北大燕园

2015年 李正元·李永乐

考研数学 5

数学 历年试题解析

数学二

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐

中国政法大学出版社

北大燕园

2015年李正元·李永乐考研数学⑤

数学 历年试题解析

数学二

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐

中国政法大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2015年李正元·李永乐考研数学．数学历年试题解析．数学二/李正元,李永乐主编．—北京：中国政法大学出版社,2014.1
ISBN 978-7-5620-5231-9

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①李…　②李…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第010649号

出 版 者　中国政法大学出版社
地　　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名:中国政法大学出版社）
电　　话　010－58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　　印　北京旺都印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　20.25
字　　数　520千字
版　　次　2014年1月第1版
印　　次　2014年1月第1次印刷
定　　价　32.80元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了2000年~2014年全国硕士研究生入学统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地察出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了1998年（含）以前数学二相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读**《考研数学复习全书》（数学二）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2014年1月

目　录

第一篇　2014 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　2000 ~ 2013 年考研数学二试题

第三篇　2000 ~ 2013 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2014 年考研数学二试题及答案与解析

2014 年考研数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是

(A) $(2,+\infty)$.　　(B) $(1,2)$.

(C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　　(D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【　　】

(2) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.　　(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$.　　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$.

【　　】

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$.

【　　】

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$.　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$.

(C) $10\sqrt{10}$.　　(D) $5\sqrt{10}$.

【　　】

(5) 设函数 $f(x) = \arctan x$. 若 $f(x) = xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2} =$

(A) 1.　　(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{3}$.

【　　】

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,则

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得.

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得.

【　】

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad-bc)^2$.　　(B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

【　】

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为4的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$,则 $f(7)=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数,则 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} =$ ________.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$,则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是 ________.

(13) 一根长度为1的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上,若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$,则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ ________.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为1,则 a 的取值范围是 ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_1^x \left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(**本题满分 10 分**)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$,且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(**本题满分 10 分**)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$,计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数,$z = f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x\cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 单调增加,$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. 证明:

(Ⅰ)$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x - a, x \in [a,b]$;

(Ⅱ)$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

(20)(**本题满分 11 分**)

设函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}, x \in [0,1]$. 定义函数列:

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \cdots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \cdots$$

记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$,直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形的面积,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

(21)(**本题满分 11 分**)

已知函数 $f(x,y)$ 满足$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$,且 $f(y,y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$,求曲线 $f(x,y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

(22)(**本题满分 11 分**)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(**本题满分 11 分**)

证明 n 阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

2014 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【**分析**】 $\alpha > 0$ 时,

$$\ln^{\alpha}(1+2x) \sim (2x)^{\alpha}(x \to 0^+),$$

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}(x \to 0^+),$$

它们均是比 x 高阶的无穷小,即

$$\alpha > 1 \text{ 且} \frac{2}{\alpha} > 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$$

因此 $\alpha \in (1,2)$，选(B).

(2)【分析】 显然这几条曲线均无垂直与水平渐近线，就看哪条曲线有斜渐近线.

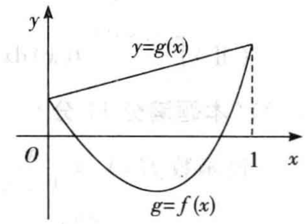
对于(C).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\Big/x\right)=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

故有斜渐近线 $y=x$. 选(C).

(3)【分析一】 $y=f(x)$ 在$[0,1]$上是凹函数(设 $f(x)$ 在$[0,1]$二阶可导，不妨 $f''(x)>0$)，$y=g(x)$ 是连接$(0,f(0))$与$(1,f(1))$的线段. 由几何意义知 $f(x)\leqslant g(x)(x\in[0,1])$. 选(D).



【分析二】 令 $w(x)=f(x)-g(x)$

$\Rightarrow\ w(0)=f(0)-f(0)=0,\quad w(1)=f(1)-f(1)=0$

在$[0,1]$上，当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，

$$w''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)\geqslant 0$$

$\Rightarrow\ w(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant g(x)$.

选(D).

