上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 40

非等谱发展方程族的类孤子解

● 作者：宁同科

● 专业：计算数学

● 导师：陈登远　张大军

上海大学出版社
2005年上海大学博士学位论文 40

非等谱发展方程族的类孤子解

● 作者：宁同科

● 专业：计算数学

● 导师：陈登远　张大军

Shanghai University Doctoral
Dissertation (2005)

Soliton-like Solutions for Nonisospectral Equation Hierarchies

Candidate: Ning Tongke
Supervisor: Chen Dengyuan
Zhang Dajun
Major: Computational Mathematics

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体成员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单：

主任：

楼森岳　上海交通大学

委员：

李志斌　华东师范大学

秦成林　上海大学

马和平　上海大学

范恩贵　复旦大学

导师：陈登远

答辩日期：2005.3.8

摘　要

本文利用反散射变换、Hirota 方法、Wronskian 技巧研究了非等谱发展方程族和等谱方程的 τ 方程族的精确解以及解的性质. 第二章从 Lax Pair 出发，当谱参数按一定的规律随时间 t 变化时得到 KdV 系统的方程族、mKdV 系统的方程族、sine-Gordon 系统的方程族和 AKNS 系统的方程族，同时由 AKNS 系统的方程族约化得到 mKdV 系统的方程族、sine-Gordon 系统的方程族、非线性 Schrödinger 系统的方程族. 相应的等谱方程族、非等谱方程族以及 τ 方程族是其特例. 第三章通过反散射变换方法得到 KdV 系统的方程族的 N-孤子解的精确表达式，进而约化得到等谱 KdV 方程族、非等谱 KdV 方程族以及 τ 方程族的 N-孤子解. 第四章通过反散射变换的方法得到 AKNS 系统的方程族的 N-孤子解的精确表达式，进而约化得到了 KdV 系统方程族、mKdV 系统方程族、sine-Gordon 系统方程族、非线性 Schrödinger 系统方程族的 N-孤子解的精确表达式. 第五章利用 Hirota 方法、Wronskian 技巧，获得非等谱 sine-Gordon 方程、非等谱非线性 Schrödinger 方程、KdV 系统的 τ 方程、mKdV 系统的 τ 方程、sine-Gordon 系统的 τ 方程、非线性 Schrödinger 系统的 τ 方程的 N-孤子解，并考察相应解的性质，得到与等谱方程既有共同的特征又独有的性质. 第六章给出谱参数对时间的导数是谱参数的线性函数时非等谱 AKNS 方程族和等谱方程族之间的规范变换与

转换算子.

关键词: 非等谱方程, τ 方程, 反散射变换, Hirota 方法, Wronskian 技巧, 精确解

Abstract

In this paper, We obtain the solutions for nonisospectral evolution equation heirarchies and τ-sysmetry hierarchies by the inverse scattering transform (IST), Hirota method and Wronskian technique, we also investigate the properties of these solutions. In chapter 2, under the condition which spectral parameter k evolves according to time, we derive out equation hierarchies for KdV system, mKdV system, sine-Gordon system and AKNS system. Equation hierarchies for KdV system, mKdV system, sine-Gordon system and nonlinear Schrödinger system are reduced from equation hierharchy for AKNS system. Specially, isospectral hierarchies, nonisospectral hierarchies and related τ-sysmetry hierarchies are special cases of them. In chapter 3, by IST, we obtain N-soliton solution to equation hierarchy for KdV system, and reduce to N-soliton solution to isospectral KdV hierarchy, nonisospectral KdV hierarchy and τ-symetry hierarchy. In chapter 4, by IST, we obtain N-soliton solution to equation hierarchy for AKNS system, and reduce to N-soliton solution to equation hierarchies for KdV system, mKdV system, sine-Gordon system and nonlinear Schrödinger system. In chapter 5, we investigate the nonisospectral sine-Godorn equation, nonisospectral nonlinear Schrödinger equation

by Hirota method and Wroskian technique, meantime we also consider τ-symetry equation for KdV, mKdV, sine-Gordon, nonlinear Schrödinger systems by Hirota method. The properties of these solutions are investigated. In chapter 6, we give gauge transform between nonisospectral AKNS hierarchy and isospectral AKNS hierarchy.

