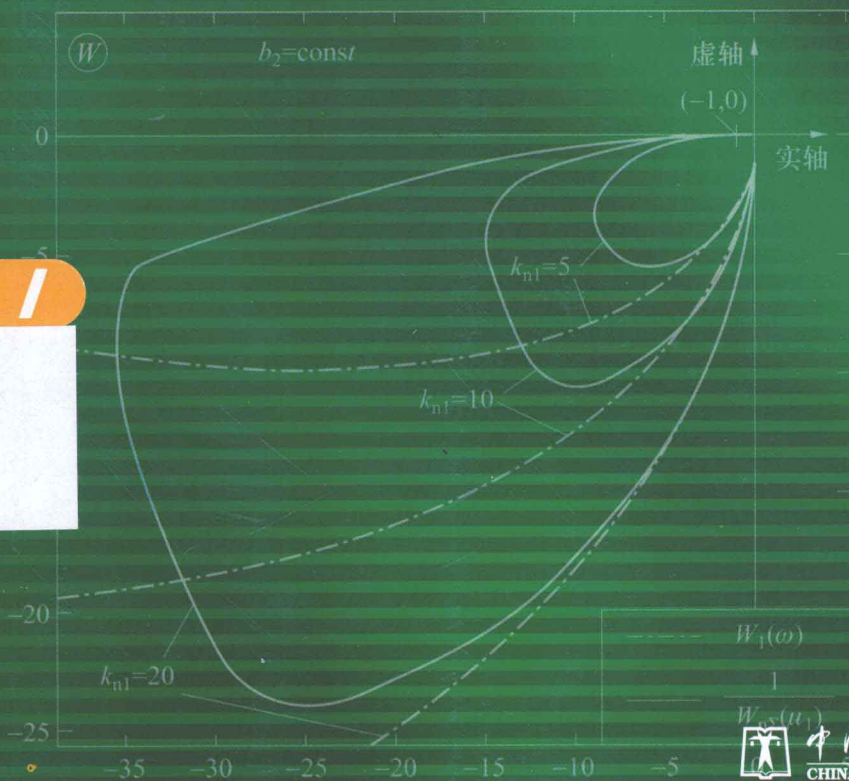


# 非线性控制系统

## Nonlinear Control System

项国波 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

# 非线性控制系统

Nonlinear Control System

项国波 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书主要讨论在什么条件下,可以将非线性控制系统近似地看作线性的集中参数的系统,什么条件下又必须回到真实的非线性纯时滞系统,以及怎样控制这两类系统的运动规律。全书共分9章。第1~2章,介绍非线性和弱非线性系统及其基本性质。第3~8章,介绍作者的科研成果,包括非线性系统对数研究法,非线性系统自振荡、强迫振荡有益利用、对数稳定判据和多目标优化控制等。第9章,介绍电站并联运行及其稳定性的谐波线性化方法。

本书可供相关专业的研究人员参考,也可以作为相关专业研究生和本科生教材。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制系统 / 项国波著. —北京: 中国电力出版社, 2014.1

ISBN 978-7-5123-5040-3

I. ①非… II. ①项… III. ①非线性控制系统 IV. ①TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第238778号

中国电力出版社出版发行

北京市东城区北京站西街19号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑: 杨淑玲 责任印制: 郭华清 责任校对: 闫秀英

北京市同江印刷厂印刷·各地新华书店经售

2014年1月第1版·2014年1月第1次印刷

700mm×1000mm 1/16·17.5印张·324千字

定价: 58.00元

### 敬告读者

本书封底贴有防伪标签,刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

# 前 言

本书始自 20 世纪 70 年代，受宋健同志邀请，参加《工程控制论》（钱学森、宋健著，科学出版社，1980 版）这一巨著中第七章非线性系统的改编工作。1982 年，中国自动化学会教育工作委员会和清华大学联合举办全国工程控制论研究班，作者应邀就非线性系统发表演讲，受到同行热烈欢迎，强烈要求我写讲义。于是在清华大学自动化系极力支持下，临时刻腊版，印了“账本”式的讲义，发给与会同行。之后，受中国自动化学会教育工作委员会委托，为全国高校教师 and 研究人员举办非线性控制论专题学习班。在此期间，历时 4 个月撰写了讲义《非线性控制系统中的谐波线性化原理》，成为本著第一版非线性系统的初稿。而后，又应邀到中国科学院研究生院、浙江大学、西北工业大学、华南理工大学等数十所院校讲学，不断充实内容，逐步形成了非线性系统的书稿，1991 年由知识出版社出版。

