时滞反应扩散方程与上下解方法

王长有 杨治国 著

科学出版社

时滞反应扩散方程与上下解方法

王长有　杨治国　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书详细阐述与时滞反应扩散方程相关的最新研究成果. 针对时滞反应扩散系统, 利用上下解方法、单调迭代方法、不动点理论及泛函微分方程振动性理论, 证明时滞反应扩散方程周期解及概周期解的存在性、唯一性及稳定性理论, 书中还介绍时滞反应扩散方程平衡解的存在稳定性理论、波前解的存在唯一性理论、平衡解的振动性理论、解的动力学行为及奇异摄动理论.

读者对象为理工科院校数学系、应用数学系和其他相关专业的本科生、研究生、教师及有关科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

时滞反应扩散方程与上下解方法/王长有, 杨治国著. —北京: 科学出版社, 2013.12

ISBN 978-7-03-039294-7

Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①王… ②杨… Ⅲ. ①扩散反应方程-研究 Ⅳ. ①O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 296196 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 朱光兰
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2013 年 12 月第一次印刷 印张: 11 3/4
字数: 260 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

过去, 人们在研究人口生态学、化学、物理学等学科中的众多问题时, 总认为所考虑的系统服从这样一个规律, 即系统将来的状态仅由系统当前的状态决定并用相应的模型, 如常微分方程、偏微分方程等加以刻画. 然而, 当人们对世界有更深的了解和对许多自然现象有更深入的分析后发现, 在大量的现实世界中, 系统的状态不仅被系统当前的状态影响, 往往还依赖于系统过去的状态, 甚至在一些现象中, 如果不研究系统过去状态对将来状态的影响, 整个研究就毫无意义. 因此, 在描述系统的时滞反馈和空间迁移之间的相互作用对系统状态的影响时, 科学家提出了一类新型的数学模型——含时滞的反应扩散方程 (组), 利用这类方程, 许多真实自然现象被描述, 并得到完善的解释. 因此, 对这类方程的研究具有重要的理论意义及广泛的应用前景.

时滞反应扩散方程是广泛出现于人口生态学、化学、物理学、通信及计算机等领域中的一类新兴的、重要的数学模型, 它反映了系统的时滞反馈和空间迁移之间相互作用对系统状态的影响, 由于这类方程涉及时间、空间及时间的滞后因素, 本身比较复杂, 对其性质的研究困难, 进展缓慢, 直到 20 世纪 70 年代, 随着常微分方程、偏微分方程、泛函微分方程的理论和方法的日臻完善, 一些著名学者利用这几类模型的研究成果, 借助半群理论、动力系统理论、泛函分析等工具, 从多种角度对这一问题进行了有效的研究, 取得了不少成果, 相关研究逐步得以展开, 关于时滞反应扩散方程的研究成果大量涌现在世界各国的知名学术期刊上. 从 20 世纪 80 年代末起, 在国际数学家大会上均有相关问题研究的 45 分钟报告, 在世界各国有关微分差分方程的学术交流会上, 时滞反应扩散方程 (组) 的研讨均是一个不可缺的课题. 但据作者所知, 目前国内外关于时滞反应扩散方程的专著只有一本: *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*(New York: Springer-Verlag, 1996). 该书是由旅加华人, 原湖南大学教授吴建宏先生独立完成的. 该专著以半群理论、动力系统理论、偏微分方程理论及泛函分析为工具, 研究了半线性偏泛函微分方程的解的定性理论 (包括周期解与概周期解的存在性、平衡解的稳定性与不稳定性、Hopf 分支理论、波前解的存在性) 及在人口生态学、遗传学、控制理论等方面的应用. 由于该专著涉及较广的数学理论, 尤其是半群理论, 因此, 对刚入门的读者很难较快进入该研究领域.

