高等代数

第四版

高等学校教材

北京大学数学系前代数小组　编

王萼芳　石生明　修订

18 世纪，高斯在他的博士论文中公布了代数基本定理的第一个实质性证明。这个定理断言，n 次代数方程恰有 n 个根。它最早由荷兰数学家吉拉德提出，欧拉、拉格朗日等都先后试过，均未给出证明。高斯的证明另辟新径，他将多项式方程的根与复平面上的点对应起来……

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等代数

Gaodeng Daishu

第四版

北京大学数学系前代数小组 编
王萼芳 石生明 修订

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是第四版，基本上保持了第三版的内容，增加了两个附录及一份总习题。增加的两个附录是：代数基本定理的一个比较简单的证明，若尔当标准形的几何理论。后者把过去用近世代数中模论方法的经典证明更新为仅用线性代数知识来完成。

本书主要内容是：多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间、总习题，附录包括关于连加号、整数的可除性理论、代数基本定理的证明、若尔当标准形的几何理论。

本书适合作为高等学校数学类专业高等代数教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/北京大学数学系前代数小组编. --4版. --北京:高等教育出版社,2013.8

ISBN 978-7-04-037910-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①北… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第157220号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 田 玲　封面设计 张申申　版式设计 童 丹
插图绘制 宗小梅　责任校对 刘丽娴　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京宏信印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　本	850mm×1168mm 1/32		
印　张	14.75	版　次	1978年3月第1版
字　数	370千字		2013年8月第4版
购书热线	010-58581118	印　次	2013年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	25.90元

物 料 号　37910-00

第四版前言

本次再版只作了一些修改，并添加了三项内容。加了一份总习题，这些题需要熟悉全书内容后才能完成，其中有些题有一定的难度。作为附录加了代数基本定理的证明和若尔当标准形的几何理论，供有兴趣的读者参考。关于若尔当标准形的存在性，保留了第三版第八章中利用了 λ－矩阵的证明，目前较好的几何证明是在近世代数中利用模的理论给出的。我们在附录中引入 $\mathscr{A}$－矩阵给出了新的证明，仅用到线性代数的知识，并且 $\mathscr{A}$－矩阵也是一个有用的数学概念。

王萼芳　石生明

2013 年 3 月

第三版前言

从本书的前身《高等代数讲义》(1964年由高等教育出版社出版)算起,它已问世近40年了。国内广大读者从它得益,也对它肯定。本书又是从我们的师长段学复教授、聂灵沼教授、丁石孙教授继承下来的,我们感到它有着历史的纪念意义。因此在修订时力求保持它原来的框架和原来的风格。

这次修订有如下几点:

(1) 文字上的推敲,特别是一些名词,如“映上”、“1-1”等均用现代流行的“满射”、“单射”来替代。

(2) 删去广义逆及代数基本概念两部分内容。我们发现两者都不必作为基础课内容。特别是后者,现在数学专业专科也要开设抽象代数或近世代数课程,它就更不必要在基础课中占据课时了。

(3) 增加了矩阵的有理标准形、辛空间两节和附录二“整数的可除性理论”。

增添了若尔当标准形的存在性的一个几何证明。

(4) 用(*)注出了一些选学内容。根据学时和需要,教师可自行决定选择其中哪些内容。

王萼芳　石生明

2003年2月

第二版前言

本书自 1978 年出版以来,有相当多的学校采用它作为高等代数课程的教材,在使用中也发现了其中不少问题和错误,广大读者和教师向我们提了许多宝贵意见。在本书历次重印中,我们曾作了一些勘误。这次的修订,除了一些勘误以外,主要是增加了一些章节(第四章 §7, §8,第七章 §9 和第十章——原来的第十章代数基本概念介绍现在成了第十一章)。我们衷心感谢广大读者和教师对本书的关心,并欢迎继续提出宝贵意见。

本书是北京大学数学系几何与代数教研室代数小组集体教学经验的积累。段学复教授、聂灵沼教授、丁石孙教授、王萼芳教授等早在五十、六十年代就先后多次教授高等代数课程并编写过讲义。1964 年和 1965 年丁石孙教授在此基础上先后执笔编写了《高等代数讲义》和《高等代数简明教程》(高等教育出版社出版)。1977 年我们受在上海召开的理科教材会议的委托,在上述教材的基础上修改而成本书。历年来还有很多同志(他们中的许多人已离开了教研室)参加了习题的建设,因此很多同志对本书作出了贡献。可是本书是由我们编写的,这次也是由我们修订,其中的缺点和疏漏之处是应由我们负责的。

