

方 磊 编著
李珍焕 审校

中学数学 思维与方法

陕西人民教育出版社

中学数学思维与方法

方 磊 编著

李 珍 焕 审订

陕西人民教育出版社

中学数学思维与方法

方 磊 编著

李珍焕 审订

陕西人民出版社出版

(西安和平门外标新街2号)

陕西省新华书店发行 汉中地区印刷厂印刷

787×1092毫米 32 开本 10.5 印张 230 千字

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷

印数：1——8,000

统一书号：7387·310 定价：2.05元

仅以此书纪念已故的、我中学时代的几位老师：

王 冷 姚果毅 宫元熙 陈迺军 茹常荣

序 言

魏庚人

三十多年来，中学数学教育的研究大体上是沿着“知识—能力—智力—思维”这样一个阶梯发展的。

在五十年代，谈得较多的是“知识的传授”。到了六十年代，国际上以苏联赞科夫、美国布鲁纳为代表的新派借鉴心理学成果，从不同的角度对传统教学理论进行了冲击。之后谈得较多的便是“能力的培养”和“智力的开发”了。在我国，这个过程虽晚了一点，但人们对“能力”和“智力”的研究也已相当深入。现在和以后的相当一段时间里，人们谈得较多的，便是“思维”了。因为，无论是培养能力，还是开发智力，归根结蒂，是一个发展学生思维的问题。

“会不会想”是衡量一个学生数学学习水平的首要标志。因之，“是否教会了学生怎样想”便是衡量一个数学教师教学质量的首要标志。

“发展学生思维”在美苏等国，已明确地被列为中学数学的教育目的。在我国，中学数学的教育目的中，也有“发展学生逻辑思维能力”这样一条。

依据本书作者的见解，“发展学生思维”中的思维不仅仅局限于逻辑思维，还应包括形象思维和辩证思维在内。而且这种思维也并不局限在数学范畴之内，也是指抽开了数学的具体内容之后依然存在的，对一切事物均有效的思维。

数学是发展学生思维的最理想、最有效的课程。完成数学课中的各类习题，能促进思维的各项素质得到有效的发展。本书对此做了详尽的阐述。

对于思维方法的训练，作者结合教学实践，提出了一些行之有效的方法。比如揭示中学数学和解题过程的一般规律；重视画图、重视形象思维和两种抽象思维的结合；教师在习题课上应演示“失败”；教师要重视学生中涌现的“闪光的思维”等等。

更重要的是作者也提出了，要有效地发展学生思维，教师本身必须具备良好的思维素质，教师必须在思维能力上，而不仅仅是在知识水平上，对学生保持一种相对的优势。

本书前四章理论阐述，文笔生动。第五章题目选择，难易适中，思路分析，颇为精当。这是一部高水平的数学教育参考书，相信对于中学数学教育工作者和中学生会有所启发，有所裨益。

1986年5月

目 录

序言	魏庚人
第一章 思维方法的重要性	(1)
第二章 思维方法的规律	(11)
一、中学数学本身的某些规律	(11)
1. 数和形的对立统一规律	(11)
2. 量变质变规律	(13)
3. 一些其他的规律	(15)
二、数学学习进程中的某些规律	(16)
三、思维的诸要素	(17)
1. 思维的形式	(18)
2. 思维的方法	(19)
3. 思维的素质	(23)
4. 数学思维的产生	(27)
5. 思维与思路、思想方法的联系	(29)
四、辩证思维在中学数学中的地位	(30)
第三章 思维方法的训练	(36)
一、教师应具备的修养	(36)
1. 一定的思维素质	(36)
2. 熟悉中学数学本身的和学习进程的规律	(45)
3. 充分认识习题课的功能	(48)
二、学生在思想方法上应受的训练	(50)

1. 讲授习题时演示“失败”……………(50)

2. 使学生认识解题的一般规律……………(53)

三、一些具体方法……………(57)

1. 加强习题课教学……………(57)

①加强趣味性以发展思维的主动性……………(57)

②以概念性习题发展思维的深刻性……………(58)

③以综合性习题和一题多解发展思维的广度……………(65)

