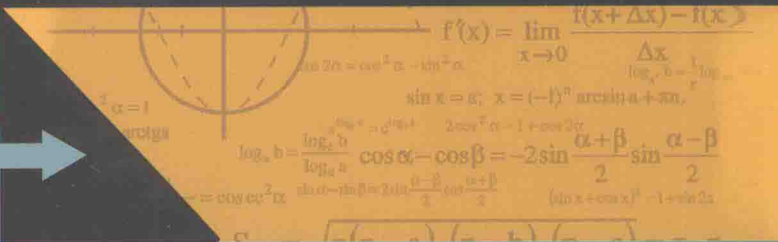
21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU

线性代数



白君诚◎编著

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU

线性代数

白君诚◎编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/白君诚编著. —北京：中国人民大学出版社，2014. 1
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-18605-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①白… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 313164 号

21 世纪高等院校创新教材
线性代数
白君诚 编著
Xianxing Daishu

出版发行 中国人民大学出版社			
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www. crup. com. cn		
	http://www. ttrnet. com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 2 月第 1 版
印　　张	13. 75 插页 1	**印　　次**	2014 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	317 000	**定　　价**	28. 00 元

内容简介

本书是专门为三本院校的大学本科生编写的教科书，全书共六章，包含行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容，与传统的《线性代数》本科教程比较，本书有几点变化：

(1) 删去“对换以及它与排列的奇偶性的关系”；删去“行列式的性质”一个行列式可以按某一行（或列）拆分成两个行列式之和；删去三本学生难以接受的“向量空间”；删去用初等变换法求二次型的标准型.

(2) 把所有计算题型程式化，以适应学生的接受能力.

(3) 例题有“分析”，书写规范、步骤齐全、注重细节，便于学生模仿.

(4) 文字尽可能使用课堂教学语言，口语化.

(5) 根据相当一部分学生考研热情高涨的现状，本书定理齐全，主要定理的说明完整，可供考研学生自学，在各章后面的学习指导中，介绍了常见考研题型及其解法，并以“综合练习”的形式给出历届考研题.

《线性代数》只有 2 个部分，36 课时. 大学数学教师的授课内容与方法必须和大众化教育体制下的学生实际水平相一致. 建议教师们授课时略去定理的证明以及证明题型，用举例法引出基本概念和最重要的定理结论即可，以“矩阵的初等行变换”为主线，把基本计算题型贯穿起来.

前　言

仅从计算角度看，《线性代数》就是实数的加法、减法和乘法运算，并辅以一套运算规则. 实数的运算是初中一年级的数学知识，抛开定理证明和证明题型，凡是合格的初中毕业生都能够学会《线性代数》这门课程.

《线性代数》课时少，内容却不少，教师的讲授只能是提纲挈领，所以要求学生有一定的自学能力. “书读三遍，其意自现”，基本概念要清晰，基本定理要掌握，基础运算要熟练. 认真读书，抓住重点，独立完成作业，是学好数学各学科的必由之路，也是多年教学实践的经验之谈，望同学们谨记并实践之.

白君诚

2013 年 10 月 10 日

目　录

第一章

行列式

行列式在本质上是由 n^2 个数值排列成的正方形数表按一定法则计算得到的一个数，行列式是线性代数中最简单的概念和最基本的计算工具，它在研究线性方程组、矩阵、向量组的线性相关性、二次型，以及数学的其他分支中发挥着重要作用，在其他科学分支中也有广泛应用.

考试内容

行列式的概念和基本性质；行列式按行（或列）展开定理.

考试要求

（1）了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

（2）会应用行列式的性质和行列式按行（或列）展开定理计算行列式.

§1.1 行列式的基本概念和基本性质

中学数学课程已经涉及二阶行列式和三阶行列式，本节在此基础上提高，为我们计算四阶以上行列式打下基础.

一、n 阶行列式

1. 定义 1

由 n^2 个数 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）组成的计算符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1—1}$$

称为 n 阶行列式，常用符号 D，D_n，$\det(a_{ij})$，$|a_{ij}|$ 表示.

数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素，a_{ij} 的第一个下标表示它位于行列式 D 的第 i 行，称为行标；第二个下标 j 表示它位于第 j 列，称为列标，D 的元素不可以写成 aij.

规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意把行列式与数的绝对值区别开来. 如一阶行列式

$|-1|=-1$，而绝对值$|-1|=1$.