王萼芳　石生明

1987 年 3 月

第一版前言

本书是在我校1964年编的《高等代数讲义》和1966年编的《高等代数简明教程》的基础上，根据1977年在上海召开的理科教材编写大纲讨论会上制订的高等代数教材编写大纲的精神修改而成的。本书分三个部分，即多项式理论，线性代数及群、环、域的概念介绍。因有计算方法的试用教材，方程论的大部分内容和代数中的计算方法内容都略去了。另外考虑到综合大学数学专业和高等师范院校数学专业两方面的需要，所以本书中包含的内容对每个学校不一定都是必要的。还有些内容，如行列式的拉普拉斯展开定理、线性变换的值域和核、线性空间按特征值分解成不变子空间的直和、λ－矩阵和若尔当标准形的理论推导、酉空间介绍是选学内容，不作基本要求。因此在采用本书作为教本时，教师可根据实际情况作适当的取舍。如学生以后有近世代数基础课，第十章群、环、域的基本概念也可不讲。我们力求做到所附的习题大致反映各章的基本要求，至于补充题就只有参考的意义，不在基本要求之内。

本书用了数学归纳法，但是没有讲数学归纳法。这是考虑到，数学归纳法（特别是第二数学归纳法）可以在高等代数中讲，也可以在其他课程中讲，甚至于也可以只简单地提一下而在用的过程中熟悉它。教师可根据情况作适当处理。关于连加号“$\sum$”，我们写了一个附录，供参考。

我们采用符号“▍”表示一个定理或者论断的证明完结。当符号“▍”紧接着一个定理或者论断的叙述之后出现，这就表示它不证自明或者在前面已经证明了。

这几年教育战线受“四人帮”严重破坏，影响了教学活动正常

进行，极大地妨碍了高等代数课教学经验的积累，加之这次修改时间仓促，书中的问题一定不少，我们希望大家在使用的过程中不断提出意见，以便今后写出高质量的教材。

参加教材审查会的同志们对本书提出了不少宝贵意见，我们表示衷心感谢。

北 京 大 学 数 学 系
几何与代数教研室代数小组
1978 年 3 月

目　　录

第一章　多　项　式

§1　数　　域

多项式是代数学中最基本的研究对象之一,它不但与高次方程的讨论有关,而且在进一步学习代数以及其他数学分支时也都会碰到.本章就来介绍一些有关多项式的基本知识.在中学代数中我们学过多项式,现在的讨论可以认为是中学所学知识的加深,并且推广到更一般的情况.

我们知道,数是数学的一个最基本的概念.我们的讨论就从这里开始.在历史上,数的概念经历了一个长期发展的过程,大体上看,是由自然数(本书中自然数不包含零)到整数、有理数,然后是实数,再到复数.这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入.中学数学的学习也基本上反映了这样一个发展过程.回想一下,中学数学中数的含义在不同的阶段实际上是不同的,只是没有明确指出而已.

按照所研究的问题,我们常常需要明确规定所考虑的数的范围.譬如说,在解决一个实际问题中列出了一个二次方程,这个方程有没有解就与未知量所代表的对象有关,也就是与未知量所允许的取值范围有关.又如,任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,限制在整数的范围内,除法不是普遍可以做的,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以做的.因此,在数的不同的范围内同一个问题的回答可能是不同的.我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数,它们显然具有一些不同的性质.当然,它们也有很多共同的性质,在代数中经常是将有

共同性质的对象统一进行讨论.关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**.代数所研究的问题主要涉及数的代数性质,这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的.有时我们还会碰到一些其他的数的范围,为了方便起见,当我们把这些数当作整体来考虑的时候,常称它为一个数的集合,简称数集.有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质.为了在讨论中能够把它们统一起来,我们引入一个一般的概念.

定义 1 设 P 是由一些复数组成的集合,其中包括 0 与 1.如果 P 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是 P 中的数,那么 P 就称为一个**数域**.

显然,全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域.这三个数域我们分别用字母 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 来代表.全体整数组成的集合就不是数域,因为不是任意两个整数的商都是整数.

如果数的集合 P 中任意两个数做某一运算的结果仍在 P 中,我们就说数集 P 对这个运算是**封闭的**.因此,数域的定义也可以说成,如果一个包含 0,1 在内的数集 P 对于加法、减法、乘法与除法(除数不为 0)是封闭的,那么 P 就称为一个数域.

下面来举一些例子.