Keywords: Nonisospectral Equation Hierarchy, τ equations, Inverse Scattering transformaton, Hirota method, Wronskian technique, Exact solution

目　　录

第一章　前　　言

§1.1　引言

在物理学的众多领域如流体、固体、基本粒子、等离子体、凝聚态、超导、激光、非线性光学等的研究中，都出现了一些孤子方程，这些方程最典型例子是 KdV 方程、sine-Gordon 方程、非线性 Schrödinger 等方程，它们都具有孤子或类孤子解. 孤子在相互碰撞过程中保持自己的传播方向和能量不改变，使它具有类似于粒子和波动的许多特征，大量的研究表明孤子这一奇特现象在自然界具有普适性，因而存在广阔的应用前景. 对孤子方程的研究是数学物理领域的一个方兴未艾的课题，也是非线性科学的前沿课题.

§1.2　Lax 可积方程的求解

对于线性偏微分方程的求解已经有一套成熟的理论和方法，如 D'Alembert 行波法、分离变量法、球面影像法和 Fourier 分析法等. 但对于非线性偏微分方程，叠加原理不再成立，求解变得十分困难. 在这一领域，人们进行了大量的工作，取得了一些成功的方法，例如反散射变换（IST）、Bäcklund 变换、Hirota 双线性导数方法、Wronskian 技巧、对称等一系列方法，其中 1967 年，Gardner, Green, Kruskal 和 Miura[1]（GGKM）在求解 KdV 方程的哥西（Cauchy）问题时所采用的反散射变换方法在非线性发展方程的求解中具有里程碑的地位. 我们知道，对于空气动力学研究中提

出的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \tag{1.2.1}$$

可通过 Cole-Hopf 变换

$$u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi} \tag{1.2.2}$$

化为线性热传导方程 $\phi_t - \nu\phi_{xx} = 0$，从而得到 Burguers 方程的精确解. 由于 KdV 方程与 Burgers 方程外形相似，很多学者尝试寻找类似于 Cole-Hopf 变换的函数变换，将 KdV 方程"线性化"，从而达到研究 KdV 方程的目的，然而这些努力都没有成功. 1967 年 Miura[2]等人发现 mKdV 方程

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \tag{1.2.3}$$

和 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.2.4}$$

之间存在 Miura 变换

$$u = -v^2 - v_x \tag{1.2.5}$$

如果将 Cole-Hopf 变换

$$v = \frac{\phi_x}{\phi} \tag{1.2.6}$$

代入 Miura 变换(1.2.5)，则给出

$$\phi_{xx} + u\phi = 0 \tag{1.2.7}$$

注意到 KdV 方程在 Galilean 变换 $u \to u - \lambda$，$t \to t$，$x \to x + 6\lambda t$ 下不变，这样线性方程(1.2.7)就成

$$\phi_{xx} + (u - \lambda)\phi = 0 \tag{1.2.8}$$

这一方程在量子力学[3]中称为一维 Schrödinger 方程，其中 ϕ 是波函

数，u 是位势，λ 是谱参数. 但是与量子力学的 Schrödinger 方程不同的是，u 作为 KdV 方程的解，应依赖于时间. 即是说在(1.2.8)中，必须把时间考虑为参数. 这样一来，本征值 λ 及波函数 ϕ 也依赖于时间，因此可以假定波函数有时间发展式

$$\phi_t = A\phi + B\phi_x \tag{1.2.9}$$

当取 $A=\gamma+u_x$，$B=4\lambda+2u$，式中 γ 是任意常数时，在 $\lambda_t=0$ 条件下，容易推出线性问题(1.2.8)与(1.2.9)相容等价于 u 满足 KdV 方程(1.2.4). 这种将非线性方程等价于一对线性问题的相容性条件称为“Lax 可积”.

