初中数学
实用解题方法与技巧

下

上海科学技术文献出版社

初中数学实用解题
方法与技巧

(下 册)

主编 王向东 刘子芳 芮彭年

上海科学技术文献出版社

初中数学实用解题方法与技巧
（下　册）
王向东　刘子芳　芮彭年　主编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号）
全国新华书店经销
宜兴市第二印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 8.75　字数 211,000
1991年2月第1版　1991年2月第1次印刷
印数：1—6,000
ISBN 7-80513-668-8/O·50
定价：3.20元
《科技新书目》225-276

目　录

第一章　平面几何中的证题途径与常用方法

平面几何是研究平面图形的形状、位置、大小和它们相互关系的一门学科。平面几何题的基本题型可分为证明、计算和作图三种类型，其中证明是关键。几何证明就是根据所给条件、公理、定义以及已证明过的定理，根据逻辑推理的规则，导出新的结论。这种推断过程，叫做几何证明。本章以研究几何中常用证题方法为重点，着重论述几何证题的各种常用方法及其逻辑思路，并阐述补助线的作用和如何恰当添作补助线方法与解题技巧。

§1.1　综合法与分析法

一、方法与例题分析

综合法与分析法是平面几何中寻求定理论证和证题思路的两种主要方法。综合法是由因导果，而分析法则是执果索因，这两种方法的思维推理顺序恰恰相反。两种证法都是直接利用原命题证明的方法，称为直接证法。

1. 综合法

从题目的已知条件出发，进行一系列的逻辑推理，逐步靠向未知，最后达到结论成立，这种由因导果的证题方法，称为综合法。

例1　已知 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE//CA$ 交 AB 于 E。求证 $DE=AE$。

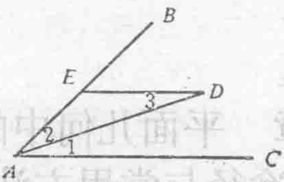

图 1-1

综合法思路：

已知条件有两个：

(1) AD 是 $\angle BAC$ 的平分线；

(2) $DE//CA$.

AD 是 $\angle BAC$ 的平分线 $\xrightarrow{\text{导出}}$ $\angle 1=\angle 2$

$DE//CA$ $\xrightarrow{\text{导出}}$ $\angle 1=\angle 3$

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$ $\xrightarrow{\text{导出}}$ $\angle 2=\angle 3$ $\xrightarrow{\text{导出}}$ $DE=AE$

证明 ∵ AD 平分 $\angle BAC$,（已知）

∴ $\angle 1=\angle 2$,（角平分线定义）

∵ $DE//CA$,（已知）

∴ $\angle 1=\angle 3$,（两直线平行，内错角相等）

∴ $\angle 2=\angle 3$,（等量代换）

∴ $DE=AE$.（同一三角形中等角对等边）

例 2 若 M、N 分别是$\square ABCD$ 的 AB、CD 边的中点，CM、AN 分别交 BD 于 E、F，求证 $BE=EF=FD$。

分析 在$\square ABCD$ 中 M、N 是对边中点，根据平行四边形性质可得出许多结果，选择 $AM \overset{\parallel}{=} CN$ 可导出 $AN//CM$，由此进一步导出，就能由因导果。

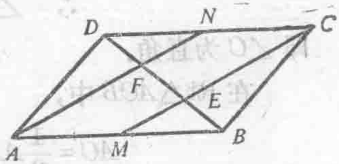

图 1-2

证明 $\because$ $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AB \overset{\parallel}{=} CD$。

又 $AM=MB$, $CN=ND$,

$\therefore$ $AM \overset{\parallel}{=} CN$. $AMCN$ 是平行四边形。

故由 $ME//AF$, $NF//CE$, M、N 分别为 AB、CD 中点得

$$BE=EF,\ EF=FD,$$

$$\therefore\quad BE=EF=FD.$$

评注 判断 $AMCN$ 为平行四边形是沟通已知条件与结论的桥梁。

例 3 $\triangle ABC$ 中 AE 是 $\angle A$ 的平分线。$\angle BAC=2\angle B$, $AB=2AC$。求证：(1) $\angle C$ 是直角。(2) $AE=2CE$。

分析 由已知 $AB=2AC$，因此利用折半法，即取 AB 的中点 D，连 DE 进行证明。

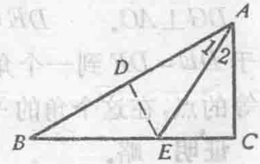

图 1-3

证明 过 E 作 $ED\perp AB$ 于 D

$\because$ AE 平分 $\angle A$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$,

又 $\angle BAC=2\angle B$,

$$\therefore\quad \angle B=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle 1,$$

