大代數學

郝克士大代數學

中華民國二十一年十二月再版

定價每冊 布/紙 面 大洋一元 五/二 角

譯述者	高佩玉
原著者	H. E. Hawkes
印刷者	文化學社
發行者	文化學社
分售處	各埠大書局

社址
北平和平門前

電話
南局四五八〇

原序

此書之作,本應用數學之意旨,以供學數學者繼續學習微積分等學之用.按工程上所用之數學與中學及專門所研究之數學,實係不同.此書爲中學而入專門研究數學之門徑.而於工程上主要各點——如數之計算,實驗,圖解,對數表用法,以及種種特別問題之解答——亦備述之.且對於各種科學所需之數學,亦無不詳述.

必須先習初等代數學,方能學習此書.首章之弁言,皆與以下諸章有關,討論較爲詳細,惟對於初等代數學上已詳述者,概付缺如.

本書對於二次方程式討論甚詳;不但含有溫習之意,且於解析幾何學微積分學之關係非常重要.學者於此若有心得,以後學方程式論時,可用極小之工夫,明瞭方程式之解法.

方程式論爲高等代數學之主要部分;在是章內,次序之排列,由淺而深,簡而易明,可以引起學者之興趣.

在本書內,對於學者困難之點,特加實例;於教學兩方,可以免去許多困難,參閱18,19,60,89各節便知.

本書習題,皆採取新近最有趣者;不但可以表明與他書之關係;並且可以試驗及發展學者之能力.

本書之習題,多取材於C. B. Pegram及C. H. Burnside所著之科學內,敬此致謝,又同事H. W. Reddick代爲搜集習題,並且時加指導,殊爲感激.

郝克氏.

譯者序

本書原名Higher algebra,應譯爲高等代數學,因習慣上多名爲大代數學,茲沿習慣亦譯爲大代數學.

原書在西洋向稱名著,最適用於敎科,而在東亞各大學預科及高級中學採用原本者亦不少.今高級中學及後期師範漸興,而代數一科尙無相當之善本.故茲譯出以供高中後師之用.

學中文數學者,常不知英文名詞,學英文數學者,常不知中文名詞,而中文名詞又未統一,以致隔閡殊多,鄙人有鑒於此,故採用名詞.悉用最通行者,且每一名詞之下必留英文原名.又於書末附有英漢名詞對照表.學是書者不但能知中文名詞,亦可明瞭英文名詞,並與將來譯數學者一方便之參考.

是書之優點,詳見原序,不再贅述.

是書之譯,得力於劉繼烯陳忍焦蘊華諸先生之帮助甚多,特誌申謝.

鄙人學淺,恐有未妥處,希宏達之士,見而敎之,則幸甚矣.

譯者高佩玉識

目　錄

大代數學

第一章

弁言

1. 劈因子 Factoring. 將一式劈爲數式，而此數式之積等於原式，是謂之劈因子。

在此節之例式內，所有之係數，均爲整數；所求之因子之係數，亦須爲整數。設有一式，除1與原式外，不含其他之因子，此式謂之素式（亦名質式）。

本書後邊所求之因子，其係數不皆爲整數，有時爲無理數irrational numbers。甚或有時爲複數 Complex numbers。且此類之因子，對於分解方程式，萬不可缺。劈因子可用下列法則：

Ⅰ. 先察原式之各項有無相同之獨項式；若有相同之獨項式，即將其最大相同之獨項式提出括弧之外，爲一因子，所餘之多項式，括於括弧之內，另爲一因子。

Ⅱ. 括弧內之多項式因子，與某例式相類者；即按某類式之劈因子法劈之。

Ⅲ. 若各多項因子式尚有因子可劈者，仍用Ⅱ法劈之；至各因子皆成素式爲止。

例式

1. $ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y)$.
2. $a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)$.
3. $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$,

式中p與q爲兩數，其和爲b，其積爲c。

4.　ax^2+bx+c.

欲求此式之因子，須先求得兩數，其代數和爲 b，其積爲 $a\cdot c$ 分 bx 爲兩項，此兩項之係數，即所求之兩數；然後以集項法求其因子。

例如

$$\begin{aligned}6x^2-13x-5&=6x^2-15x+2x-5\\&=3x(2x-5)+(2x-5)\\&=(3x+1)(2x-5).\end{aligned}$$

5.　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

6.　$a^4+ka^2b^2+b^4$.

