小学数学竞赛

辅导与训练

XXSXJSFDYXL

李荫楷　王振群　魏明程　主编

东北师范大学出版社

小学数学竞赛辅导与训练

李荫楷 王振群 魏明程 主编

东北师范大学出版社

（吉）新登字12号

小学数学竞赛辅导与训练

XIAOXUESHUXUEJINGSAIFUDAOYUXUNLIAN

李荫楷　王振群　魏明程　主编

责任编辑：李殿国　　封面设计：秦德健　　责任校对：知　微

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号）　　长春市东方印刷厂制版
（邮政编码：130024）　　长春市东方印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　　1992年10月第1版
印张：10.5　　1992年10月第1次印刷
字数：228千　　印数：00 001—5 000册

ISBN 7-5602-08843/G·382　　定价：6.50元

前　　言

小学数学“奥林匹克”及“华罗庚金杯”邀请赛，已经举办多次了。邀请赛中，幽默而发人深思、灵活而不落俗套的考题，使广大师生耳目一新。它使人们认识到，数学并不像某些“复习必读”和“升学资料”那样枯燥无味。同绚烂多彩的生活一样，千变万化的数学题是那样富有魅力，令人爱不释手，从而坚定了许多青少年学好数学，攀登科学高峰的决心。

摆在我们面前的这本书，就是一本以数学课外活动为内容的书，书中第一部分为青少年朋友提供了知识丰富的十二个专题讲座。同学们可以通过对专题的学习，增长知识，发展智力。当然，既然是课外活动，就没有必要像在校学习数学那样按部就班，一步一格，你可以从任何一节开始，遇到不感兴趣或卡住的地方，可以暂时越过去。读这类书，关键是勤于思考，多作联想和类比，要知道什么叫举一反三。

为了帮助同学们熟悉各讲的思想方法，每讲后面都附有一定数量的习题，并给出参考答案。书中第二部分收集了近几年国内举行的小学生奥林匹克数学竞赛与华罗庚金杯数学竞赛的试题。其参考答案部分是收集的，大部分是编者提供的。

应该指出的是，书中所有习题的答案不一定是最好的，更漂亮的解法有待于同学们给出。

本书由多年从事数学教育的老师精心设计而成，主编李荫楷、王振群、魏明程从书的内容，结构设计到具体的审稿、组编作了大量的具体工作。尽管如此，由于是初次尝试，肯定会有许多不当甚至错误之处，敬请读者批评指正。

编　　者

1992年8月6日于长春

目　　录

第一部分　竞赛辅导

第一部分　竞赛辅导

第一讲　包含与排除

远古时代一个部落的首领派两个勇士去打猎．勇士甲杀死一只豹两头狮，勇士乙猎获二只豹一头狮，其中他们共同猎杀一只豹一头狮．他们各自在自己腰间的绳子上打了三个结（当时人们还不太会数数，打一个猎物便在绳上结一个结），就回去向首领报告了．结果，首领发现猎物只有四只，而他们俩绳上的结加起来却是六个．首领一时糊涂了，弄不清缺少的两只猎物哪里去了．

聪明的同学们，我想你们一定会轻松地告诉那个首领：猎物本来就是四只．只是因为他的两个勇士把共同猎取的猎物各自加在自己的猎物数上，才使得共同猎杀的一豹一狮被加了两次，于是加得的猎物总数比实际的猎物总数多两个．

我们的祖先遇到的这个困难问题对我们来说固然太简单

了，但简单的问题却涉及到一个十分有用的数学原理．这个原理现在称为“包含排除原理”或“容斥原理”，也有人称它为“交叉分类原理”．它在2300年前已被发现了．那么，什么是“包含排除原理”呢？让我们用上面的例子说明它．

很显然，为计算甲、乙两勇士猎获的猎物总数，可以这样来做：先把甲的猎物数 3 与乙的猎物数 3 加起来（“包含”进来），但这样一来，甲、乙共同猎获的猎物数 2 就被加了两次，因此应该把多加的一次减去(“排除”出去)，用式子表示就是：

实际猎物总数＝甲的猎物数＋乙的猎物数－甲与乙共同的猎物数

以上的解释告诉我们：“包含排除原理”是一种借助于“包含”和“排除”交替使用来达到准确计数的方法．通过后面的例子你会更清楚地体会出这句话的意思．

“包含排除原理”在我们的生活中经常应用，下面是在研究数学问题时的两个简单应用．

例 1　从 1 到1000的自然数中，不能被13和31整除的有多少个？

分析　要求出 1 到1000中不能被13和31整除的数有多少个，直接算太麻烦了．但只要能求出 1 到 1000 中能被 13 或 31整除的数有多少个，这个问题就容易解决了．