④以技巧性习题训练思维的灵活性……………(76)

⑤有意地介绍一些“错误”，以提高思维的辨别力……………(82)

2. 重视形象思维和两种抽象思维的结合……………(85)

①尽可能让学生借助形象进行思维……………(85)

②重视代数问题的图化和几何意义……………(89)

③加强画图的训练……………(95)

④重视三角问题的图形构造……………(100)

3. 掌握类比的思维方法，防止“想当然”……………(113)

第四章 丰富的解题思路……………(121)

一、各分支间的相互渗透……………(121)

1. 代数方法在几何问题中的应用……………(122)

2. 三角方法在几何问题中的应用……………(126)

3. 代数与三角之间的相互渗透……………(133)

二、多种多样的“转化”途径……………(143)

1. 引入辅助元——把生疏的转化成熟悉的……………(144)

2. 引辅助线——搬来一块翘板……………(146)

3. 搬家——把不在一起的搬在一起……………(150)

4. 定长和定值——已经有哪些定值？……………(152)

5. 面积的作用——思考中不应忽略的因素……………(157)

6. 化无限为有限——消去中间项的方法·····	(162)
7. 硬凑或硬提——有直道就不走弯道·····	(167)
8. 公式的变通与逆用——一个顶三、顶四·····	(170)
9. “1”的妙用——巧妙地选择替代·····	(175)
10. 坐标系和参数——关键在于合理地选择·····	(179)
11. 试验——这本身就是一种解题方法·····	(183)
三、注意各种数学方法的灵活组合·····	(189)
第五章 一题多解的意义、做法和举例 ·····	(191)
一、意义·····	(191)
二、做法·····	(192)
三、举例·····	(193)
1. 计算、恒等变换及因式分解·····	(193)
2. 方程(包括根与系数的关系)·····	(205)
3. 不等式、函数和极值·····	(212)
4. 数列与数学归纳法·····	(226)
5. 复数及排列组合·····	(236)
6. 应用题及其他·····	(243)
7. 平面几何计算·····	(253)
8. 平面几何证题·····	(261)
9. 立体几何问题·····	(286)
10. 平面解析几何·····	(291)
11. 三角函数式的计算·····	(331)
12. 三角恒等式的证明·····	(339)
13. 三角形中的边角关系与解三角形·····	(356)
14. 三角方程及其他·····	(374)
附录 ·····	(383)

练习题（习题一——习题十六）	(383)
部分习题答案或提示	(397)
主要参考文献书目	(403)
后记	(405)

第一章 思维方法的重要性

试看下面一组题目：

例 1. 计算 1——1000 中有多少个不能被 9 整除的数。

第一个学生是这样算的：他扣住了“有多少个不能被 9 整除”这句话。他想，1—9 九个数中，除了 9 外，有八个不能被 9 整除，10—18 中，又有八个不能被 9 整除，这样数下去，实际上是，每九个连续自然数一组，每组中均有八个不能被 9 整除，问题变成，只需知道 1000 中有多少个这样的数组就行了。因为在 1—999 中共有 $\frac{999}{9} = 111$ 个这样的

数组，再加上 1000 这个数就得到结果。他的算式是：

$$111 \times 8 + 1 = 889$$

第二个学生却不这样想，他认为 1—1000 中不能被 9 整除的数很多，而能被 9 整除的数却不多，故只要算出后者，从 1000 中减去，即得前者。故他先算出能被 9 整除的数 9、18、27、…999，共有 111 个，则不能被 9 整除的数即是 $1000 - 111 = 889$ 个。若学过数列，求上述等差数列的项数是极方便的。（由 $9 + (n - 1) \times 9 = 999$ ，可得 $n = 111$ ）

这两个学生的方法都对，但想法显然不同，前者是顺着题目想，立足于逐个积累，在解题时显得烦琐；而后者是逆着题目想，让我算“不能被 9 整除的”，我先算“能被 9 整除的”，立足于删减，在解题时显得简捷。可见，不同的人