鉴于上述原因, 本书将以偏微分方程理论及泛函分析理论为工具, 重点介绍上

下解方法、单调迭代方法等技巧, 以及关于时滞反应扩散方程 (组) 定性理论的最新研究成果. 全书共分 7 章. 第 1 章简明扼要地介绍时滞反应扩散方程的概念及全书要用到的主要数学理论, 同时给出研究时滞反应扩散方程的上下解方法的有关理论的完整叙述. 第 2 章主要讨论几类时滞反应扩散生态模型的行波解的存在性, 行波解关于小扰动的稳定性、全局稳定性, 行波解的分支及波速的确定等问题. 所用的方法有相平面分析法、Conley 索引方法、渐近分析法 (奇异摄动法) 及相空间投影打靶法. 在第 3 章中, 首先研究一类具连续时滞的三种群互助模型, 利用上下解方法及相应的单调迭代方法, 获得确保该系统存在唯一正常数平衡态及该平衡态是全局渐近稳定的充分条件, 进而对既具连续时滞又具离散时滞的三种群互助模型进行讨论, 得到类似的结果. 在第 4 章中, 首先讨论一类含时滞的抛物型方程组的周期解, 应用上下解方法及相应的单调迭代方法, 证明如果反应项混拟单调且方程存在周期上下解, 则方程一定存在周期拟解, 并且拟解构成的区间是一个吸引子. 对一些具体的方程, 在某些条件下, 周期拟解恰好就是方程的周期解, 并以一个生物学模型说明取得结果的意义. 然后研究一类反应项非单调的时滞反应扩散方程的周期解和概周期解, 通过构造上、下控制函数, 结合上下解方法及算子理论, 获得该系统存在唯一周期解 (或概周期解) 的充分条件, 并证明相应周期边值问题解的稳定性, 最后将所得结果应用到一类具时滞 Belousov-Zhabotinskii 反应的 Noyes-Field 模型的边值问题, 得到该系统存在唯一周期解 (或概周期解) 的充分条件. 在第 5 章中, 首先利用时滞微分不等式相关理论及时滞偏微分方程的上下解方法, 并借助不等式技巧, 研究一类时滞偏生态系统, 获得该系统的任一解都关于其唯一正平衡解振动的充分条件, 并利用 MATLAB7.0 软件对所研究的模型进行数值模拟, 验证所得理论结果的正确性. 然后, 分别介绍具有阶段结构及时滞的两种群捕食与被捕食模型及三种群食物链模型, 利用上下解方法及单调迭代方法获得该系统解的存在性、唯一性, 平衡解的稳定性的充分条件. 在第 6 章中, 首先研究一类具放牧率的三种群竞争反应扩散方程组, 利用上下解方法、Schauder 不动点定理及 Lyapunov 第二稳定性理论获得确保该模型空间齐次概周期解的存在性和稳定性的充分条件, 然后我们又将所得结果推广到 n 种群竞争模型, 最后利用改进的方法研究一类具放牧率的含两个捕食者和一个食饵的三种群扩散捕食模型, 得到相似的结论. 最后一章 (第 7 章) 主要讨论时滞反应扩散方程的奇异摄动理论.

本书是根据作者在攻读硕士及博士学位期间获得的研究成果整理而成的, 为使其具有一定的自封性, 本书引用了国内外一些数学家获得的相关成果, 在此向相关作者表示衷心的感谢! 通过对本书的学习, 能把读者较快地带到时滞反应扩散方程的各种问题的研究前沿.

本书的出版获得了重庆邮电大学出版基金、重庆市自然科学基金 (项目编号:

cstc2012jjA20016)、国家自然科学基金 (项目编号：11101298)、重庆邮电大学数学与应用数学专业提升计划项目及重庆邮电大学工业物联网与网络化控制教育部重点实验室的大力资助, 谨此致谢!

由于作者水平有限, 书中难免有一些疏漏和不当之处, 真诚地希望读者批评指正.