此例式加減 a^2b^2 之倍數；然後用例 5 劈之。

7.
$$\begin{cases}a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1}),\\ a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1}),\end{cases}$$

式中之 n 爲奇數；若 n 爲偶數，則 a^n-b^n 爲兩個平方之差，可用例 5 劈之；若 n 爲 3 之倍數，可用以下特別例式劈之，

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

8.　$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$.

習　題

求以下諸式之因子：

1. $x^2-kx+2lx-2kl$.
2. a^2-y^2+2y-1.
3. $r^2-10r-24$.
4. $338x^2-52xz+2z^2$.
5. $(x-1)(2x-3)-6$.
6. $x-x^7$.
7. $32-2z^4$.
8. a^7+b^7.
9. a^9-b^9.

解：$a^9-b^9=(a^3)^3-(b^3)^3$

$=(a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)$.

10. $a^{12}+b^{12}$.
11. $x^{10}-y^{15}$.
12. $a^2b^3-x^2y^3+a^2y^3-b^3x^2$.
13. $b^2-x^2+4a(a-b)$.
14. $x^2-4a^4+9y^2-b^2-6xy-4ab$.
15. $2(a^3-1)+7(a^2-1)$.
16. $abx^2+aby^2-(a^2+b^2)xy$.
17. $a^2+9b^2+25c^2-6ab-10ac+30bc$.

18. $(s^2-4)^2-(s+2)^2$.

19. $x^3-7x^2+14x-8$.

20. $x^8-7x^4y^4+y^8$.

21. x^8-4x^2+8.

22. $51x^2+113xy-14y^2$.

23. $8x^4y^2-65x^2y^2z+8y^2z^2$.

24. $2x^{12}-128$.

25. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-24$.

2. 分式化簡法 Simplification of fractions. 將分式化簡，即消去分子分母之共同因子，使分式變成最簡式爲止。

普通規則，先將繁分疊分各項變爲最簡分式而集合之，然後求分式共同因子而消去之。

習　題

將以下諸式化爲最簡式:

1. $\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}$.

2. $\dfrac{\frac{1}{27}-(\frac{2}{3})^2}{\frac{11}{3}}+2\frac{1}{9}$

3. $\dfrac{3(3.4-1.6)}{.027}\div\dfrac{(1.3)^2-(1.2)^2}{.1}$.

4. $1-\dfrac{2}{3-\frac{4}{5}}$.

5. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}$.

6. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+1}}}$.

7. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2(a+b)}+\dfrac{a}{b-a}+2$.

8. $\dfrac{a-b}{2(a+b)}-\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{2b}{a+b}$.

9. $3-\dfrac{2}{5+\dfrac{4}{7+\frac{6}{x}}}$

10. $\dfrac{1}{x^2-\dfrac{x^3-1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}$.

11. $\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$.

12. $\frac{2}{5x^2-10x+5}+\frac{11}{25x-25}-\frac{11x-4}{25x^2+100}$.

13. $\dfrac{m-n-\dfrac{2n(m-n)}{m+n}}{\dfrac{m^2+n^2}{mn+n^2}-1}$.　　14. $\dfrac{a-b-\dfrac{a^2b-ab^2}{(a+b)^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

3. 根及根次 roots and radicals. 在應用數學上，平方根及立方根常用表求得，如215頁之表便是；亦有用計算尺求之者。在問題上所需要之根，須較爲精確，常用對數表或開方法求之，已述於小代數學內，不再贅述。茲所述者，爲關於代數式之開方。