在解决同一问题时，思维方法常常不同。

例2. 有师生二人，当老师象学生那么大时，学生才两岁，当学生到老师年龄时，老师就44岁了，问师生现在的年龄？

多数学生喜欢设未知数，列出方程组来解。

设：教师年龄为 x ，学生年龄为 y ，

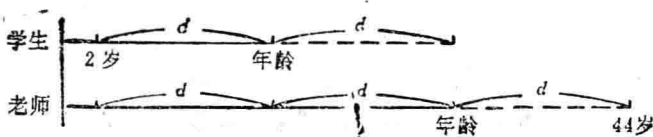
则据题意得方程组
$$\begin{cases} y - (x - y) = 2, \\ x + (x - y) = 44. \end{cases}$$

化简得
$$\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2x - y = 44. \end{cases}$$

解得 $y = 16$ ， $x = 30$ 。

即师生年龄分别为30岁和16岁。

但有人不这样想，因为他看出问题中提到的“老师象学生那么大”和“学生到老师年龄时”，实际上都指的是师生年龄差，故令这个年龄差为 d ，画个示意图：



一看便知， $44 - 2$ 正是师生年龄差的三倍，即

$d = \frac{44 - 2}{3} = 14$ 。故学生年龄为 $d + 2 = 16$ 岁，老师年龄为

$16 + d = 30$ 岁。

上述两种方法也都对，但抓住在题目中两次出现“年龄差”这个特殊性，思维就显得简捷，解法也明快新颖。

例 3. A、B两地相距50里，甲、乙二人均以15里/小时的速度分别从A、B两地相向而行，而甲带了一只狗，以速度20里/小时同时从A地出发，遇乙后折回，遇甲后又折回，始终在甲、乙二人中间奔跑，直到甲乙二人相遇。问狗共跑了多少路？

这个问题，如果顺着题目去想，狗速与人速之比为

$20 : 15 = 4 : 3$ ，故狗第一段跑了 $50 \times \frac{4}{7}$ 里。此时，甲、乙

二人各走了 $50 \times \frac{3}{7}$ 里，故甲乙之间只剩了 $50 \times \frac{1}{7}$ 里；狗第二

段又跑了这段距离的 $\frac{4}{7}$ ，即 $50 \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{7}$ ；依此类推，狗第三

段路程为 $50 \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{7^2}$ ，可见，狗所跑的路程恰为一数列：

$$200 \times \frac{1}{7}, 200 \times \frac{1}{7^2}, 200 \times \frac{1}{7^3}, \dots, 200 \times \frac{1}{7^n},$$

是一个 $q = \frac{1}{7}$ 的递缩等比数列，由求和公式 $S = \frac{a_1}{1-q}$ 可得，狗一共跑的路程是：

$$S = \frac{\frac{200}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3} \text{ (里)}$$

这种思路，要得出狗各段路程所组成的数列，并不容易，稍不严密，就容易出错。

另一种思维方法，不管狗每一段跑了多少路，而抓住狗跑的时间与甲、乙二人步行的时间相等这个隐含在题目中的

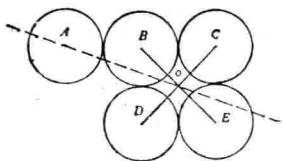
“潜条件”，就可以快刀斩乱麻地迅速得出答案了。

因为甲、乙二人速度相等，相遇时，各走了25里，费时 $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$ 小时，这也正是狗不停地奔跑所用的时间，乘以狗

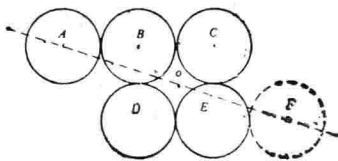
速，即得狗所跑的路程为 $S = \frac{5}{3} \times 20 = \frac{100}{3}$ （里）