从 n 阶行列式 D 的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{nn} 连成的直线称为主对角线；从右上角的元素 a_{1n} 到左下角的元素 a_{n1} 连成的直线称为次对角线.

二阶行列式和三阶行列式是我们在中学学过的知识，复习一下.

2. 二阶行列式

规定二阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1—2}$$

3. 三阶行列式

计算三阶行列式可以使用对角线法则，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{32}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

等我们学习完行列式的三角化和降价法之后，就没有必要记忆和使用对角线法计算三阶行列式了.

四阶以上的行列式没有对角线法.

二、行列式的性质

研究和掌握行列式的性质，可以大大简化高阶行列式的计算，我们不给出证明，只用简例验证行列式性质的正确性.

1. 定义 2

将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行改写成同序号的列，所得到的新行列式称为 D 的转置行式，记作 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1—3}$$

例 1 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1\times5-(-2)\times3=11.$

$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=1\times5-3\times(-2)=11.$

2. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即

$$D=D^{\mathrm{T}}. \tag{1—4}$$

这个性质告诉我们，行列式中行与列的地位平等，因此，行列式中对行成立的性质对列也成立.

例 2 $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2.$

交换两行所得行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{vmatrix}=3\times2-4\times1=2,$$

交换两列所得行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{vmatrix}=2\times3-1\times4=2.$$

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式变号.

计算高阶（$n\geqslant4$）行列式时，有些同学喜欢使用这个性质，却常常忘记变号，记不住的性质，就不要使用！

如果行列式 D 有两行（或两列）的对应元素相同，交换这两行（或两列），根据性质 2，有 $D=-D$，$2D=0$，$D=0$.

推论 如果行列式 D 的两行（或两列）的对应元素相同，则此行列式的值为零.

例 3 因为

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\6 & 10\end{vmatrix}=1\times10-(-2)\times6=22,\quad 2\begin{vmatrix}1 & -2\\3 & 5\end{vmatrix}=2\times[1\times5-(-2)\times3]=22,$$

所以 $$\begin{vmatrix}1 & -2\\6 & 10\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -2\\3 & 5\end{vmatrix}.$$

性质 3 如果行列式的某一行（或列）有公因子 k，则 k 可以提到行列式符号之外.

推论 以数 $k\neq0$ 乘行列式，等于以 k 乘行列式的某一行（或列）的各个元素.

例 4 行列式 $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 1 & -7\\2 & -4 & 6\end{vmatrix}$ 的第 1 行与第 3 行的对应元素成比例，根据行列式的性质 3 和性质 2，有

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 1 & -7\\2 & -4 & 6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 1 & -7\\1 & -2 & 3\end{vmatrix}=0.$$

性质 4 如果行列式有两行（或列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

我们用英文单词 row 的第一个字母 r 表示“行”，column 的第一个字母 c 表示“列”，

运算符号 kr_i+r_j 表示把行列式第 i 行的 k 倍加到第 j 行的对应元素上；kc_i+c_j 表示把行列式第 i 列的 k 倍加到第 j 列的对应元素上.

例 5 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=5-(-6)=11$,

又 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \overset{3r_1+r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}=11.$

性质 5 把行列式的某一行（或列）乘以非零常数 k，加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变.

性质 5 称为行列式的倍加运算.

口诀：行列式的倍加运算值不变.

三、三角行列式与对角行列式

1. 上三角行列式

主对角线左下方的元素全是零的行列式称为上三角行列式，其值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1—5}$$

注：希腊字母 $\prod$，π(pai)，大写字母 $\prod$ 在数学中作为连乘符号.

2. 下三角行列式

主对角线右上方的元素全是零的行列式称为下三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1—6}$$

3. 对角行列式

主对角线上元素不全是零，其他元素全是零的行列式称为对角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1—7}$$

4. 次三角行列式和次对角行列式

次对角线右下方（或左上方）的元素全为零的行列式称为次三角行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1—8}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

次对角线上的元素不全为零，其他元素全是零的行列式称为次对角行列式.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1} \tag{1—9}$$

四、三角化行列式

因为上三角行列式的值等于主对角线上的元素的乘积，所以可以应用行列式的性质 2 和性质 5，把行列式化为上三角行列式，这种计算行列式的方法称为三角化行列式或者行列式的三角化.

