高等院校成人教育“十二五”规划教材

Linear Algebra

线性代数

主编　严希文

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

AE 高等院校成人教育“十二五”规划教材

Linear Algebra

线性代数

主编 严希文

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/严希文主编．—长沙:中南大学出版社,2013.8
ISBN 978-7-5487-0862-9

Ⅰ.线…　Ⅱ.严…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 094260 号

线性代数

严希文　主编

□**责任编辑**　谭　平
□**责任印制**　周　颖
□**出版发行**　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　　传真:0731-88710482
□**印　　装**　长沙市华中印刷厂

□**开　　本**　720×1000　B5　□**印张** 12　□**字数** 217 千字
□**版　　次**　2013 年 8 月第 1 版　□2013 年 8 月第 1 次印刷
□**书　　号**　ISBN 978-7-5487-0862-9
□**定　　价**　28.00 元

高等院校成人教育“十二五”规划教材
编审委员会

总序 FOREWORD.

党的十八大报告中指出：要积极发展继续教育，完善终身教育体系。继续教育是我国高等教育的重要组成部分，是传统学校教育向终身教育发展的一种新型教育制度。大力发展以成人教育为主的继续教育是提高劳动者素质、振兴经济和推进教育现代化的重要环节。国家实行继续教育制度，鼓励发展多种形式的继续教育，建立与完善终身教育体系，培养大批贴近社会、服务社会的各类应用型人才，对于加强社会主义精神文明建设，促进社会进步和经济发展，都将起到十分重要的作用。

按照教育部关于成人高等教育人才的培养目标，构建适用的教材体系，是成人高等教育在新形势下继续发展不可缺少的一环。经过编审委员会、作者和出版社的共同努力，“高等院校成人教育‘十二五’规划教材”将陆续出版，我向他们表示诚挚的祝贺和感谢。

综观这套系列教材，具有以下特点：

一是体例新颖。在每章开篇给出明确的学习目标与重点难点提示，涵盖教学大纲的重点或主要内容。教材中充分考虑到学生学习时可能遇到的问题，给他们以提示和建议。在章后和书后分别设置“同步测练与解析”和“综合测练与解析”栏目，涵盖本章及本书的重要知识点，并给出详尽的参考答案，对难题进行分析点评，列出解题思路与要点，以方便学生自学自测。

二是内容丰富、形式多样。教材内容既有基础知识、基本理论，又有基本技能的展示；既注重基本原理与应用知识的传授，又将纸质教材与多媒体教学资源、网络资源相结合，将与课程内容相关的法律法规、工具模

板、操作范例等以多媒体网络资源的形式提供给学生。

三是实用性强。遵循成人高等教育人才培养模式与教学规律，在教材的编写上将理论与实际紧密结合，注重案例的引入，教材中尽可能多地安排案例，并进行详细的分析讲解。旨在通过案例教学，对课程重点难点进行深化分析和实操训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题以及动手操作的能力。

在此，我相信"高等院校成人教育'十二五'规划教材"的出版，对湖南建设教育强省这一目标的实现必将起到积极的推动作用。同时，继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各院校在使用教材过程中有什么问题和建议，请及时反馈编委会，以便改进编写工作，真正把我省成人教育的教材建设提高到一个新的水平。

湖南省教育厅副厅长：申纪云

前言 PREFACE.

“线性代数”是理工农医及经管类成人高等教育各专业的一门重要的基础理论课程，“线性代数”的教学对于各专业后续专业课程的学习及合格专门人才的培养起着非常重要的作用，而一本好的《线性代数》教材是促进该课程教学、提高教学质量和实现教学目标的重要保障。

我们在成人教育教学过程中常常感到，由于受教材内容、学生认识能力、教学时数等诸多因素的影响，有些问题在课堂上顾不上讲，有的又暂时不宜讲解，有的虽能讲到，教材上又缺少相应归纳总结而不便学生复习和掌握。因此，编写一本能够紧密结合成人高等教育实际，遵循成人高等教育对“线性代数”课程的基本要求，在“教”与“学”两方面满足本、专科层次成人高等教育的教学需求，既方便教学，又能帮助学生深入理解基本概念和基本理论，牢固掌握基本运算技能，适应性和针对性较强的成人高等教育《线性代数》教材，是我们长期以来的一个愿望。

近年来，我们结合自己三十年成人高等教育“线性代数”课程教学经验，在对课堂教学讲义进行反复修改的基础上，编写了这本适合成人教育的《线性代数》教材，编排上采取“内容提要与基本要求—基本内容叙述—典型例题解析—本章基本知识体系小结—习题”的章节结构，与之相适应的教学环节是“预习—系统面授—每章归纳总结—同步练习”，并配有适量习题，难易恰当。教材具有科学性、系统性和渐进性，同时做到语言通俗，叙述清楚，为方便学生自学和全面复习考试，特别配有模拟考试试题及解答。

本教材主要教学内容包括：行列式、矩阵、向量组与矩阵、线性方程

组、特征值与二次型、线性空间与线性变换等。

本书为理工农医类和经管类成人学历教育(成人教育、网络教育、电视大学、自学考试)高升本、专升本、专科通用教材，也可作为高职高专理工类和经管类参考教材。

全书由中南大学严希文任主编，黄帅、肖晶妮任副主编，参加编写的还有陈芳霞、黄素平、史舒悦、王芬。

由于编者水平有限，时间仓促，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

CONTENTS. 目录

第一章

行列式

行列式是指由 $n \times n$ 个数排列成 n 行 n 列所得到的一个式子，它实质上表示把这些数按一定的规则进行运算，其结果为一个确定的数.