评注 由 $w(x)$ 的条件及罗尔定理，$\exists c\in(0,1)$，$w'(c)=0$，由 $w'(x)$ 在$[0,1]$单调不减，

$$\Rightarrow w'(x)\begin{cases}\leqslant w(c)=0\ (x\in[0,c])\\ \geqslant w(c)=0\ (x\in[c,1])\end{cases}\Rightarrow w(x)\begin{cases}\leqslant w(0)=0\ (x\in[0,c])\\ \leqslant w(1)=0\ (x\in[c,1])\end{cases}$$

$\Rightarrow w(x)\leqslant 0(x\in[0,1])$

(4)【分析】 用参数求导法先求出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t},\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(1+\frac{2}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{t}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=-\frac{1}{t^3},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-1$$

对应 $t=1$ 的曲线的曲率半径

$$R=\left.\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\right|_{t=1}=(1+9)^{3/2}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}.$$ 选(C).

(5)【分析】 $f(x)=\arctan x$，$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，

由 $f(x)=xf'(\xi)\Rightarrow$

$$\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2},$$

$$\xi^2=\frac{x}{\arctan x}-1=\frac{x-\arctan x}{\arctan x},$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

选(D).

---

(6)【分析一】 若 $u(x,y)$ 在 D 内部某点 $M_0(x_0,y_0)$ 取最小值,则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 0,\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} \geqslant 0,\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} \geqslant 0,$$

由 $\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_{M_0} = 0 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 0, C = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 0,$

又 $B = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{M_0} \neq 0 \Rightarrow AC - B^2 = -B^2 < 0 \Rightarrow M_0$ 不是 $u(x,y)$ 的极值点,得矛盾.

因此 $u(x,y)$ 不能在 D 内部取到最小值. 同理 $u(x,y)$ 不能在 D 内部取最大值.

因此 $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界取得. 选(A).

【分析二】 用特殊选取法.

令 $u(x,y) = x + y + xy \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1+y,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1+x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 1$$

$\Rightarrow u(x,y)$ 满足题中所有条件.

但 $u(x,y)$ 在 D 内或无驻点或有唯一驻点 $M_0(-1,-1)$.

在 M_0 处 $AC - B^2 = -1 < 0, M_0$ 不是 $u(x,y)$ 的极值点.

因此 $u(x,y)$ 在 D 的最大值与最小值都不能在 D 内部取得,只能在 D 的边界取得.

对此 $u(x,y)$ (A) 正确,(B)、(C)、(D) 均不正确. 因此选(A).

---

(7)【解】 计算出这个行列式. 比较好的方法为先交换第 2,3 两行,再把第 1 列和第 2,3 列邻换:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2.$$

(此题也可用排除法:4 个选项中都有 a^2d^2 和 b^2c^2,但是前面的符号不同,(A) 都是 +,(B) 都是 −,(C) +, −,(D) −, +. 观察完全展开式中它们的系数都是 −,可排除(A)、(C)、(D).

---

(8)【解】 从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关容易得到

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$$

线性无关(可用定义或计算秩),因此是必要条件. 当 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,并且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$ 时对于任意常数 k,l,

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$$

线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,因此不是充分条件.

二、填空题

(9)【分析】 $\dfrac{1}{x^2+2x+5} = \dfrac{1}{(x+1)^2+4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}$

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1}\frac{2d\frac{x+1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \left.\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\right|_{-\infty}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{3}{8}\pi.$$

(10)【分析】 由 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,又 $f(0)=0\Rightarrow f(x)=x^2-2x(x\in[0,2])$
$\Rightarrow\quad f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-[1^2-2]=1.$

(11)【分析】 先求出 $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

由 $\quad e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4},\qquad$ ①

令 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 得 $e^z+z=1\Rightarrow z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$

下求 $dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

方法1 将 ① 式两边求全微分得

$$2e^{2yz}(zdy+ydz)+dx+2ydy+dz=0$$

令 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 得 $2dz+dx+dy=0\Rightarrow$

$$dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy.$$

方法2 将 ① 式两边对 x 求偏导数,得

$$e^{2yz}\cdot 2y\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

令 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}.$

将 ① 式两边对 y 求偏导数得

$$2e^{2yz}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

令 $x=y=\frac{1}{2},z=0$,得 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2},$

因此 $\qquad dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy.$

(12)【分析】 L 的参数方程是 $\begin{cases}x=r\cos\theta=\theta\cos\theta,\\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta\end{cases}$ 点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 记为 M_0,直角坐标是 $(x_0,y_0)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$L$ 在点 M_0 的斜率