$\therefore$ D 是 AB 中点。

又 $AB=2AC$,

$$\therefore\ AC=\frac{1}{2}AB=AD.$$

又在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ACE$ 中 AE 公用，

$$\therefore\ \triangle ADE\cong\triangle ACE,$$

$$\therefore\ \angle C=\angle ADE=90°,$$

即 $\angle C$ 为直角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，

$$AC=\frac{1}{2}AB,\qquad \therefore\ \angle B=30°,$$

又 $\because\ \angle B=\angle 1=\angle 2,\quad \therefore\ \angle 2=30°.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，

$$EC=\frac{1}{2}AE,$$

即 $$AE=2EC.$$

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A$、$\angle C$ 的外角的平分线 AD、CD 相交于 D，连 BD. 求证 BD 平分 $\angle B$.

分析 因为 AD、CD 为角的平分线，因此线上的点到两夹边等距离. 作

$DE\perp BC$，$DF\perp BA$

$DG\perp AC$. $DE=DF=DG$.

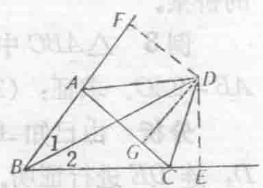

图 1-4

由于 $DE=DF$ 到一个角的两边的距离相等的点，在这个角的平分线上. $\therefore$ BD 平分 $\angle B$.

证明 略.

例 5 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，BD 平分 $\angle B$，$AH\perp BC$ 交 BD 于 E，$DF\perp BC$，垂足为 F. 求证 $AEFD$ 是菱形.

分析 由 BD 是 $\angle B$ 的平分线，$DF\perp BC$，$CA\perp AB$ 可证得 $DA=DF$. 由 $DF//AH$，$\angle 1=\angle 2$，通过余角可证

$$\angle AED=\angle ADE,$$

得 $AE=AD$, $DF=AE$.

得证。

证明 $\because$ BD 是 $\angle B$ 的平分线且 $DF\perp BC$, $DA\perp AB$,

$\therefore$ $AD=DF$.

又 $\because$ $AH\perp BC$,

$\therefore$ $AE//DF$.

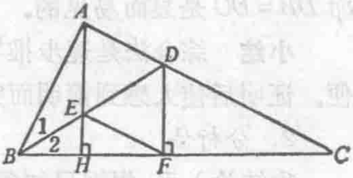

图 1-5

在 Rt$\triangle ABD$ 中和Rt$\triangle BEH$ 中, $\angle 1=\angle 2$,

$\angle BAD=\angle EHB=90°$,

$\therefore$ $\angle ADB=\angle BEH$.

$\because$ $\angle BEH=\angle AED$,

$\therefore$ $\angle AED=\angle ADE$,

有 $AE=AD$,

$\therefore$ $AE=DF$.

又 $AE//DF$ $\therefore$ $AEFD$ 是平行四边形,

又 $AD=DF$ $\therefore$ $AEFD$ 是一个菱形。

评注 证一个四边形为菱形或矩形，常采用的方法是：先证这个四边形是平行四边形，然后证一组邻边相等或证明一个角为直角。

例 6 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内心，AO 的延长线交 $\triangle ABC$ 外接圆于 D, 求证：$DB=DC=DO$.

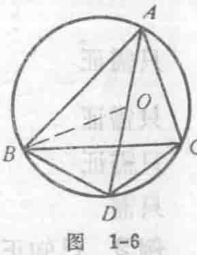

图 1-6

证明 连 BO, 要证 $DB=DO$ 只须证

$\angle DOB=\angle DBO$.

今 $\angle DOB=\angle DAB+\angle ABO$,

$\angle DBO=\angle DBC+\angle CBO$,

故要证 $\angle DOB=\angle DBO$ 只要证 $\angle DAB=\angle DBC$, 以及 $\angle ABO=\angle CBO$ 即可。

今因 O 为 $\triangle ABC$ 内心，而 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆上，故有

$$\angle ABO=\angle CBO,\quad \angle DAB=\angle DAC=\angle DBC.$$

$$\therefore\quad DB=DO,$$

而 $DB=DC$ 是显而易见的。

小结 综合法是逐步推导，顺理成章，写来通顺，表达方便。证明后使人感到简明而完善，在证题时是常用的方法。

2．分析法

由结论入手，根据已知条件分别研究，得知要证结论成立，只须证明某一关系成立；而要证明这一关系成立，又要需证明另一关系成立，……这样一步步地探索下去，直至达到已知条件为止。这种由果索因的证题方法，称为分析法。