根次與指數之關係，茲用公式表之如下：

$$\sqrt[b]{x^a}=(\sqrt[b]{x})^a=x^{\frac{a}{b}},$$

式中之a及b假定爲整數，且b不爲零。

無理數亦可用爲指數，詳見後之對數章；茲略之。

指數爲分數時，分子表明乘方之次數，分母表明開方之次數。

4. 指數之基本律 Fundamental laws of exponents. 茲述指數律於下：

I. 乘法律，　$x^a\cdot x^b=x^{a+b}$.

II. 除法律，　$x^a\div x^b=x^{a-b}$.

III. 乘方律，　$(x^b)^a=(x^a)^b=x^{ab}$.

在此三律內，a及b均爲任何實數；但無理數之指數，至對數章始能述及。

在II律內，若 $a=b$，則成一特別情形；即

$$1=x^a\div x^a=x^{a-a}=x^0,$$

由此可知任何數之方次爲零者，其數必等於1。

在II律內，若 $a=0$,則其指數爲負；即

$$\frac{1}{x^b}=x^{-b},$$

由此可得下之規矩，即將任何代數式內，負指數可變爲正指數。

在任何分式內，分子之因子，欲變爲分母之因子；或分母之因子，欲變爲分子之因子，必變該因子指數之符號。

例如 $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$;

$$\frac{2x^{-2}}{\sqrt[4]{16^{-3}}}=\frac{2x^{-2}}{16^{-\frac{3}{4}}}=\frac{2\cdot 16^{\frac{3}{4}}}{x^2}=\frac{2\cdot 8}{x^2}=\frac{16}{x^2}.$$

須注意者，在負指數未變以前，先察帶負指數之式，爲分子之因子乎？爲分母之因子乎？

例如 $\frac{a^{-1}+b}{c}=\frac{\frac{1}{a}+b}{c}=\frac{1+ab}{ac}$, 又 $\frac{a^{-1}b}{c}=\frac{b}{ac}$.

在此書內，$\sqrt{a}$ 即 $+\sqrt{a}$ 之意，而非 $-\sqrt{a}$ 之意；若係正負兩根，則正負兩號必須同寫；即 $\pm\sqrt{a}$。

5. 消根法 Rationalization. 若兩無理式之積爲有理式；則彼此互爲消根因子。

如 $\sqrt{2}$ 乘 $\sqrt{2}$ 則得有理數 2，彼此互爲消根因子。$-\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{8}$ 亦均爲 $\sqrt{2}$ 之消根因子；仿此，$a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之消根因子。

設有無理分式，以分母之消根因子，乘分子及分母，然後化簡，則所得新分母必爲有理式。

使分母變爲有理式後，求分式之近似値，簡而確。

分子亦可用消根法變爲有理式；即以分子之消根因子乘分子及分母即得。

習　題

1. 是否$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$？　是否$\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$？

2. 是否$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$？　是否$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$？

3. 是否$\sqrt{x^2+a}=x\sqrt{1+a}$？　是否$\sqrt{x^2+ax^2}=x\sqrt{1+a}$？

4. 是否$x^{-2}+y^{-2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$？　是否$x^{-2}.y^{-2}=\dfrac{1}{x^2y^2}$？

將以下諸式化爲最簡式:

5. $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{98}$.

6. $\sqrt[3]{16}+\sqrt{8}-\sqrt[6]{4}$.

7. $4\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{3}{10}}+\sqrt{20}$.

8. $\dfrac{-2+\sqrt{12}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{162}}{6}$.

9. $\dfrac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+4ax}}{2}$

10. $\sqrt{\dfrac{a}{c}}-\sqrt{\dfrac{c}{a}}+\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{ac}+2}-\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{ac}-2}$.

11. $\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{12}$.　$\sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[6]{6}$.

12. $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\div\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}$.

13. 若以$\frac{1}{6}(5\pm\sqrt{109})$代 x，則適合於方程式$3x^2-5x-7=0$，試證明之。

14. 若$x=1-\sqrt{2}$，求x^3-3x^2+x+1之值。

15. 証明$x=-1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$適合於方程式

$$2x^3-7x-2=0.$$

16. 證明以四數$\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$中之任一數代x，必適合於方程式

$$x^4-10x^2+1=0.$$

17. 若$x=\dfrac{1}{3}\left(1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，求$9x(3x-2)+2$之值。

18. 若$x=-7(1+\sqrt{3})$，證明

$$x^3+13x^2-112x+98=0,$$

將下之諸式化簡，並將結果式之指數變爲正指數：

19. $(x^{-2}\sqrt{x^3\sqrt{4}})^4$.

20. $(\sqrt[3]{-27x^9})^{-2}$.

21. $\left(x^{-2}\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

22. $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{2}}\ (a^6b^0c^{-2})^{\frac{1}{3}}$.