例 1 所有具有形式

$$a+b\sqrt{2}$$

的数(其中 a,b 是任何有理数)构成一个数域.通常用 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 来表示这个数域.显然,数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 包含 0 与 1,并且它对于加、减法是封闭的.现在证明它对乘、除法也是封闭的.我们知道

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

因为 a,b,c,d 都是有理数,所以 $ac+2bd,ad+bc$ 也是有理数.这就说明乘积 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$ 还在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 内,所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{2}\neq 0$（为什么?），而

$$\begin{aligned}\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}&=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2},\end{aligned}$$

因为 a,b,c,d 是有理数，所以 a^2-2b^2 是非零有理数，$\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}$，$\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}$也是有理数．这就证明了 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$对于除法的封闭性．

例 2 所有可以表成形式

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中 n,m 为任意非负整数，$a_i,b_j(i=0,\cdots,n;j=0,\cdots,m)$是整数．验证留给读者去做．

例 3 所有奇数组成的数集，对于乘法是封闭的，但对于加、减法不是封闭的．$\sqrt{2}$的整倍数的全体成一数集，它对于加、减法是封闭的，但对于乘、除法不封闭．当然，以上这两个数集都不是数域．

最后，我们指出数域的一个重要性质．**所有的数域都包含有理数域作为它的一部分**．事实上，设 P 是一个数域，由定义，P 含有 1．根据 P 对于加法的封闭性，$1+1=2,2+1=3,\cdots,n+1=n+1,\cdots$全在 P 中，换句话说，P 包含全体自然数．又因 0 在 P 中，再由 P 对减法的封闭性，$0-n=-n$ 也在P 中，因而 P 包含全体整数．任何一个有理数都可以表成两个整数的商，由 P 对除法的封闭性即得上述结论．

§2 一元多项式

在对多项式的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域 P 作为基础．设 x 是一个符号（或称文字），我们有

定义 2 设 n 是一非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 全属于数域 P, 称为**系数在数域 P 中的一个一元多项式**, 或者简称为**数域 P 上的一元多项式**.

在多项式(1)中, $a_i x^k$ 称为 k **次项**, a_i 称为 k 次项的**系数**. 以后我们用 $f(x), g(x), \cdots$ 或 $f, g, \cdots$ 来代表多项式.

注意, 我们这儿定义的多项式是符号或文字的形式表达式. 当这符号是未知数时, 它是中学所学代数中的多项式. 看应用需要, 这个符号还可代表其他待定事物. 为了能统一研究未知数和其他待定事物的多项式, 我们才抽象地定义上述形式表达式. 并且还要对它们引入运算来反映各个待定事物所满足的运算规律, 统一研究以得到它们普遍的公共的性质.

定义 3 如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中, 除去系数为零的项外, 同次项的系数全相等, 那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**, 记为

$$f(x) = g(x).$$

系数全为零的多项式称为**零多项式**, 记为 0.

在(1)中, 如果 $a_n \neq 0$, 那么 $a_n x^n$ 称为多项式(1)的**首项**, a_n 称为**首项系数**, n 称为多项式(1)的**次数**. 零多项式是唯一不定义次数的多项式. 多项式 $f(x)$ 的次数记为

$$\partial(f(x))^{①}.$$

在中学所讲的代数中, 两个多项式可以相加、相减、相乘. 例如,

$$(2x^2 - 1) + (x^3 - 2x^2 + x + 2) = x^3 + x + 1,$$

$$\begin{aligned}(2x^2 - 1)(x^2 - x + 1) &= 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x^2 + x - 1 \\ &= 2x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1.\end{aligned}$$

---

① 因为零多项式不定义次数, 所以在用符号 $\partial(f(x))$ 时, 总是假定 $f(x) \neq 0$. 以后就不一一说明了.

我们对形式表达式(1),可类似地引入这些运算,为便于计算和讨论,我们常常用和号来表达多项式.

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$$

是数域 P 上两个多项式.那么可以写成

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,$$
$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j.$$

在表示多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和时,如果 $n\geqslant m$,为了方便起见,在 $g(x)$ 中令 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$.那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和为

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots\\&\quad+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\\&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.\end{aligned}$$

而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积为

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x)&=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}\\&\quad+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,\end{aligned}$$

其中 s 次项的系数是

$$a_sb_0+a_{s-1}b_1+\cdots+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j.$$

所以 $f(x)g(x)$ 可表成

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)x^s.$$

显然,**数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘等运算后,所得结果仍然是数域 P 上的多项式.**