20 世纪 90 年代以后，我和我的研究生们在此专著基础上，发表了 7 篇论文，创建了新的分支——多目标优化控制，成为火炮、导弹拦截、仿形机床和材料试验机等伺服系统长期未能解决的理论问题的新突破。论文发表之后，又应邀去北京理工大学、清华大学、浙江大学、装甲兵工程学院、中国兵器集团 202 所和 207 所等 19 个单位讲学，历时十多年，逐步完善新系统，具备了本书的再版条件。

本版将原版中的 2 章进行了合并，并删去 1 章，新增 2 章，全书仍为 9 章。

前 2 章为非线性和弱非线性系统及其基本性质。给出“弱”的定量界限；指出在何种状态下可以忽略不计；何种条件下它不是“弱”的，而是决定系统性态的“强大”基因。同时介绍研究这些问题常用的数学方法：渐近法、摄动法和谐波线性化法，并给出吸引子、吸引域和混沌等基本概念。

后 7 章则主要介绍作者的科研成果：非线性系统对数研究法，非线性系统自振荡、强迫振荡有益利用、对数稳定判据；多非线性系统的对数研究法；介绍了几种非线性控制器，特别是我和我的学生们开创的智能积分器、 $X-Q$  过渡过程自适应 PID 和具有超前相位过渡过程自适应 PID，为创建多目标优化控制理论建立了“器件”基础；提出线性优化系统的非线性化设计法；多目标优化控制系统稳定判据；几种多目标优化控制系统的算法，初步形成了一个新体系。

最后 1 章介绍电站并联运行及其稳定性的谐波线性化方法。这一章是作者曾获一机部科技进步二等奖的专著《电站并联运行及其稳定性》的浓缩版，重点介绍如何应用最优结构，而不是传统的最优控制方法，去实现电网不仅稳定，而且最优的运行状态；给出稳定而又完善和稳定但不完善两种子系统组成的大系统，如何实现其最优运行状态。

全书着重于物理性质的阐述和讨论，尽量避免枯燥、繁冗的数学推导，读者如果掌握了这些数学符号的物理性质和规律，不仅可将这些运算结果用于工程，而且对某些生态环境和社会现象的观察与研究也是有益的。因为这两个大系统都是非线性的，并且都有可控的部分。

20 世纪末，网上有篇题为《阻尼、振荡与全局效益》的论文，该文作者署名为中国社会科学院经济文化研究中心国际问题研究组。他们将我在《电站并联运行及其稳定性》一书中的研究成果，用于研究国际金融安全和全局效益，并指出：东南亚金融风暴是由无阻尼（税制）的金融自由流动造成的。要想实现全球金融健康发展，从而获得全局效益，挂在全球化（类似于并联电网）的各国金融系统（类似于挂在并联电网上的单台机组）都必须有稳定而又完善的子系统。这是理想的最佳状态。他们的比喻论述确切而生动！但要各个子系统都做到既稳定又完善，只有实现世界大同之日才有可能。现实世界各国的经济系统都是既不稳定又不完善，因此金融体系处于振荡状态是必然的。但是振荡周期会随着各个子系统朝着既稳定又完善的目标前进而逐渐缩短。