王长有　杨治国

2013 年 8 月

目录

前言

第 1 章 上下解方法的理论基础 ······ 1

1.1 时滞反应扩散方程概述 ······ 1

1.2 Ascoli-Arzelà定理 ······ 1

1.3 几个不动点定理 ······ 3

1.3.1 Banach 压缩映像原理 ······ 3

1.3.2 Brouwer 不动点定理 ······ 5

1.3.3 Schauder 不动点定理 ······ 9

1.4 上下解方法基础 ······ 12

1.4.1 锥理论与半序方法 ······ 12

1.4.2 增算子与上下解方法 ······ 19

1.4.3 抛物型方程的最大值原理 ······ 20

第 2 章 行波解的存在唯一性 ······ 23

2.1 引言 ······ 23

2.2 扩散时滞模型波前解的存在性 ······ 26

2.2.1 Cui-Lawson 扩散时滞模型 ······ 26

2.2.2 时滞竞争 Lotka-Volterra 扩散模型 ······ 31

2.3 时滞反应扩散方程组的行波解 ······ 38

2.3.1 预备知识 ······ 38

2.3.2 主要结果及证明 ······ 41

2.3.3 应用举例 ······ 45

第 3 章 平衡解的存在稳定性 ······ 52

3.1 具连续时滞的三种群互助模型 ······ 52

3.1.1 引言 ······ 52

3.1.2 预备知识 ······ 53

3.1.3 主要结果及证明 ······ 57

3.2 具连续及离散时滞的三种群互助模型 ······ 59

3.2.1 模型介绍 ······ 59

3.2.2 预备知识 ······ 62

3.2.3 正平衡解的渐近稳定性 ······ 67

第 4 章 周期解与概周期解的存在唯一性及稳定性 ······ 70

4.1 时滞反应扩散方程组的周期解的存在唯一性 ······ 70

4.1.1 引言及预备知识 ······ 70
4.1.2 主要结果 ······ 74
4.1.3 应用举例 ······ 75
4.2 非单调时滞反应扩散方程的周期解和概周期解 ······ 77
4.2.1 引言 ······ 77
4.2.2 基本准备 ······ 77
4.2.3 方程情形解的存在唯一性定理 ······ 79
4.2.4 方程组情形解的存在唯一性定理 ······ 82
4.2.5 应用举例 ······ 84
第 5 章 平衡解的振动性及解的动力学行为 ······ 85
5.1 时滞反应扩散方程平衡解的振动性 ······ 85
5.1.1 引言 ······ 85
5.1.2 预备知识 ······ 86
5.1.3 主要结果 ······ 86
5.1.4 应用举例 ······ 89
5.2 具有阶段结构及时滞的捕食与被捕食模型的动力学行为 ······ 92
5.2.1 引言及预备知识 ······ 92
5.2.2 解的存在唯一性 ······ 94
5.2.3 平衡解的局部稳定性 ······ 97
5.2.4 平衡解的全局稳定性 ······ 99
5.3 具有阶段结构及时滞的三种群食物链模型的动力学行为 ······ 105
5.3.1 预备知识 ······ 105
5.3.2 解的存在唯一性 ······ 106
5.3.3 解的渐近行为 ······ 109
第 6 章 具放牧率的多种群反应扩散模型的概周期解 ······ 117
6.1 具放牧率的多种群竞争扩散模型的概周期 ······ 117
6.1.1 引言 ······ 117
6.1.2 模型描述与预备知识 ······ 117
6.1.3 主要结果及证明 ······ 119
6.1.4 n 种群竞争系统描述及预备知识 ······ 127
6.1.5 N 种群竞争系统的主要结果及证明 ······ 129
6.2 具放牧率的三种群捕食–被捕食扩散模型的概周期解 ······ 134
6.2.1 引言 ······ 134
6.2.2 具有放牧率及扩散的捕食模型描述 ······ 134
6.2.3 预备知识 ······ 135

6.2.4 三种群捕食模型的主要结果及证明 …… 136
第 7 章 奇异摄动问题的渐近性态 …… 146
7.1 三种群食物链模型的奇异摄动 …… 146
7.1.1 引言 …… 146
7.1.2 预备知识 …… 147
7.1.3 主要结果 …… 149
7.2 非线性扩散系统的奇摄动问题 …… 151
7.2.1 引言及预备知识 …… 151
7.2.2 主要结果及证明 …… 152
7.3 非线性奇摄动方程组的渐近性态 …… 156
7.3.1 引言及预备知识 …… 156
7.3.2 主要结果及证明 …… 161
参考文献 …… 164
索引 …… 175