1. 行列式的运算符号及书写规则

(1) 交换运算.

$r_i \leftrightarrow r_j$：交换第 i 行与第 j 行；

$c_i \leftrightarrow c_j$：交换第 i 列与第 j 列.

(2) 倍加运算.

$kr_i + r_j$：第 i 行的 k 倍加到第 j 行上；

$kc_i + c_j$：第 i 列的 k 倍加到第 j 列上.

(3) 书写规则.

按照运算的先后次序，按竖式把行列式的运算符号写在拉长的等号══的上、下方.

先做交换运算，后做倍加运算.

同一列上的倍加运算按次序先后一步完成.

不可以按横式排序书写运算符号.

2. 三角化行列式的运算程序

如果 $a_{11}=1$，则用倍加运算把第 1 列 $a_{11}=1$ 下方的元素全化为 0.

如果 $a_{11}\neq1$，且行列式的第 1 行（或列）中有 1，则先做交换运算，使 $a_{11}=1$.

如果 $a_{11}\neq1$，且行列式的第 1 行和第 1 列中没有 1，则应用性质 3 从第 1 行中提取公因子 a，使 $a_{11}=1$.

从 a_{22} 开始重复以上步骤，直至把行列式化为三角行列式.

注：如果行列式前已有符号 D，写了“解”后，从 D 开始运算，不必再抄写行列式，如果命题未给符号 D，应在“解”字后写“原式”或抄写行列式.

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解: $D\xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-8r_2+r_4]{4r_2+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{5}{4}r_3+r_4}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix}=-40.$$

例 7 求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

分析：$a_{11}=0$，但 $a_{12}=a_{14}=1$，$a_{21}=1$，应先作交换运算.

解: 原式 $\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[-4r_1+r_4]{-3r_1+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & 8 & 25 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[2r_2+r_4]{2r_2+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 12 & 27 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-\frac{12}{5}r_3+r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -69/5 \end{vmatrix}$$

$=69.$

小结：对行列式作倍加运算 kr_i+r_j 时，为提高运算速度，第 1 行从元素 a_{12} 开始计算；第 2 行从元素 a_{23} 开始计算；…… 第 $n-1$ 行从 $a_{(n-1)n}$ 计算.

如例 6，写出 $D\xlongequal[5r_1+r_4]{-r_1+r_2}$后，知元素 $a_{11}=1$ 下方的元素全是 0，故应以 $a_{12}=3$ 开始计算.

习题 1—1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$.

2. 如果行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0$，则 $x=$________.

3. 三角化行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

§1.2　行列式按行（列）展开

三角化行列式程式固定，解法呆板，适用于计算机计算高阶行列式. 有没有一种解法灵活、步骤相对少一些的手工求行列式的值的方法呢？有！

一、行列式按一行（或列）展开

定义 3　在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列，所余的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1—10}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 8　设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$，元素 5 的代数余子式为________.

分析： 5是元素 a_{32}，划去第3行第2列，得二阶余子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8$.

解： $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-8$.

例9 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，已知 $D=0$ 且 $M_{11}+M_{12}+M_{13}=11$，求 a，b.

分析： 条件 $D=0$ 和 $M_{11}+M_{12}+M_{13}=11$ 可以构成一个二元一次方程组.

解：

$$
\begin{aligned}
D &\xlongequal[-3r_1+r_3]{-ar_1+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-2a & b-3a \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1-2a & b-3a \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{-\frac{1}{5}r_2}5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 1-2a & b-3a \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{(2a-1)r_2+r_3}5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5}(2a-1)+b-3a \end{vmatrix} \\
&=5\left[\frac{7}{5}(2a-1)+b-3a\right] \\
&=-a+5b-7=0.
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
M_{11}+M_{12}+M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&=2-b+2a-3b+a-3 \\
&=3a-4b-1=11.
\end{aligned}
$$

联立方程组 $\begin{cases} a-5b=-7 \\ 3a-4b=12 \end{cases}$，解出 $a=8$，$b=3$.

引理 如果 n 阶行列式 D 的第 i 行除 a_{ij} 外，其他元素全为0，则 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.（证明略）

定理1 行列式按行（列）展开法则一.

n 阶行列式等于它的任意一行（或列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，把行列式 D 按第 i 行展开，有

$$
\begin{aligned}
D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\
&= \prod_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}
\tag{1—11}
$$