作者认为控制论中所揭示出来的运动规律，在哲学上具有普适性。因为不管社会多么复杂，都是由物质组成的，而物质运动规律都是相通的，该文就是一个例证。

非线性控制系统涉及面广且难度较大，因作者水平有限，书中错误、片面和欠妥之处难以避免，恳请读者批评指正。

项国波

2013 年 10 月于榕城

# 目 录

前言

<b>第 1 章 非线性系统基本问题</b> .....	1
1.1 自振荡的基本性质.....	1
1.2 自振荡的有益利用.....	6
1.3 非线性系统的主共振.....	9
1.4 分频共振和倍频共振.....	13
1.5 异步熄灭和异步激发.....	15
1.6 非线性控制系统的基本任务.....	16
<b>第 2 章 弱非线性系统及其基本性质</b> .....	18
2.1 微分方程的标准化.....	18
2.2 弱非线性系统及其基本性质.....	21
2.3 几个实例.....	25
2.4 自振荡的摄动解法.....	26
2.5 自振荡的渐近解法.....	30
2.6 谐波线性化方法.....	35
2.7 几种常见非线性特性谐波线性化系数.....	41
<b>第 3 章 控制系统自振荡及其稳定性</b> .....	48
3.1 代数法.....	48
3.2 幅相特性分析法.....	56
3.3 对数法.....	64
3.4 多非线性系统的自振荡.....	68
3.5 利用自振荡辗平非线性特性.....	73
<b>第 4 章 弱非线性系统的弱激励</b> .....	79
4.1 非共振态的渐近解.....	79
4.2 异步激发和异步熄灭的例子.....	82

4.3	共振态下渐近解的构造	86
4.4	共振解的稳定判据	91
4.5	周期解的吸引域	97
4.6	周期解稳定性的一般理论	102
4.7	马蒂厄方程的解及其稳定性	108
4.8	通向混沌的道路	114
<b>第 5 章</b>	<b>单频受迫振荡及其有益利用</b>	<b>117</b>
5.1	单频受迫振荡及其稳定判据	118
5.2	正弦扰动信号对缓变信号在系统中通行的影响	125
5.3	按照给定的品质指标选择 $f_2(t)$ 的参数	128
5.4	受迫振荡的有益利用举例	131
<b>第 6 章</b>	<b>非线性控制器的设计及其应用</b>	<b>137</b>
6.1	线性化和它的逆	137
6.2	非线性特性的补偿控制	138
6.3	非线性阻尼的设计	143
6.4	线性积分器的缺陷	147
6.5	零相位滞后积分器	148
6.6	克勒格积分器	151
6.7	克勒格积分器的自适应能力	154
6.8	智能积分器及其应用	158
6.9	一类非线性比例积分器	165
<b>第 7 章</b>	<b>线性优化系统的非线性化设计</b>	<b>171</b>
7.1	非线性化系统设计初步	171
7.2	二次优化控制	175
7.3	非线性大时滞系统总体满意控制	181
<b>第 8 章</b>	<b>多目标优化控制系统</b>	<b>188</b>
8.1	线性多目标优化控制	188
8.2	用 Clegg 积分器实现多目标优化控制	192
8.3	$X-Q$ 自适应 PID 控制器及其在多目标满意控制系统中的应用	205
8.4	具有超前相位自适应 PID 控制器及其应用	219
8.5	整体合成非线性及其在多目标满意控制中的应用	229



<b>第 9 章 电站并联运行的结构稳定性</b> .....	240
9.1 结构稳定性问题的提出 .....	241
9.2 等价定理 .....	242
9.3 对称并联电网的结构稳定 .....	247
9.4 不完全对称并联电网的结构稳定 .....	248
9.5 不对称并联电网的结构稳定 .....	251
9.6 对称并联电网的非线性共振 .....	254
9.7 不完全对称并联电网的非线性共振 .....	256
9.8 不对称并联电网的非线性共振 .....	258
9.9 奇异的中线电流 .....	262
<b>参考文献</b> .....	265



# 第 1 章 非线性系统基本问题

## 1.1 自振荡的基本性质

任一控制系统,从本质上讲,都是非线性的。只是有相当一类的非线性系统,略去它的非线性项之后,用线性方法描述该系统运动状态时,理论分析和实际情况相当接近,人们才把这一类非线性系统近似地叫做线性系统。这类系统又叫做局部线性化系统,这是因为当人们把这类非线性函数,在它的工作点附近用泰勒级数展开之后,仅取其一次近似项代替原先的非线性函数。但是,当这类系统的线性解,在临界状态下或在临界解的邻域时,如果不计非线性项的作用,即使这类非线性是“弱”的,线性解也会出现严重的错误。这里所谓的临界解,就是人们所说的自振荡。因此,我们说自振荡是非线性系统的基本属性之一。