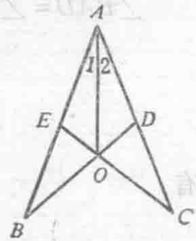

图 1-7

例 1 已知 $AD=AE$、$DC=EB$，BD 与 CE 交于 O，求证 AO 平分 $\angle BAC$。

分析法思路

要证 AO 平分 $\angle BAC$

只需证 $\angle 1=\angle 2$

只需证 $\triangle AOD\cong\triangle AOE$ 或 $\triangle AOB\cong\triangle AOC$

只需证 $\underbrace{OD=OE\qquad OB=OC}$

只需证 $\triangle DOC\cong\triangle EOB$

只需证 $\angle C=\angle B$

只需证 $\triangle ACE\cong\triangle ABD$

只需 $\angle CAE=\angle BAD$（公共角）

例 2 已知正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于 O 点，P 是 BD 上一点，$BH\perp AP$ 交 AC 于点 R，求证：

$$\triangle ABP \cong \triangle BCR.$$

证明 在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle BCR$ 中，$AB = BC$，$\angle PBA = \angle RCB = 45°$（已知），

要证 $\triangle ABP \cong \triangle BRC$，

只需证 $\angle PAB = \angle RBC$.

又因为 $\angle OAB = \angle OBC = 45°$，

故只需证 $\angle 1 = \angle 2$.

又因为 $\angle ARH = \angle BRC$（对顶角），

故只需证 $\angle AHR = \angle BOR$.

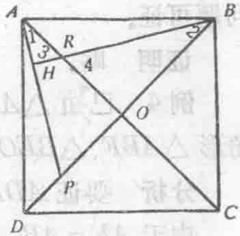

图 1-8

由于已知 $BH \perp AP$，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于 O 点，故有 $\angle AHR = 90°$，$\angle BOR = 90°$. 从而有 $\angle AHR = \angle BOR$，于是命题得证.

例 3 已知 $AC \perp BC$，$AD // BC$，$DE = 2AB$，求证：

$\angle ABE = \dfrac{2}{3}\angle ABC$.

分析 要证

$\angle ABE = \dfrac{2}{3}\angle ABC$,

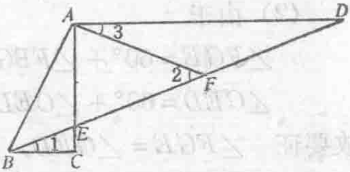

图 1-9

只需证

$$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABE.$$

由于 $\angle 1 = \angle D$，故只需证 $2\angle D = \angle ABE$.

需作辅助线，辅助线应给出 $\angle D$ 的二倍角，还应与 $\angle ABE$ 在同一个三角形上.

作 $\triangle AED$ 的中线 AF，可得

$$\angle 3 = \angle D,\ \angle 2 = \angle 3 + \angle D = 2\angle D,$$

要证 $2\angle D = \angle ABE$，只需证 $\angle 2 = \angle ABE$，

要证 $\angle ABE = \angle 2$，只需证 $AB = AF$.

由已知条件 $ED=2AB$ 及 $ED=2EF$，可得

$$AB=EF=AF,$$

问题可证。

证明 略。

例 4 已知 $\triangle ABC$ 为任意三角形，以其三边为边长作正三角形 $\triangle ABF$、$\triangle BEC$、$\triangle ADC$，求证：$ADEF$ 为平行四边形。

分析 要证 $ADEF$ 为平行四边形，只需证 $AF \mathrel{\underline{\parallel}} ED$。

由于 $AF=AB$，故只需证：

(1) $AB=ED$， (2) $\angle FGE=\angle GED$。

(1) 由于 AB 在 $\triangle ABC$ 中，ED 在 $\triangle EDC$ 上，故要证

$$AB=ED,$$

只需证

$$\triangle ABC \cong \triangle EDC.$$

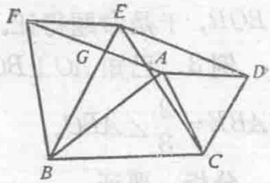

图 1-10

(2) 由于

$$\angle FGE=60^\circ+\angle FBG,$$

$$\angle GED=60^\circ+\angle CED,$$

故要证 $\angle FGE=\angle GED$，只须证 $\angle FBG=\angle CED$。

由于 $\angle FBG=\angle ABC$，故只需证 $\angle ABC=\angle CED$，也就是只须证 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$。从已知条件分析：因为三个三角形是正三角形，有 $BE=EC$，$AC=CD$，$\angle ACB=\angle DCE$，故可推出 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$，问题得证。

证明 略。

例 5 从圆外一点 A 引圆的两切线 AB、AD，及一割线 ACE，则 $BCDE$ 四边形的两组对边之积相等。

分析 证等积可以转化为证等比，因此要证 $BC \cdot DE=CD \cdot BE$，只需证 $BC:BE=CD:DE$，又 $BC:BE=AB:AE$，$CD:DE=AD:AE$，因此要证 $BC:BE=CD:DE$，只须证 $AB:AE=AD:AE$，