相比之下，后一种方法抓住了对解题更有意义的潜条件，显得简捷明了，而前一种方法有点出力不讨好，似乎“杀鸡用了宰牛刀”。

例4. 有A、B、C、D、E五个等圆排列如图，试求一个过A点的直线，把这五个圆的总面积平分。



事实上，如果把这五个圆始终看成一个不能分割的整体来考虑，则这条直线不易找出。如果把B、C、D、E四个圆看作一个图形，则容易看出，BE、CD的交点O



为其对称中心，连AO，即为所求。因为经过这两个对称中心的直线，既平分了圆A，也平分了另外四个圆，故平分了这五个圆的总面积。

如果不这样考虑，而在E外，再并列一个圆F，则连AF，即为所求。容易证得，AF的中点即是O。

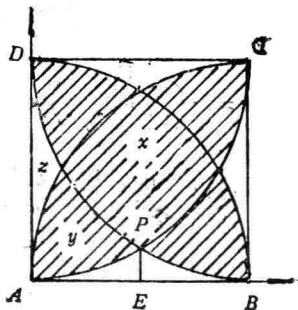
上述两种平分线的画法，均没有把原来的图形看死，而是着眼于改变它，再解决问题。而一旦改变得好，解题思路即

可一蹴而就。

例5. 已知正方形边长为 a
计算图中阴影部分的面积。

本题中，阴影部分是由四个
 $\frac{1}{4}$ 圆叠加而得到的。

如图，阴影部分面积应是正
方形的面积减去四个小曲边三角
形的面积（如曲边 $\triangle PAB$ ），故
关键在于计算 曲边三角形的面积



【法一】 利用积分知识，可直接计算：

图中，取 AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， E 为 AB 中点，设 曲边
三角形 PAE 面积为 S_1

$$\text{则 } S_{\text{阴}} = a^2 - 8S_1,$$

$$\therefore S_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} (a - \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} a dx - \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= ax \Big|_0^{\frac{a}{2}} - \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{a^2}{2} - \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

为求后一积分，用三角置换法，

令 $x = a \sin \theta$ ，则 $dx = a \cos \theta d\theta$ 。

$$\text{则 } \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= a^2 \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{可得 } S_1 = \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right) a^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } S_{\text{阴}} &= a^2 - 8 \left[\frac{a^2}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right) a^2 \right] \\
 &= \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 3 \right) a^2
 \end{aligned}$$

【法二】

此题亦可运用方程组的知识来解，如图，设三种小块面积分别为 x 、 y 、 z ，为计值 z 的面积，可先计算几块部分图形的面积。

$$x + 2y = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2, \dots\dots ①$$

（注意：此菊瓣形面积为弓形面积之二倍，每个弓形面积应是 $\frac{\pi}{4} a^2 - \frac{1}{2} a^2$ ，即得上式。）

$$x + 2y + z = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \dots\dots ②$$

（注意：上式表示曲边 $\triangle CPD$ 之面积，应为二中心角为 60° 的扇形面积之和减去正 $\triangle CPD$ 之面积。）

由② - ①即得：

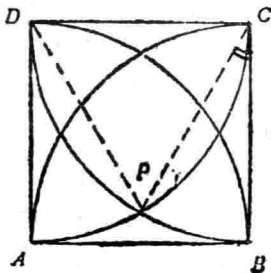
$$z = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\pi}{2} a^2 + a^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \right) a^2$$

所求面积

$$S_{\text{阴}} = x + 4y = a^2 - 4z = \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 3 \right) a^2$$

本法的巧妙处，在于①、②两式中同样的 $x + 2y$ ，在图形上却是形状和位置均不相同的两个部分，实质上用了等量代换的方法。

上述两种方法尽管求出了结果，但比较繁冗。实际上本题用平面几何的方法解决时，更为简便。



【法三】 连结PD, PC, 即可看出曲边 $\triangle PAB$ 面积等于正方形面积减去一个正 $\triangle PCD$ 与两个半径为 a 、圆心角为 30° 的扇形面积之和。

$$\text{而 } S_{\triangle PCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad S_{\text{形扇} DAP} = \frac{\pi}{12} a^2,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S_{\text{曲边} \triangle PAB} &= a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\pi}{6} a^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \right) a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\text{阴}} &= a^2 - 4 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \right) a^2 \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - 3 \right) a^2. \end{aligned}$$

这种思路的得到，关键在于辅助线PD、PC的引出，把较难解决的问题转化成了很容易求积的正 $\triangle PDC$ 和那两个小