线性系统实际上是不存在的,因而也不可能出现自振荡。让我们看一个简单例子。

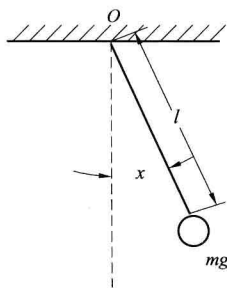


图 1.1-1 数学摆

### 【例 1】数学摆的自振荡。

图 1.1-1 给出了一个数学摆的图像。所谓数学摆,是指一个重为  $mg$  的摆锤,通过连杆  $l$ ,悬挂在支点  $O$  上的单摆。给摆锤一个脉冲力后,摆锤就沿着铅垂线所确定的平面来回摆动,这种现象叫做数学摆的自振荡。

这种自振荡具有哪些物理性质呢?为了回答这个问题,需先给出数学模型,然后分析它的解。

数学模型是理论分析的起点,但却是最难处理的问题。就本例而言,如果把摆长  $l$  的重量计算在内的话,这个摆就是一个具有分布参数的摆,相应的数学模型就是偏微分方程。如果摆长的重量可以忽略不计,这个摆就变成集中参数的数学摆,相应的数学模型就是常微分方程。如果我们只在有限的几个自振荡周期内,观察摆的自振荡运动,那么很小的空气阻尼可以略去不计,它的数学模型就变成无阻尼的常微分方程。可见如果观察的时间足够长,空气阻尼即使很小,也不能不计了,因为这个摆在空气阻尼下,最终将停止下来,于是它的数学模型就变成有阻尼

的常微分方程了。

如果初脉冲力很大，摆的振幅很大，这个数学模型就变成非线性常微分方程；反之，则为线性微分方程。

可见，同样一个物理系统，随着结构参数相对大小的不同和观察尺度的不同，需要用不同的数学模型进行描述。

现在讨论最简单的情况，即无阻尼集中参数的数学摆，它有如下的数学模型

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_z^2 \sin x = 0 \quad (1.1-1)$$

式中： $x$  为摆和铅垂线的夹角； $\omega_z$  为自振频率，且

$$\omega_z = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.1-2)$$

式中： $l$  为摆长； $g$  为重力加速度。

因为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1.1-3)$$

因此，当  $x \approx 0$  时，我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) = 1 \quad (1.1-4)$$

或

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = 0 \quad (1.1-5)$$

即

$$\sin x \approx x \quad (1.1-6)$$

这时，方程 (1.1-1) 取下式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_z^2 x = 0 \quad (1.1-7)$$

式 (1.1-7) 是一个线性常系数二阶微分方程，它的解为

$$x = a_0 \cos(\omega_z t + \theta_0) \quad (1.1-8)$$

式中： $a_0$  为初始条件决定的初振幅； $\theta_0$  为初始条件决定的初相位。

适当地选择时间坐标，取  $\theta_0$  为零，线性方程 (1.1-7) 解的物理性质主要取决于两个参数  $\omega_z$  和  $a_0$ 。因为

$$\omega_z = \sqrt{g/l} = \text{常数} \quad (1.1-9)$$

故称式(1.1-8)所示的自振荡解为等时性;而不同的初始值,就有不同的 $a_0$ 值,这种性质叫做线性系统自振荡的非等幅性。

由于

$$\frac{dx}{dt} = -a_0 \omega_z \sin(\omega_z t + \theta_0) \quad (1.1-10a)$$

$$y = \frac{1}{\omega_z} \frac{dx}{dt} \quad (1.1-10b)$$

于是,方程(1.1-7)的解是充满整个相平面的同心圆簇,如图1.1-2所示,每个圆都对应于一个初始条件。

这里讲的虽然是二阶常系数微分方程的解,但一般线性系统都具有这两个基本性质:等时性和非等幅性。

只是,纯粹的线性系统是不存在自振荡的。因为当观察时间足够长之后,空气的阻尼就不能不计,久而久之,这种自振荡终要消失,这是线性系统一条重要的物理性质。非线性系统则不同,即使它的阻尼不为零,某种结构的非线性系统仍会出现稳定的自振荡,因此,自振荡是非线性系统的基本属性之一。