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{M_0}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

L 在 M_0 的切线的直角坐标方程是

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}x.$$

(13)【分析】 $\int_0^1\rho(x)dx=\int_0^1(-x^2+2x+1)dx$

$$=\int_0^1[2-(x-1)^2]dx$$

$$=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\int_0^1 x\rho(x)dx=\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{12}.$$

因此细棒的质心

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\rho(x)\,dx}{\int_0^1 \rho(x)\,dx}=\frac{11/12}{5/3}=\frac{11}{20}.$$

---

(14)【解法一】 用配方法:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2.$$

由负惯性指数为1,得$(4-a^2)\geqslant 0$, $-2\leqslant a\leqslant 2$.

【解法二】 此二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$

设A的3个特征值按照大小顺序为$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$. 则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. 负惯性指数为1即$\lambda_1<0\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3$. 则$|A|\leqslant 0$. 反之,如果$|A|<0$,则特征值一定是2正1负,如果$|A|=0$,则特征值一定1正1负1个0. 于是负惯性指数为1$\Leftrightarrow|A|\leqslant 0$. 计算出$|A|=a^2-4$,得$-2\leqslant a<2$.

三、解答题

(15)【分析与求解】 $x\to+\infty$ 时,$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$,用等价无穷小因子替换与洛必达法则得

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

---

(16)【分析与求解】 这是可分离变量的微分方程

$$y'(1+y^2)=1-x^2$$

分离变量得 $(1+y^2)dy=(1-x^2)dx$

积分得通解 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+c$,

由$y(2)=0$得$c=\frac{2}{3}$. 于是y满足$y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$.

由$y'=0$得$x=\pm1$.

$x=1$时,$y+\frac{1}{3}y^3=1-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow y(1)=1$.

$x=-1$时,$y+\frac{1}{3}y^3=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0\Rightarrow y(-1)=0$.

现在$x=\pm1$,考察y''. 将方程 $x^2+y^2y'=1-y'$

两边对 x 求导得 $\quad 2x+2yy'^2+y^2y''=-y''$

在 $y'=0$ 处 $\quad (1+y^2)y''=-2x$

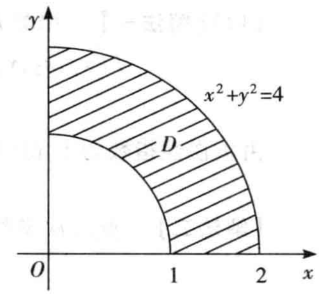
于是 $\quad y''(1)<0, y''(-1)>0$

因此 $y(x)$ 的极大值是 $y(1)=1$，极小值是 $y(-1)=0$.

评注 记 $f(y)=y+\frac{1}{3}y^3-\frac{4}{3}$，$f'(y)=1+y^2>0$，$f(y)$ 单调上升，有唯一零点 $y=1$.

---

(17)【**分析与求解**】 D 如右图，用极坐标变换 $D:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},1\leqslant r\leqslant 2$，于是



$$I \xlongequal{\text{记}} \iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{r\cos\theta\sin\pi r}{r(\cos\theta+\sin\theta)}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r.$$

$$\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r=\frac{-1}{\pi}\int_1^2 r\mathrm{d}\cos\pi r$$

$$=-\frac{1}{\pi}r\cos\pi r\Big|_1^2+\frac{1}{\pi}\int_1^2\cos\pi r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{3}{\pi}.$$

$$J\xlongequal{\text{记}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta \xlongequal{\theta=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow\quad 2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}, J=\frac{\pi}{4}$$

因此 $\quad I=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}.$

---

(18)【**分析与求解**】 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 是 $z=f(u)$ 与 $u=\mathrm{e}^x\cos y$ 的复合函数. 先由复合函数求导法，将 z 对 x,y 的偏导数满足的方程转化为 z 对 u 的导数满足的方程.

$$z=f(u)=f(\mathrm{e}^x\cos y)$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(-\mathrm{e}^x\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y+f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y-f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$$

两式相加得 $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}$

代入原方程得 $\quad f''(u)e^{2x} = (4f(u)+u)e^{2x}$

求 $f(u)$ 转化为求解初值问题

$$\begin{cases} y''-4y=u, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases} \quad y=f(u).$$