那么 1 到1000中能被13或31整除的数有多少个呢？我们不妨算一算．

$$\begin{array}{r}
76 \\
13\overline{)1000} \\
\underline{91} \\
90 \\
\underline{78} \\
12
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
32 \\
31\overline{)1000} \\
\underline{93} \\
70 \\
\underline{62} \\
8
\end{array}$$

根据上面两个算式，如果你回答："因为从1到1000的自然数中有76个13，32个31，所以从1到1000的自然数中有$76+32=108$个数能被13或31整除."那么你就犯了和上面的那个部落首领一样的错误！原因是有这样两个数

$$13\times31=403 \qquad 2\times13\times31=806$$

它们既可被13整除，又可被31整除．这就是说，在76个被13整除的数中有这两个数，在32个被31整除的数中也有这两个数，于是在算式

$$76+32=108$$

中这两个数字被统计了两次．显然，多统计的一次应当"排除"掉．因此，从1到1000的自然数中能被13或31整除的数的个数是

$$76+32-2=106$$

因此，不能被13和31整除的数的个数是

$$1000-106=894$$

解略。

例2　边长为3的正方形A与边长为2的正方形B如图1-1放置在桌面上，它们所盖住的面积有多大？

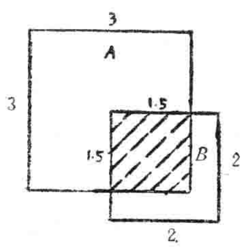

图 1—1

分析　显然，要计算正方形A与正方形B所盖住的面积，可以把两个正方形的面积加起来得到$3^2+2^2=13$.但你稍一细心就会发现：阴影部分的面积被加了两次，因此应该把多加的一次"排除"掉．于是，两个正方形所盖住的面积是

$$3^2+2^2-1.5^2=13-2.25=10.75\text{（平方单位）}$$

解略.

在例2中，如果我们用 $|A|$ 表示正方形A的面积，$|B|$ 表示正方形B的面积，$|AB|$ 表示A与B公共部分的面积，$|A\cup B|$ 表示A与B盖住的总面积，那么就得到计算A和B盖住的总面积的一个公式：

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |AB|$$

其中的A与B可以是平面上任意两个图形.

想一想，能否用公式表示例1中能被13或31整除的数字的总数呢？这当然是可能的. 如果我们用 $|A|$ 表示被13整除的数字的个数，用 $|B|$ 表示被31整除的数字的个数，用 $|AB|$ 表示既被13又被31整除的数字的个数，用 $|A\cup B|$ 表示数13或31整除的数字的总数，那么有

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |AB|$$

显然这个公式对计算所有这类问题都适用.

看，例1和例2的两个问题可用同一个公式计算出来！实际上这个公式就是“包含排除原理”公式. 凡是在计算由两个分量组成的一个总量时，如果设两个分量为 $|A|$ 和 $|B|$，两个分量的公共部分为 $|AB|$ ，由两个分量组成的总量为 $|A\cup B|$ ，那么总有

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |AB|$$

现在，你对于用“包含排除原理”计算由两个分量构成的总量可能以胸有成竹了. 那么，你肯定想试一试，运用这个原理来计算由三个分量组成的总量. 如，请你考虑下面的例子.

例3 某班有语文、数学、美术三个兴趣小组. 参加三个小组的人数依次是14、12和10人，同时参加语文、美术小组的有4人，同时参加语文、数学和数学、美术小组的均各有5人，班上有三名同学三个小组全参加了. 问这个班同学

中至少参加一个兴趣小组的人数是多少?

分析 我们还是用“包含排除原理”来解决这个问题. 首先，把参加语文、数学和美术小组的各组人数都“包含”进来. 如果用 $|A|$、$|B|$、$|C|$ 依次表示参加语文、数学、美术小组的人数，那么三个小组人数之和是

$$|A|+|B|+|C|=14+12+10=36$$

接下来，由于凡是参加两个小组的人数均被加了两次(例如参加语文、美术小组的4人既在 $|A|$ 中，又在 $|B|$ 中)，因此要把多加的一次“排除”掉. 如果用 $|AB|$、$|AC|$、$|BC|$ 依次表示参加语文和数学、语文和美术、数学和美术小组的人数，那么有

$$|AB|+|AC|+|BC|=5+4+5=14$$

于是，这个问题好象有答案，设 $|A \cup B \cup C|$ 为至少参加一个兴趣小组的人数，似乎有

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A|+|B|+|C|-(|AB|\\&\quad+|AC|+|BC|)\\&=36-14=22\end{aligned}$$