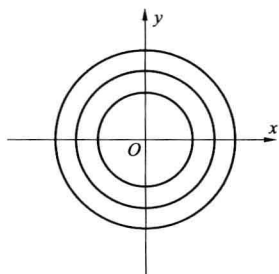


图 1.1-2 线性系统自振荡相图

**【例2】**描述电子管自激振荡的范德波尔方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.1-11)$$

式中, $\varepsilon$ 为正的小参数,即 $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 。

式(1.1-11)中,出现了非线性阻尼项

$$\varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} \quad (1.1-12)$$

我们不急于用数学方法去解该方程,仅从物理概念上去理解,就能从式(1.1-11)看出:

- (1) 当 $x^2 < 1$ 时,阻尼项为负值,因此,所描述系统的运动是发散的。
- (2) 当 $x^2 > 1$ 时,非线性阻尼项为正值,运动是收敛的。
- (3) 当 $x^2 = 1$ 时,非线性阻尼项为零,方程(1.1-11)有一个等幅自振荡的解。

式(1.1-11)所描述的系统的自振荡相图,如图1.1-3所示。

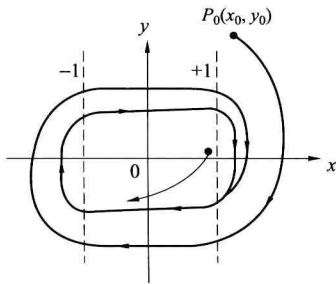


图 1.1-3 范德波尔方程自振荡的相图

图 1.1-3 中,  $x = \pm 1$  把整个相平面划分为三个区域: 两个正的阻尼区和一个负的阻尼区。在正阻尼区内, 所有的运动轨迹都是收敛的; 在负的阻尼区内, 所有的运动都是发散的。因此, 方程 (1.1-11) 所描述的系统, 不管初始条件取何值, 久而久之, 该系统终将出现一个等幅自振荡, 又叫做极限环, 这是非线性系统自振荡的基本性质之一——等幅性。

非线性系统自振荡还有另一个性质——非等时性, 证明如下:

设式 (1.1-11) 的一次近似解  $x$  取下式

$$x = a \cos \omega t \quad (1.1-13)$$

式中,  $a$ 、 $\omega$  分别表示待解的振幅和频率。

对式 (1.1-13) 求导, 则有

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t \quad (1.1-14)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t \quad (1.1-15)$$

把待解式 (1.1-13) 及其导数式 (1.1-14) 和式 (1.1-15) 代入式 (1.1-11), 有

$$\begin{aligned} (1 - \omega^2)a \cos \omega t &= -\varepsilon(a^2 \cos^2 \omega t - 1)(-a\omega \sin \omega t) \\ &= \varepsilon a \omega \left( \frac{1}{4} a^2 - 1 \right) \sin \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon a^3 \omega \sin 3\omega t \end{aligned} \quad (1.1-16)$$

令同次谐波系数相等, 则有

$$(1 - \omega^2)a = 0 \quad (1.1-17a)$$

$$\varepsilon a \omega \left( \frac{1}{4} a^2 - 1 \right) = 0 \quad (1.1-17b)$$

$$\frac{1}{4} \varepsilon a^3 \omega = 0 \quad (1.1-18)$$

解式 (1.1-17), 得

$$a = 2, \quad \omega = 1 \quad (1.1-19)$$

式 (1.1-19) 解, 证实了方程 (1.1-11) 确实存在一个极限环。

略去三次谐波之后, 式 (1.1-16) 取下式

$$\varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} \approx \varepsilon \left( \frac{1}{4} a^2 - 1 \right) \frac{dx}{dt} \quad (1.1-20)$$

时, 故方程 (1.1-11) 等价于

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \left( \frac{1}{4} a^2 - 1 \right) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.1-21)$$

式 (1.1-21) 是一个线性化方程, 但它是一个特殊的线性化方程, 系数中含有一个未知解  $a$ , 叫做伪线性化方程, 因为这种线性化方程是根据谐波平衡原理而得到的方程, 所以又叫做谐波线性化方程。

解式 (1.1-21), 得

$$x(t) = a_0 e^{\xi(a_0)t} \cos \omega(a_0)t \quad (1.1-22)$$

式中:  $\xi(a_0)$  为等价阻尼, 且

$$\xi(a_0) = \frac{1}{2} \varepsilon \left( \frac{1}{4} a_0^2 - 1 \right) \quad (1.1-23)$$