23. $\left(\frac{(ab)^{-3}}{a^{-2}b^2}\cdot\frac{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-6}b^{-1}}\right)^{-3}$.

24. $\frac{\left(\frac{a}{27}\div\frac{a^{-2}}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-x^2}{3a^{-1}+2x}$.

將以下分式之分母變爲有理分母，使分式之值不變：

25. $\frac{2a}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$.

26. $\frac{y^2}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

27. $\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

28. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}}$.

將以下分式之分子變爲有理分子，使分式之值不變：

29. $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

30. $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

31. $\frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$.

求以下諸式之值，只要三位小數：

32. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

33. $\frac{15+7\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}$.

34. $\frac{3}{3-2\sqrt{3}}-\frac{3}{3+2\sqrt{3}}$.

35. $\sqrt[n]{\frac{16}{2^{4+n}}}$.

36. $\frac{13\sqrt{15}-7\sqrt{21}}{13\sqrt{1\frac{2}{3}}-7\sqrt{2\frac{1}{3}}}$.

37. $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$.

38. $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$.

39. 若 $a=-32, b=-8$，
$\sqrt[3]{4a^{-\frac{2}{5}}+b^0\sqrt{ab^{-1}}}$.

40. 若 $p=8, r=3$,
$s=-1, t=9$,
$\sqrt{\frac{3}{2}p^{-\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{rs^{-2}t}}$.

41. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

6. 二項式定理 The Binomial Theorem. 設二項式 $a+b$ 之指數爲任何正整數；均可用下列公式展開之：

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+b^n. \quad (1)$$

由此展開式，可得下列法則，用此法可以連續寫出展開式之各項。

第一項　爲 a^n；末項爲 b^n.

第二項　爲 $na^{n-1}b$.

a 之指數，依次遞減，即任一項中，a 之指數，比其前一項中 a 之指數少1。

b 之指數，依次漸增，即任一項中，b 之指數，比其前一項中 b 之指數多1。

任一項之係數，以 a 之指數乘之，以 b 之指數加 1 除之，則得下一項之係數。

若 a 與 b 均爲正，則展開式之各項均爲正。若 a 爲正，b 爲負，則式中之偶項均爲負。

展開共有 $n+1$ 項。

若 n 爲正整數，此公式固可成立，已詳於小代數學內，茲不贅述。

若 a 大於 b，n 爲分數或負數，除去末項外，此公式亦可成立。觀此情形，可知無論 n 爲任何有理數，均可展開爲無限級數。不過此處不能證明，（詳見微積學）只好當作一個假定。

習　題

將 1 至 3 完全展開；將 4 至 8 展至第五項：

1. $(2x+y)^4$.
2. $(1-x\sqrt{2})^5$.
3. $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^7$.
4. $(1+x)^{-2}$, $|x|<1$.
5. $\left(a-\frac{1}{6}+\frac{b^2}{2}\right)^{-4}$.
6. $\frac{1}{x^{-2}+3}$.
7. $\left(\frac{2}{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}$.
8. $\left(1-\frac{2x}{y}\right)$.

註. $|x|$ 表明 x 之數值爲正號。例如 $|-2|=+2$　$|x|$ 謂之 x 之絕對值。

9. 試證明展開式 $\left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{10}-\frac{1}{50}-\frac{1}{1000}-\cdots\cdots\cdots$

10. 試證明 $\left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{9}{125}\sqrt{15}$

11. 從上之兩結果證明 $\left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$ 之近似值爲.279.

7. 比及比例 Ratio and proportion. 第一數比第二數，即是以第二數除第一數。

a 比 b 尋常以 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$ 表之。

被除數謂之前項，除數謂之後項，a,b,c,d, 四數成比例，即是前兩數之比等於後兩數之比。

用 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 表之。

在此例式內，a 及 d 謂之外項，b 及 c 謂之中項。

設 a,b,c,d 成比例，即是

$$a:b=c:d, \qquad (I)$$

則

$$ad=bc, \qquad (II)$$

$$b:a=d:c, \qquad (III)$$

$$a:c=b:d, \qquad (IV)$$

$$a+b:b=c+d:d, \qquad (V)$$

$$a-b:b=c-d:d, \qquad (VI)$$

$$a+b:a-b=c+d:c-d. \qquad (VII)$$

方程式(III) 從(I)顚倒得來。
方程式(IV) 從(I)交換得來。
方程式(V) 從(I)兩邊各加 1 得來。
方程式(VI) 從(I)兩邊各減 1 得來。
方程式(VII)由(VI)除(V)得來。