本章从解二元和三元线性方程组入手引入二阶和三阶行列式的概念，在此基础上给出 n 阶行列式的概念、基本性质和计算方法，最后给出求解线性方程组的一种方法——克莱姆(Cramer)法则.

内容提要	二、三阶行列式，n 阶行列式，特殊行列式，行列式的性质，行列式求值，克莱姆法则
基本要求	1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质; 2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开的定理计算行列式; 3. 了解克莱姆(Gramer)法则，会用克莱姆法则求解非齐次线性方程组
重点难点	重点：行列式的性质，行列式按行(列)展开定理，克莱姆法则; 难点：行列式求值

第一节　二、三阶行列式

一、二阶行列式

行列式的概念来源于初等数学中线性方程组的求解问题. 设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

由消元法可求得，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1－1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

根据线性方程组解的特点，为便于记忆，我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

并称这个两行两列的式子为二阶行列式，其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

注意　在这里，符号“| |”不是初等数学中的绝对值运算符.

行列式(1－3)中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素(或元)，其中 a_{ij} 的第一、二个下标分别叫做行标和列标，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行第 j 列.

如图 1－1，二阶行列式的值就等于主对角线(图中实线所示)上两元素之积－副对角线(图中虚线所示)上两元素之积.

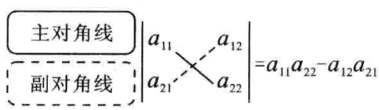


图 1－1

例 1.1　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=1\times 7-3\times 2=1$$

利用二阶行列式的定义，式(1－2)可表示成为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组(1－1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

例 1.2　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=5\\3x_1-x_2=1\end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=1\times(-1)-2\times3=-7\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&2\\1&-1\end{vmatrix}=5\times(-1)-2\times1=-7$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5\\3&1\end{vmatrix}=1\times1-5\times3=-14$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2$$

二、三阶行列式

类似于对二元线性方程组(1－1)的求解，为求解三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1-4}$$

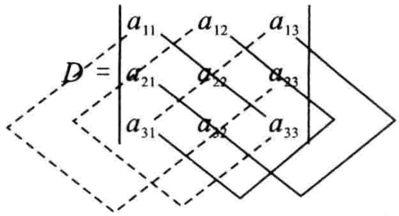
我们引入三阶行列式的记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

它是一个三行三列的式子，其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式的值也可由对角线法求得. 如图(1－2)，三阶行列式的值，即主对角线各平行线上三个元素的积之和，减去次对角线各平行线上三个元素的积之和.



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

图 1－2

例 1.3　三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times3\times(-1)+1\times2\times1-1$$

$$\times3\times1-(-2)\times2\times(-1)-1\times1\times(-1)=1$$

现在回到对三元一次线性方程组的求解. 由消元法可得，当线性方程组(1－4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq0$$

时，该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中，D_j 是把 D 中第 j 列换成常数项 b_1，b_2，b_3 后所得的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=2 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

解　由例 1.3，方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

计算可得

$$D_1=2,\ D_2=1,\ D_3=-1$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=-1$$

第二节　*n* 阶行列式

为了讨论 n 元线性方程组的解，类似于前面对二、三阶行列式的定义，我们引入 n 阶行列式的记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

它是由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 排列成 n 行 n 列的式子. 其中，a_{ij}是行列式位于第 i 行第 j 列的元素.

二阶和三阶行列式可用之前介绍的对角线法进行计算，但对于四阶或更高阶的行列式的求值，对角线法则将不再适用. 我们将在后续章节中介绍一般 n 阶行列式的几种计算方法. 下面给出几种特殊的行列式及其值.

(1) 对角行列式

主对角线元素以外的元素全为 0 的行列式称为对角行列式，其值为主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)上三角行列式

主对角线元素以下的元素全为0的行列式称为上三角行列式，其值为主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)下三角行列式

主对角线元素以上的元素全为0的行列式称为下三角行列式，其值为主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times4\times6\times1 = 24$$

我们看到，对角行列式、上三角行列式和下三角行列式的值均为主对角线上各元素的乘积，计算十分简单. 因此，若能将一般 n 阶行列式转化为这样特殊的行列式，计算起来将非常方便.

第三节 行列式的性质

一、行列式的性质

在介绍行列式计算方法之前，先给出行列式的一些基本性质. 这里首先给出转置行列式的定义.

定义 1.1 将 n 阶行列式 D 的行一次写成相应的列，所得到的新的行列式称为行列式 D 的转置行列式(简称转置)，记为 D^{T}(或 D'). 即，设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

下面给出行列式的基本性质.

性质 1　行列式和它的转置行列式值相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 说明了行列式中行与列地位的对称性. 行列式中，凡是对行成立的命题，对列同样成立. 反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

推论 1　如果行列式中有某两行(列)相同，则此行列式的值等于零.

性质 3　行列式某一行(列)所有元素同时乘以数 k，等于用数 k 乘以这个行列式.

性质 3 说明行列式可以按行和列提出公因数. 例如