$\omega(a_0)$  为自振频率, 且

$$\omega(a_0) = \left[ 1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left( \frac{1}{4} a_0^2 - 1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1-24)$$

式 (1.1-22) ~ 式 (1.1-24) 指出:

- (1) 当  $a_0 < 2$  时,  $\xi(a_0) < 0$ ,  $x(t)$  发散。
- (2) 当  $a_0 > 2$  时,  $\xi(a_0) > 0$ ,  $x(t)$  收敛。
- (3) 当  $a_0 = 2$  时,  $\xi(a_0) = 0$ , 方程 (1.1-21) 出现一个周期解为

$$x(t) = 2 \cos t \quad (1.1-25)$$

- (4) 当  $a_0 \neq 2$  时

$$\omega(a_0) \neq \text{常数}$$

即不同的初始条件  $a_0$ , 就有不同的自振频率  $\omega(a_0)$ , 这就是非线性系统自振荡的另一个性质——非等时性。

- (5) 当  $a_0 \neq 2$  时

$$\xi(a_0) \neq \text{常数}$$

即等价阻尼也不是一个常数。当  $a_0 \gg 2$  时, 阻尼很大,  $x(t)$  快速衰减; 当  $a_0 \ll 2$  时, 负阻尼,  $x(t)$  快速发散; 而当  $a_0 \approx 2$  时, 阻尼近于零, 不管是发散, 还是收敛, 其速度都是极其缓慢的。

不同的  $\varepsilon$  值, 范德波尔方程解的瞬时值有不同的波形。

当  $\varepsilon=0.001$ , 初始 (0.1,0.1) 时, 它的相图及其响应近似于图 1.1-4 的圆及正弦函数; 当  $\varepsilon=3$ , 初始 (2,2) 时, 它的相图及其响应如图 1.1-5 所示, 完全不是正弦波形了。