GGKM 求解 KdV 方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

可归纳为两大步，第一步是**正散射问题**，正散射问题是给定位势 u，求线性问题(1.2.8)的离散谱 λ_n、连续谱 λ 及其他散射数据并研究特征函数的性质.

根据量子力学散射理论，当位势 u 在无穷远处随 x 充分快地趋于零时，Schrödinger 谱问题(1.2.8)有特征函数平方可积的有限个离散谱 $\lambda=\kappa_n^2>0$，$n=1, 2, \cdots, N$，以及特征函数有界的连续谱 $\lambda=-k^2<0$，其特征函数具有渐进式：

$$\begin{gathered} \text{对于离散谱 } \lambda = \kappa_n^2 > 0,\ x \to \infty \\ \phi_n(x, t) \sim c_n(t)\exp(-\kappa_n x),\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n{}^2 \mathrm{d}x = 1 \end{gathered} \tag{1.2.10}$$

对于连续谱 $\lambda=-k^2<0$，

$$(1)\ x \to \infty,\ \phi(x, t) \sim \exp(-\mathrm{i}kx) + R(k, t)\exp(\mathrm{i}kx) \tag{1.2.11a}$$

$$(2)\ x \to -\infty,\ \phi(x, t) \sim T(k, t)\exp(-\mathrm{i}kx) \tag{1.2.11b}$$

这里(1.2.10)的 $c_n(t)$ 使得特征函数的平方在实轴上的积分等于1,称其为离散特征函数的"归一化系数".(1.2.11a)第一项相应于波振幅为1,几率密度为 k 的入射波(见图1);第二项相应于经位势 $u(x)$ 反射后的反射波,其几率密度为 kR^2,两者之比为 $kR^2/k = R^2$,因此称 $R(k, t)$ 为"反射系数".(1.2.11b)相应于穿透位势 $u(x)$ 后继续前进的平面波,其几率密度为 kT^2,类似地称 $T(k, t)$ 为"透射系数".

集合

$$S(\lambda, t) = \{\{\kappa_n, c_n(t)\}_1^N, T(k, t), R(k, t)\} \quad (1.2.12)$$

就是量子力学的 Schrödinger 谱问题(1.2.8)的散射数据.

当 $t = 0$,对于给定的 $u(x, 0)$,由谱问题(1.2.8)得到散射数据

$$S(\lambda, 0) = \{\{\kappa_n, c_n(0)\}_1^N, T(k, 0), R(k, 0)\} \quad (1.2.13)$$

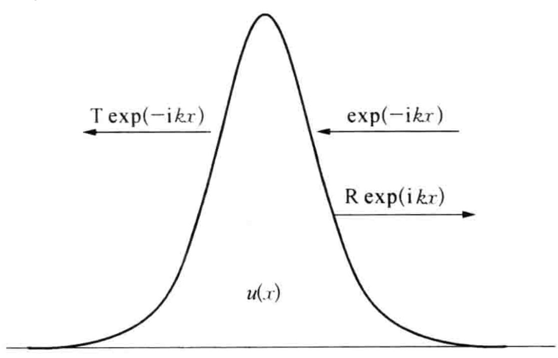

图1 入射波 e^{-ikx} 遇到位势 u 发生反射与透射

第二步是**反问题**,反问题就是根据散射数据 $S(\lambda, t)$ 重构位势 $u(t, x)$.