但是，如果你是一个细心的同学，就会发现这里面有问题. 问题出现在三个小组都参加的这3人上面. 这三个人在计算 $|A|+|B|+|C|$ 时被加了三次，而后在减去 $|AB|+|AC|+|BC|$ 时又被减去三次(这3人三个小组都参加了，因此这3人既在 $|A|$ 中，又在 $|B|$ 中，同时也在 $|C|$ 中；同理，由于他们同时参加了语文和数学，语文和美术、数学和美术小组，所以这3人既在 $|AB|$ 中，又在 $|AC|$ 中，同时也在 $|BC|$ 中). 这样一来，上面得到的人数中并没有计算这3人. 因此，应当把这3人重新“包含”进来. 如果用 $|ABC|$ 表示三个小组都参加的人数，那

么至少参加一个小组的学生的总数是

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|AB| + |AC| + |BC|) + |ABC| = 36 - 14 + 3 = 25$$

解（略）

例4 如图1-2所示．A、B、C分别代表面积为9、8、11的三个圆，A与B、A与C、B与C公共部分的面积依次为5、4、3、A、B、C三圆公共面积为2．求这三个圆盖住的总面积．

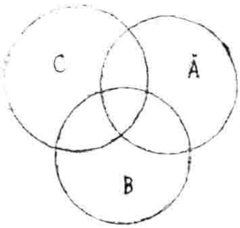

图 1-2

分析 设$|A|$、$|B|$、$|C|$依次为圆A、圆B、圆C的面积，$|AB|$、$|AC|$、$|BC|$依次为A与B公共部分、A与C公共部分、B与C公共部分的面积，$|ABC|$为三圆公共部分的面积，$|A \cup B \cup|$为三圆盖住的总面积．按"包含排除原理"，应先把三圆面积"包含"进来，于是得到面积和为$|A| + |B| + |C|$．然后，由于两圆公共部分的面积都被加了两次（例如A与B公共部分的面积$|AB|$既在$|A|$中，又在$|B|$中），所以应把多加的一次"排除"掉，即减去$|AB| + |AC| + |BC|$．最后，因为三圆公共部分的面积在$|A| + |B| + |C|$中加了三次，在"排除"$|AB| + |AC| + |BC|$时又减了三次，实际上没有计算，所以应再把这个面积$|ABC|$"包含"起来．

解 如分析中所设，根据"包含排除原理"，三圆A、B、C、盖住的总面积为

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|AB| + |AC| + |BC|) + |ABC| = 9 + 8 + 11 - (5 + 4 + 3) + 2 = 28 - 12 + 2 = 18$$

以例3和例4中你已看到，在计算含有公共部分的三个分量组成的总量时，可分三个步骤来计算：

（1）把三个分量加起来（“包含”进来）

（2）由于每两个分量的公共部分都统计两次，因此要把多统计的一次减掉（“排除”出去）.

（3）经过以上两个步骤，三个量的公共部分先“包含”进来，后又“排除”掉了，因此应再加上(重新“包含”进来）.

由此可见：“包含排除原理”是借助于“包含”与“排除”的反复交替使用来达到准确计数的方法.

从以上两个例子中我们还可以得到这样的启示：计算由三个分量组成的总量时，不管涉及的量的实际内容是什么，若用“包含排除原理”考虑问题，它们都有相同的计算公式：

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - (|AB| + |AC| + |BC|) + |ABC|$$

其中 $|ACBUC|$ 表示由三个分量 $|A|$、$|B|$、$|C|$ 构成的总量 $|AB|$、$|AC|$、$|BC|$ 分别表示两个分量 $|A|$ 与 $|B|$、$|A|$与$|C|$、$|B|$与$|C|$的公共部分，$|ABC|$ 表示三个分量 $|A|$、$|B|$、$|C|$ 的公共部分.上面这个公式就是计算由三个分量构成的总量的“包含排除原理”的公式.