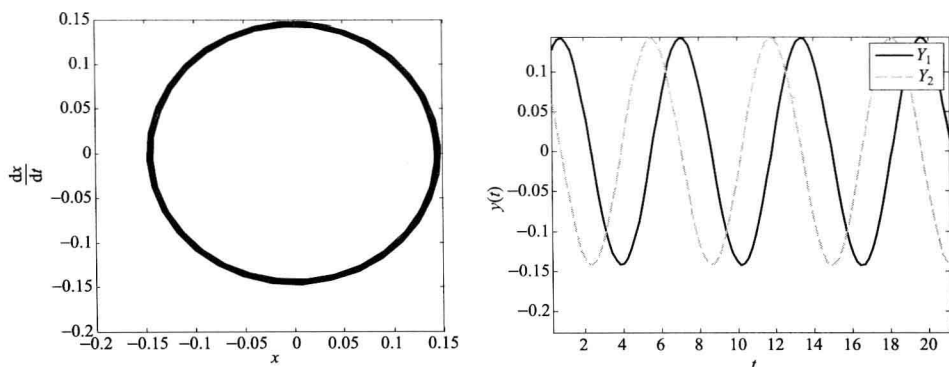


图 1.1-4 当 $\varepsilon=0.001$ , 初始 $(0.1, 0.1)$ 时, 范德波尔方程的相图及其响应

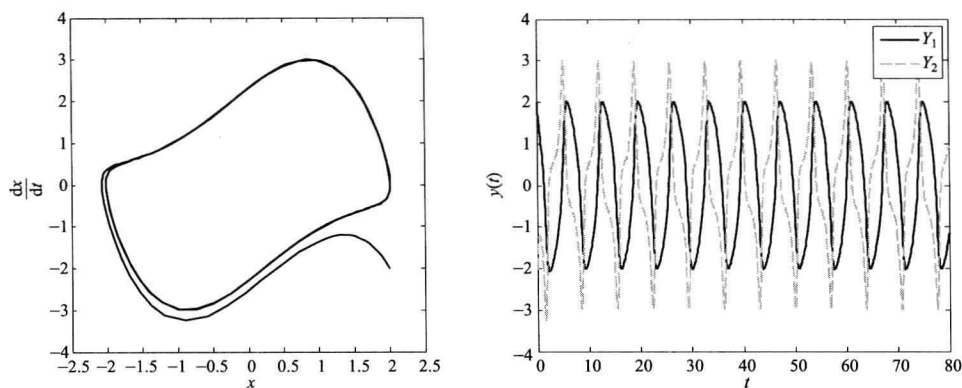


图 1.1-5 当 $\varepsilon=3$ , 初始 $(2, 2)$ 时, 范德波尔方程解的相图及其响应

例 2 表明, 自振荡是非线性系统的基本性质之一, 它不仅出现在范德波尔方程中, 在许多非线性系统中都会碰到, 就是说当一个实际物理系统中, 出现等幅而非等时性自振荡时, 表明描述这个实际物理系统的微分方程一定是非线性的, 但非线性系统不一定都存在自振荡。

例 2 还表明, 应用谐波线性化方法虽然是近似的, 但它能揭示非线性系统某些特殊性质, 如本例自振荡的非等时性和等幅性。

综上所述, 数学方法仅是物理概念的更精确。

## 1.2 自振荡的有益利用

许多工程系统不希望出现自振荡, 在那里自振荡是一种有害的现象, 必须加以消除; 但是在另一些场合, 自振荡却是有益的, 上节讲过的范德波尔方程所描述的电子管振荡器就是其中一例, 人们希望它产生正弦自振荡, 将电磁波

发射出去。

在非线性控制系统中也有这种情况。在低速伺服系统中，干摩擦和不感区等非线性效应是提高低速伺服系统品质指标的天敌，如果在这样的系统中能产生一个高频小振幅的自振荡，就能消除它们的危害，以后我们会专题讨论这一问题。

现在讨论一个十分有用的生态平衡中的捕食问题，又叫做沃尔泰拉模型，它是生态循环中自振荡有益利用的典型例子。

假设在一个湖里生长着两种鱼：A 和 B。A 以捕食湖中水草和藻类为生，B 以捕食 A 为生。湖中水草和藻类极为丰富，让 A 赖以生存的“粮食”取之不尽。A 的繁殖和增长，为 B 的繁衍提供了越来越多的“粮食”，使 B 得以迅速繁殖和增长。其结果是 B 大量捕食 A，使 A 的数量减少；伴随着 A 的数量减少，B 的食物也减少，它的繁殖和生长也随之减缓放慢，死亡增多。反过来，又导致 A 的繁殖和生长。周而复始，A 和 B 处于生态循环之中。

人们要问，在这个生态循环中，有没有生态平衡点？即 A 和 B 两者，既不增也不减，如果有，这个平衡点是否稳定？其次，还要回答这种生态平衡对人类有何益处。

为了回答这些问题，需要建立一个数学模型，叫做沃尔泰拉模型。

设  $x$  为 A 的鱼口， $y$  为 B 的鱼口，并设 A 的繁殖率比它的死亡率高，因此在  $\Delta t$  内 A 的鱼口繁殖记为

$$\alpha x \Delta t, \quad \alpha > 0 \quad (1.2-1)$$

式中， $\alpha$  为 A 的繁殖率。

同时，在  $\Delta t$  内，当 A 和 B 遭遇时，A 要被 B 吃掉，这时它的繁殖为负增长，记为

$$-cxy \Delta t, \quad c > 0 \quad (1.2-2)$$

式中， $c$  为 A 的死亡率。

因此，在  $\Delta t$  内，A 的实际繁殖为

$$\delta x = \alpha x \Delta t - cxy \Delta t \quad (1.2-3)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时，我们有 A 的鱼口变化率为

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - cxy \quad (1.2-4a)$$

同理，B 的实际繁殖为

$$\frac{dy}{dt} = -by + exy, \quad b > 0, \quad e > 0 \quad (1.2-4b)$$

式中： $b$  为 B 由于饥饿而产生的死亡率； $e$  为 B 由于捕食 A 而得到的繁殖率。



方程(1.2-4)就是著名的沃尔泰拉模型。该方程的解,有意义的仅是  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  的区域,即相平面的第一象限。

所谓生态平衡,在数学上意味着

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.2-5)$$

即

$$\begin{cases} X(x, y) = ax - cxy = 0 \\ Y(x, y) = -by + exy = 0 \end{cases} \quad (1.2-6)$$

