注意：ⅰ) 有向线段的代数值

与它的长度是不同的．前者是指带有符号（有正、有负）的数；后者是指前者的绝对值．它们有以下的关系：

$$AB=\begin{cases}|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{的方向和轴的方向一致时；}\\ -|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{的方向和轴的方向相反时．}\end{cases}$$

ii）有向线段$\overline{AB}$当始点与终点重合时，称为零线段，它的代数值为零，方向不定．

有了有向线段的代数值概念，我们就可以讨论在同一轴上两个有向线段的和：如果A、B、C是轴l上任意三点，那么下列关系始终成立：

$$AB+BC=AC \qquad (1—1)$$

在轴l上任意三点A、B、C的相关位置有六种情况，如图1—3所示．

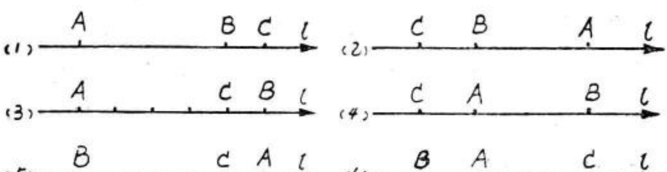

图 1—3

这里我们只验证情况(6)，其余留给读者．事实上根据初等几何关于长度的公式可知情况(6)中有：

$$|BA|+|AC|=|BC|$$

但 $|BA|=BA=-AB$， $|AC|=AC$， $|BC|=BC$．

代入，得：

$$-AB+AC=BC$$

即 $$AC=AB+BC$$

在有向线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$中，假设其中任意一个是零线段。如果$\overline{AB}$是零线段，则点B与点A重合，所以

$$AB+BC=AA+AC=0+AC=AC$$

如果$\overline{BC}$是零线段，则点B与点C重合，所以。

$$AB+BC=AC+CC=AC+0=AC$$

因此，对于点A、B、C的所有位置，恒等式(1—1)确实成立。

例 在图1—3里的情况(3)，有向线段$\overline{AB}$的代数值$AB=5$，有向线段$\overline{BC}$的代数值$BC=-1$，于是，$AC=AB+BC=5+(-1)=4$。

推广到一般情形，如果点A_1，A_2，……，A_n都是轴l上的点，那么不论它们的位置如何，都有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n \quad (1-1')$$

以后，当我们研究轴上的有向线段时，常简称它为线段。

§2 直线上点的坐标

为了建立平面上点的直角坐标系，在这里我们先建立直线上点的坐标法。为此我们规定：

对于一条直线l，指定了它的正向，它就成为平面上的一条轴，在轴l上任意指定一个点O作为参考点，叫做原点，再选取一个适当线段作为长度单位，这样，点O，长度单位以及选定的正向就构成了直线上的一个坐标系。建立了坐标系的直线称

为数轴（图1—4）.

如果，已知轴X上的一个点M，那么有向线段$\overline{OM}$的代数值$OM=x$就完全确定. 我们把实数x叫做点M的坐标. 显然，原点O的坐标是零. 反之，如果已知一实数x，那么数x可以确定轴X上唯一点M，这点M是有向线段$\overline{OM}$的终点，而$|OM|=|x|$，并由x的符号来决定点M应该在原点的那一侧，因而得到以x为坐标的点M. 因此，轴X上所有的点与全体实数间有一一对应关系. 也就是说，直线上的每个点都对应着唯一的一个实数作为它的坐标；而每一个实数也对应着直线上唯一的点，它以这个数为坐标. 因此，数轴上的点和实数之间就可以相互代表. 常常把一点M连同它的坐标x写作$M(x)$. 例如点$M_1(-1)$和$M_2(2)$分别在图1—4中表示出来.

建立了直线上的坐标系以后，直线上的几何关系就可以用算术关系式表示；反过来，对于一些算术关系式也可以给予一定的几何解释. 例如，在图1—5里设$M_1(x_1)$和$M_2(x_2)$为轴X上的任意两点，可知：

$$M_1M_2=M_1O+OM_2=OM_2-OM_1$$

即
$$M_1M_2=x_2-x_1$$

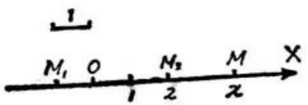

图1—4

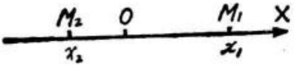

图1—5

就是说，线段$\overline{M_1M_2}$的值M_1M_2等于用终点的坐标x_2减去始

点的坐标 x_1 的差. 显然线段 $\overline{M_1M_2}$ 的长度 $|M_1M_2|$ 的计算公式为

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

如果数轴上的点 $M_1(x_1)$ 在 $M_2(x_2)$ 的左方（图1—6），这时就可以用关系式 $x_1 < x_2$ 来表示. 有数 x 适合不等式 $1 < x < 4$，这个不等式在几何上就可以表达轴 X 上两点 $M_1(1)$，$M_2(4)$ 之间的所有点（图1—7）.

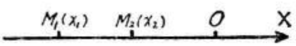

图 1 — 6

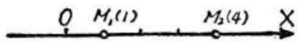

图 1 — 7

§3　平面上点的直角坐标

我们建立了直线上点的坐标法，现在以它为基础建立平面上点的直角坐标.