在反问题这一阶段,分为两步:一是研究散射数据的时间演化规律,这一步可利用波函数的时间发展式(1.2.9),给出 t 时刻的散射数据(1.2.12)和 $t = 0$ 时刻的散射数据(1.2.13)之间的关系

$$\kappa_n = \mathrm{cons\,tan}\,t,\ c_n(t) = c_n(0)\exp(4\kappa_n^3 t),\ n = 1, 2, \cdots, N \tag{1.2.14a, b}$$

$$T(k, t) = T(k, 0),\ R(k, t) = R(k, 0)\exp(8\mathrm{i}k^3 t) \tag{1.2.14c, d}$$

第二步,也是关键一步就是位势重构. 1955 年,Gel'fand 和 Levitan[4]首先利用散射数据定义函数

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\exp(-\kappa_n x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(k, t)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k \tag{1.2.15}$$

然后求解线性积分方程,即 Gel'fand-Levi tan-Marchenko 方程

$$K(x, y, t) + F(x+y, t) + \int_x^{\infty} K(x, z, t)F(z+y, t)\mathrm{d}z = 0,\ (y > 0) \tag{1.2.16}$$

得到 $K(x, y, t)$,则位势 $u(x, t)$可以由下式恢复

$$u(x, t) = 2\frac{\mathrm{d}K(x, x, t)}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.17}$$

这种方法类似于解线性方程的 Fourier 变换方法,因此也被称为"非线性 Fourier 变换". IST 求解的步骤可以用图 2 来概括.

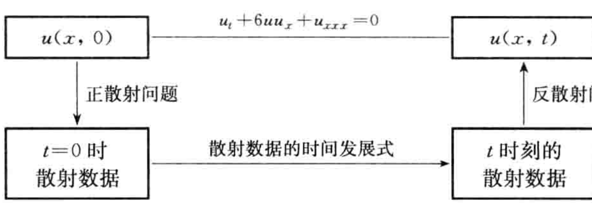

图 2　IST 求解的步骤

1968 年 Lax[5]将 GGKM 上述思想放到更一般的框架上,为 IST 作为求解非线性发展方程的一种方法铺平了道路. 即:对于任意

非线性发展方程

$$u_t = K(u),\ K\ 是非线性算子 \tag{1.2.18}$$

如果存在依赖于 u 的线性算子 L 和 M,使得非线性发展方程(1.2.18)成为 线性问题

$$L\phi = \lambda\phi \tag{1.2.19a}$$

$$\phi_t = M\phi \tag{1.2.19b}$$

的相容性条件

$$L_t = [M,\ L] + \lambda_t \tag{1.2.20}$$

则称线性问题(1.2.9)为非线性发展方程(1.2.18)的 Lax Pair,(1.2.20)称为非线性发展方程的 Lax 表示,具有这种性质的非线性发展方程被称为是 Lax 可积.则对这种非线性发展方程就可以应用 IST 法求解.

1973 年 Ablowitz[6, 7]等人在前人工作的基础上,考察了 2×2 阶矩阵谱问题,得到了一大类物理上感兴趣的非线性发展方程,成功地给出了反散射解,并将这种求解方法命名为“反散射变换-非线性发展方程的 Fourier 变换”.之后 Ablowitz 和 Haberman[8]又将 2×2 阶矩阵谱问题推广到了 $n\times n$ 阶矩阵谱问题,并且非线性发展方程所含的空间变量可以是高维的,进一步扩大了反散射变换的求解范围,诸如 Boussinesq 方程[8, 9]、非线性 Schrödinger 方程[9]、mKdV 方程[10]、sine-Gordon 方程[11]等,并成功地推广到高维系统[12, 13]和微分-差分方程[13, 14],相当一大类非线性发展方程都有反散射解[15].在国内李翊神、庄大蔚[16]证明了 Kaup-Newell 谱问题和 AKNS 谱问题反散射变换的散射量和平移变换的等价性;顾新身[17]将反散射变换应用到具有二重根特征根的复 KdV 方程,得到了解;曾云波等[18, 19]推广反散射变换到自容源方程获得具有非定常速度的孤子波.最近,陈登远、宁同科和张大军将反散射变换应用到非等谱方程族[20, 21]得到了整个方程族的解.反散射变换作为求解非线性发展方程的方法仍在不断地发展中.