解方程(1.2-6),得到两个平衡点

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \quad (1.2-7a)$$

和

$$(x_1, y_1) = \left( \frac{b}{e}, \frac{a}{c} \right) \quad (1.2-7b)$$

解(1.2-7a)落在坐标原点,它是一个不稳定的平衡点,而解(1.2-7b)则是一个稳定的平衡点,即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-b+ex)y}{(a-cy)x} \quad (1.2-8)$$

或

$$\int \frac{(a-cy)}{y} dy = \int \frac{(-b+ex)}{x} dx \quad (1.2-9)$$

积分后,得

$$a \ln y + b \ln x - cy - ex = \Phi \quad (1.2-10)$$

改写成

$$(a \ln y - cy) + (b \ln x - ex) = \Phi \quad (1.2-11)$$

式中,  $\Phi$  为积分常数。

方程(1.2-9)所示的解  $(x_1, y_1)$ , 在相平面上是被一簇闭合曲线包围的平衡点,如图1.2-1所示。

图1.2-1中,每一条闭合曲线对应于一个初始条件产生的生态循环,用控制论语言来说,叫做极限环。图中的箭头表示随时间增长, A 和 B 两种鱼口增减情况。

可以看出: B 的最大值总是滞后于 A 的最大值; 被闭合曲线包围的平衡点  $(x_1, y_1)$  对应于生态平衡, 但是在这样的生态平衡下, A 和 B 两种鱼口既不增, 也不减, 于人类无益。我们希望它们处于自振荡状态, 而且振幅越大越好。当  $y=y_{\max}$  时, 我们将 B 捕捞起来, 人为地逼使  $y=y_{\min}$ 。让 A 迅速繁殖起来, 之后, B 也将随着迅速繁殖到  $y_{\max}$ , 再次捕捞 B, 逼使  $y$  下降到  $y_{\min}$ 。这样周而复始循环下去, 就可以为人类提供丰富的水产资源。可见生态良性循环要比生态平衡好。

这是自振荡有益利用在生态循环中的一例。

如果我们把人类看作 B, 人类要吃的牛羊肉和奶看作 A, 那么沃尔泰拉模型就可以用来研究人类繁殖和食品供应的生态循环关系。所以这一模型具有普适性。

应该指出, 用沃尔泰拉模型来研究生态循环, 并没有考虑到边界条件的限制。在鱼口生态循环中, 我们是在鱼口 A 吃的食物毫无限制的前提下, 来研究其良性生态循环的。任何食物都有限量, 超出此限量, 良性生态循环也就消失了。人类对地球的索取, 如果超出其限量, 同样也不会有良性生态循环了。

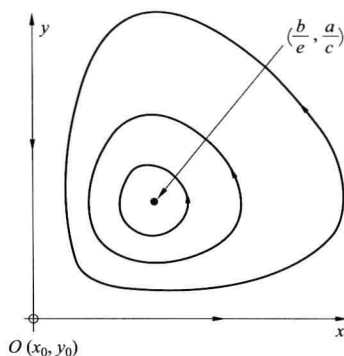


图 1.2-1 沃尔泰拉方程的相图

### 1.3 非线性系统的主共振

自振荡只是非线性系统最简单, 也是最基本的属性之一。实际上非线性系统在外力激励下, 会出现非常丰富的物理现象: 主共振、分频共振、倍频共振、自动限幅、跳跃反相、频率侵占、异步熄灭、异步激发和混沌等。详细讨论这些现象不是本书所研究的范围, 有兴趣的读者可以参阅参考文献 [39] 和 [57]。这里仍以数学摆为例, 讨论非线性系统主共振的一些物理性质。

当  $x$  是足够大时

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3$$

这时, 图 1.1-1 所示的数学摆方程在外周期力激发下取下式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_z^2 \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = E \sin vt \quad (1.3-1)$$

式中:  $\lambda$  为阻尼;  $\omega_z^2$  为固有的自振频率;  $E \sin vt$  为外周期力。

当  $\nu = \frac{R}{q} \omega_z$  时, 方程 (1.3-1) 所描述的非线性系统会出现非常复杂的共振