在例4中，我们使用“包含排除原理”计算了三个圆A、B、C盖住的总面积，那么能否用三个圆的面积来表示关于三个分量的“包含排除原理”公式呢？这完全可能．如果已知公式右边的各个量，那么你可以画出三个圆A、B、C，设它们的面积依次为 $|A|$、$|B|$、$|C|$，两圆A与B、A与C、B与C的公共部分的面积依次为 $|AB|$、$|AC|$、

|BC| ，三圆公共部分的面积为 |ABC| ，于是三个圆盖住的总面积就是你要求的总量 |AUBUC| ，见图1－3

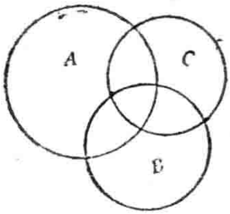

图 1-3

以上这种思考引出的另一种计数方法，这就是用面积来表示的图示分块计数法。

在图1－3中，要计算A、B、C三圆盖住的总面积，显然可以把它分成互不重叠的七块面积来计算，如图1—4所画的那样．在这个图示中，Ⅰ表示三圆公共部分的面积 |ABC| ．Ⅱ表示只是A、B两圆的公共部分的面积，它等于 |AB| － |ABC| ；Ⅲ表示只是A、C、两圆公共部分的面积，它等于 |AC| － |ABC| ；Ⅳ表示只是B、C两圆的公共部分的面积，它等于 |BC| － |ABC| ．Ⅴ表示A不与其它圆重叠部分的面积，它等于 |A| －（Ⅰ＋Ⅱ＋Ⅲ）； 表示B不与其它圆重叠部分的面积，它等于 |B| －（Ⅰ＋Ⅱ＋Ⅳ）；Ⅶ表示C不与其它圆重叠部分的面积，它等于 |C| －（Ⅰ＋Ⅲ＋Ⅳ）．

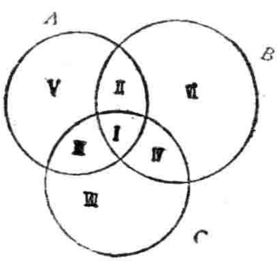

图 1-4

下面用这种方法来解例3

按上面的说明，题中给出的每个数都可以看作是由三个圆A、B、C盖住的总面积中的一块面积．（1）三个小组都参加的3人可以看作是三圆公共部分的面积Ⅰ＝ |ABC| ＝3．（2）同时参加语文、数学小组但不同时参加三个小组的人数看作是仅为A、B两圆公共部分的面积

Ⅱ＝ |AB| － |ABC| ＝5－3＝2

同样可以算出Ⅲ＝4－3＝1，Ⅳ＝5－3＝2。

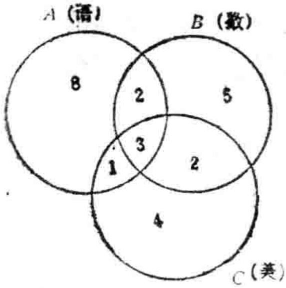

图 1-5

（3）只参加语文小组的人数可看作是圆A不与其它圆重叠部分的面积Ⅴ＝ $|A|$ －（Ⅰ＋Ⅱ＋Ⅲ）＝14－（3＋2＋1）＝8．同理可算出Ⅵ＝ $|B|$ －（Ⅰ＋Ⅱ＋Ⅳ）＝12－（3＋2＋2）＝5，Ⅶ＝ $|C|$ －（Ⅰ＋Ⅲ＋Ⅳ）＝10－（3＋1＋2）＝4．（4）将所得数字填在图中相应的位置上（见图 1-5），并把它们全加起来，就得到三圆盖住的总面积，也就是至少参加一个小组的人数为

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}+\mathrm{VI}+\mathrm{VII} \\
&= 3+2+1+2+8+5+4 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

用图示分块计数法解题具有直观，易懂的优点．但以上面的解题过程中你会看出，它的计算步骤要比用”包含排除原理”公式做时计算步骤多，因此当题目中数字较小时用起来很方便，而当数字偏大时就不如用公式来得简洁．

例 5　某校举办数学竞赛，共有 120 名学生参加．这次竞赛出了甲、乙、丙三道题，竞赛结果如下：12个学生三道题都做对了，做对甲题和乙题的有20人，做对甲题和丙题的有16人，做对乙题和丙题的有28人，做对甲题的有48人，做对乙题的有56人，还有16个学生一个题也没做对，请问做对丙题的学生有多少个？

解　设 $|A|$ 为做对甲题的人数，$|B|$ 为做对乙题的人数，$|C|$ 为做对丙题的人数，$|AB|$ 为做对甲、乙两题的人数，$|AC|$ 为做对甲、丙两题的人数，$|BC|$ 为做对乙、