相应的特征方程 $\lambda^2-4=0$,特征根 $\lambda=\pm 2$,方程有特解 $y^*=-\dfrac{1}{4}u$,于是通解为

$$y=c_1e^{2u}+c_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$$

由初值得 $c_1=\dfrac{1}{16},c_2=-\dfrac{1}{16}$,因此

$$y=f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u})-\frac{u}{4}.$$

---

(19)**【分析与求解】** (Ⅰ) 因 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,$0\leqslant g(t)\leqslant 1(t\in[a,b])$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t=x-a\ (x\in[a,b])$$

(Ⅱ) 引进 $w(x)=\displaystyle\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}f(s)\mathrm{d}s-\int_a^x f(s)g(s)\mathrm{d}s,x\in[a,b]$

$\Rightarrow \quad w(a)=0$

$$w'(x)=f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)'-f(x)g(x)$$

$$=f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)g(x)-f(x)g(x)$$

由于 $f(x)$ 单调增加,由题(Ⅰ)$\Rightarrow$

$$w'(x)\leqslant f(a+x-a)g(x)-f(x)g(x)=0\ (x\in[a,b])$$

$\Rightarrow \quad w(x)\leqslant w(a)=0\ (x\in[a,b])$

特别有 $w(b)\leqslant 0$,即原不等式成立.

---

(20)**【分析与求解】** 先求出 $f_n(x)$:

$$f(x)=\frac{x}{1+x}\ (x\in[0,1]),f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{1+2x}}{1+\frac{x}{1+2x}}=\frac{x}{1+3x},$$

易归纳证明 $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx},\ x\in[0,1].$

再求由曲线 $y=f_n(x)$,直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{1+nx}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1\frac{nx}{1+nx}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+nx)\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\right]$$

最后求极限 $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}nS_n=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\right]=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$

$$= 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(21)【分析与求解】 由$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1) \Rightarrow f(x,y) = y^2 + 2y + c(x)$,

再由$f(y,y) = y^2 + 2y + c(y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y \Rightarrow$

$$c(y) = 1 - (2-y)\ln y$$

于是 $f(x,y) = y^2 + 2y + 1 - (2-x)\ln x$

曲线$f(x,y) = 0$即$(y+1)^2 = (2-x)\ln x, x \in [1,2]$,它是关于直线$y = -1$对称的闭曲线. 该闭曲线所围图形绕直线$y = -1$旋转成旋转体的体积为$V$. 任取$[x, x+\mathrm{d}x] \subset [1,2]$,对应的旋转体小薄片的体积微元

$$\mathrm{d}V = \pi(y+1)^2\mathrm{d}x$$

于是旋转体的体积

$$V = \int_1^2 \pi(y+1)^2\mathrm{d}x = \pi\int_1^2(2-x)\ln x\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 2\ln x\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x^2$$

$$= 2\pi\left[x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right] - \frac{\pi}{2}\left[x^2\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= 2\pi(2\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{2}\left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right) = 2\pi\ln 2 - \frac{5}{4}\pi.$$

(22)【解】 (Ⅰ)用初等行变换化$\boldsymbol{A}$为简单阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

得$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4. \end{cases}$$

求得一个非零解$\boldsymbol{\alpha} = (-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$,它构成$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的基础解系.

(Ⅱ)所求矩阵$\boldsymbol{B}$应该是4×3矩阵. 一种做法是把$\boldsymbol{B}$的3个列向量分别作为3个线性方程组$\boldsymbol{AX} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{AX} = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{AX} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$的解来计算. 下面的方法比较简单.

思路:满足$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的任何两个解的差都是$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$的解. 先求出$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$的所有解,再求$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的一个特解,就可以得到满足$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的所有矩阵.

①$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$的解是一个$4 \times 3$矩阵,他的每一列都是$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的解,因此是$\boldsymbol{\alpha}$的倍数,通解为

$$(c_1\boldsymbol{\alpha}, c_2\boldsymbol{\alpha}, c_3\boldsymbol{\alpha}), \ c_1, c_2, c_3 \text{为任意常数}.$$

② 求$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的一个特解.

用初等行变换化$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$为简单阶梯形矩阵:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

得$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$的同解方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$