在平面上取两条互相垂直的轴，习惯上把在水平位置的轴叫做横轴或 X 轴，在沿直位置的轴叫做纵轴或 Y 轴，正向的规定如图1—8所示，它们的交点 O 称坐标原点，再选定一个线段作为两轴的公共长度单位. 象这样取定的两条互相垂

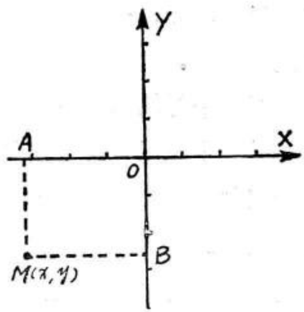

图 1 — 8

直、并且标有长度单位的有向直线就叫做平面上的直角坐标系。建立了直角坐标系的平面叫做坐标平面。

在平面上取定直角坐标系之后，如何确定平面上点的位置呢？设M是坐标平面上任意一点，从点M分别向X轴和Y轴作垂线，点A和B为垂足（图1—8），又设$OA=x$，$OB=y$。我们把得到的这对有顺序的实数(x, y)称为点M的坐标，记作$M(x, y)$，数x和y分别叫做点M的横坐标和纵坐标。这样一来，对于平面上每一个定点M，都有确定的一对有序实数和它对应。反之，如果已知一对实数x、y，则X轴上以x为坐标的点A，以及Y轴上以y为坐标的点B，就完全确定，这时从点A和B分别引它们所在轴的垂线，这两条垂线一定相交于唯一确定的点M。由此可见，对于任意的一对实数x、y，平面上有唯一的点M和它们对应。因此，平面上的点的集合与有序实数对所成的集合之间建立了一一对应关系。就是说在给定坐标系的情况下，平面上的点与一对实数之间可以相互代表。象这样用一对有序实数表示点的方法，叫做坐标法。今后，如果给出某点就是指给出了它的坐标；如果要确定某点的位置或要求某点，就是指要找出此点的坐标。

两个坐标轴（X轴和Y轴）将平面分成四个部分，每一部分叫做一个象限，界于两轴正向之间的部分叫做第Ⅰ象限，其余的三部分，按反时针的方向依次叫做第Ⅱ象限、第Ⅲ象限和第Ⅳ象限。根据平面上点的坐标的概念，可以得到各个象限中点的坐标的符号如下表：

坐标 \ 象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

如图1—9中点的坐标为：$M_1(2, 4)$，$M_2(-4, 3)$，$M_3(-3, -4)$，$M_4(4, -2)$，$M_5(3, 0)$，$M_6(0, -3)$。

注意：在数轴上点的坐标是一个实数，在平面直角坐标系中，点的坐标是有序实数对，因此，图1—9中的$M_5(3, 0)$，不能写成$M_5(3)$。

在平面上建立坐标系以后，我们就可以用数来处理某些几何问题：

例1　已知点$M(x, y)$（如图1—10）求点M对于横轴、纵轴以及坐标原点的对称点的坐标。

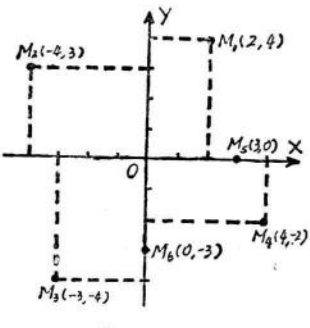

图1—9

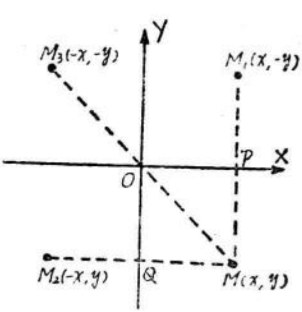

图1—10

解：自点M作横轴及纵轴的垂线MP及MQ，并分别延长到

M_1及M_2，使线段$MP=PM_1$，$MQ=QM_2$，又连接MO并延长到M_3使$MO=OM_3$，那么M_1、M_2及M_3就是点M对于横轴、纵轴及原点的对称点。

容易知道 M 和M_1的横坐标相同，纵坐标的绝对值相等而符号相反。因为M点的坐标是(x, y)，所以M_1点的坐标是$(x, -y)$。同样容易求出M_2及M_3的坐标是$(-x, y)$及$(-x, -y)$，如图 1—10所示。

例 2　已知一边长为 4 的正三角形，中心在原点，一个顶点在Y轴上，求这个三角形的三个顶点的坐标。

解：(1) 设这个正三角形的中心在原点O，一个顶点 C 在Y轴的正向上，如图 1—11所示。

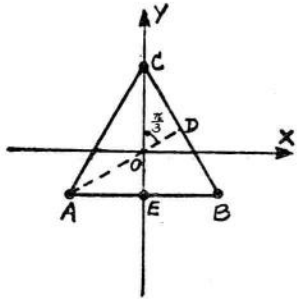

图 1—11

因为　$|BC|=|CA|=|AB|=4$

所以　$|BD|=|DC|=|AE|=|EB|=2$

$$|OC|=\frac{|DC|}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$|OD|=|OC|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$|OE|=|OD|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

故这个正三角形的三个顶点坐标分别是：