8. 變式Variation. 若一數 x 與他一數 y 之比等於一尋常數，是謂之 x 因 y 而正變。尋常以

$$x\propto y, \text{或} \frac{x}{y}=k$$

表之，此處 k 爲常數。

若 x 因 y 之反數而變，是謂之 x 因 y 而反變，以

$$x \propto \frac{1}{y}，\text{或}\frac{x}{\frac{1}{y}}=xy=k$$

表之，此處 k 爲常數。

從觀察點至發光點，光度因距離之平方而反變，設光度爲l，距離爲d，則

$$l \propto \frac{1}{d^2}，\text{或}\frac{l}{\frac{1}{d^2}}=ld^2=k,$$

此處 k 爲常數。

若一數 x 因他兩數 y 及 z 之積而正變，是謂之 x 因y及z而合變，以

$$x \propto yz，\text{或}\frac{x}{yz}=k$$

表之，此處 k 爲常數。

習　　題

1. 設 $a:b=c:d=e:f$，證明
$$\frac{ka+lc-me}{kb+ld-mf}=\frac{a}{b}.$$

2. 設 $a:b=c:d$，證明
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{cd}.$$

3. 相似立體之面積之比，等於相當邊之平方之比；體積之比，等於相當邊之立方之比。設一正方體之體積二倍於他一正方體之體積，此兩正方體之面積之比爲何？設一球體之面積二倍於他一球體之面積，此二球體面積之比爲何？

4. 設 $x \propto y$，$y=10$，則$x=6$，若 $x=15$，求 y。

5. 設 $x \propto \frac{1}{y}$，$y=100$，則$x=4$，若 $y=10$，求 x。

6. 設 $x \propto yz$，$y=4, z=5$，則$x=3$，若 $y=20, z=2$，求 x。

7. 一6呎高之人，自10呎高之燈杆脚下直向外走，求人影之長與人影最遠之處至燈杆脚下之距離之比。若人距燈杆20呎，問人影之長若干?

8. 設有一木與地平行，支點在兩端，木上所載貨物之重，因其厚之平方及寬而合變，因其長而反變。若木之厚爲9吋，寬爲3吋，長爲15呎，能載重1800磅，問以同物質之木，厚爲4吋，寬爲$2\frac{1}{2}$吋，長爲8呎，能載重若干?

9. 在地面以上，物體之重，因該物體至地心之距離之平方而反變；在地面以下，物體之重，因物體至地心之距離而正變。設有物體在地面上重100磅，問在地面以上1000哩應重若干? 在地面以下1000哩應重若干?（地球之半徑＝4000哩。）

10. 設有一圓板其直徑爲1呎，置於距眼1.2呎之處，適將一球遮蔽，此球之中心至眼之距離爲13呎。若將此球移至距眼25呎之遠，問此圓板移至距眼若干呎，恰好將球遮蔽?

11. 設$x^{-\frac{2}{3}}:2=1:x^{\frac{1}{6}}$，x之值爲何?

12. A 6歲，B 16歲，問幾年後二人之年齡之比爲2:3?

13. 設有一擺，擺動一週所需之時間，因其長之平方根而正變。若擺長爲100糎，擺動一週所需之時爲1秒，今擺長爲81糎，問擺動一週應需時若干? 若擺動一週所需之時爲2秒，問擺長應若干?

14. 圓柱體之體積因其直徑之平方及其高而合變，今兩圓柱體直徑之比爲3:2,第二圓柱體之體積爲第一圓柱體之體積之$\frac{2}{5}$，求此兩圓柱體之高之比。

15. 克浦勒氏 Kepler 之行星行動之第三定律云「行星繞太陽一週所需之時間，因該行星至太陽之平均距離之立方而正變」。地球至太陽之平均距離爲9千3百萬哩，水星至太陽之平均距離爲3千6百萬哩，求水星繞太陽之一週所需之時間。