第1章　上下解方法的理论基础

1.1　时滞反应扩散方程概述

时滞反应扩散方程是在泛函微分方程和偏微分方程的基础上发展起来的一类新型而重要的数学模型. 在现实世界中, 时间滞后和空间扩散现象都是普遍存在的. 例如：在生物种群模型中, 时间时滞一般表示资源再生时间、成熟周期、哺乳时间和反馈时间等, 而在传染病模型中, 时间时滞一般表示潜伏期等. 当然, 在控制工程等学科中也存在时滞现象. 同时, 像细胞、细菌、化学物质、动物等等, 每个个体通常以随机的方式在走动, 并且它们在空间上的分布并不是均匀的, 这就导致了种群在空间上的扩散过程. 为了综合地描述时间时滞和空间扩散, 使得模型更加符合实际, 自从 20 世纪 70 年代以来, 众多学者从动力系统和半群的观点出发对时滞偏微分方程作了系统的研究. 由于对此类方程的研究非常困难, 所以来自半群理论、动力系统理论、线性和非线性泛函分析、常 (偏) 微分方程以及泛函微分方程中的许多方法、概念和结果都被引入到此类方程的研究当中, 其研究内容涉及解的存在性、唯一性、稳定性、单调性、周期性、振动性、收敛性及行波解等多个方面. 关于这一领域早期的结果 (1995 年以前) 被 Wu 总结在他的专著[1] 中. 特别地, 1996 年, Pao 将偏微分方程中的上下解方法应用到含时滞的偏微分方程中, 研究了这类方程解的存在性、不变性、稳定性和周期解的存在性[2−5]; 2002 年, 李树勇、徐道义与马知恩分别研究了解的渐近行为、解的振动性及稳定域[6−8]. 近年来, 作者对时滞反应扩散方程 (组) 的周期解的存在性、唯一性及稳定性, 对平衡解的振动性、渐近稳定性、稳定域及不变集等问题进行了深入的研究, 取得一些较好成果[9−13]. 此外, 国内许多专家学者对时滞反应扩散方程的行波解、分支理论等相关问题也进行了较广泛的研究, 取得许多优秀成果[14−28]. 然而, 含时滞的偏微分方程的研究, 还有许多问题需要进一步探讨, 例如, 含时滞的反应扩散方程解的振动性、周期解与概周期解的存在性、唯一性与稳定性问题、扩散系数及时滞对稳定性的影响、吸引域估计、时滞反应扩散方程的奇异摄动理论等, 甚至还有许多基本问题才开始研究, 例如, 解的爆破问题、吸引子及其维数估计等.

1.2　Ascoli-Arzelà定理

假设 $F=\{f(t)\}$ 是定义于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的函数族.

定义 1.2.1　若存在 $M \in (0,\infty)$, 对任意的 $f(t) \in F$, 有 $|f(t)| \leqslant M, t \in [\alpha,\beta]$, 则称函数族 F 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致有界的.

定义 1.2.2　若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的 $f(t) \in F$, 当 $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta], |t_1 - t_2| < \delta$ 时, 有 $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$, 则称函数族 F 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是等度连续的.

为了证明 Ascoli-Arzela 定理, 我们先给出 H Heine 和 F. Borel 的有限覆盖定理.

引理 1.2.1[29](Heine-Borel 有限覆盖定理)　假设 X 是度量空间, $A \subset X$ 是紧集, $G \subset X$ 是一族开集, 若 G 覆盖 A, 即 $\bigcup\limits_{K \in G} K \supset A$, 则存在有限个开集 $K_1, \cdots, K_n \in G$ 覆盖 A, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i \supset A$.

定理 1.2.1[30](Ascoli-Arzelà定理)　假设函数族 $F = \{f(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致有界和等度连续的, 则存在函数序列 $\{f_n(t)\} \subset F$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致连续的.

证明　我们使用 G Cantor 的对角线方法来证明.

考虑 $\{r_i | r_i \in [\alpha,\beta] \bigcap \mathbf{Q}, i \in \mathbf{N}\}$. 因为 $\{f(r_1)\}$ 有界, 故由 Bolzano-Weierstrass 定理, 可选取收敛的子序列 $\{f_{n1}(r_1)\}$. 同样, $\{f_{n1}(r_2)\}$ 也是有界的, 再由 Bolzano-Weierstrass 定理又可在其中选取收敛的子序列 $\{f_{n2}(r_2)\}$, 这样继续下去, 我们得到可列个收敛的子序列

$$
\begin{gathered}
f_{11}(r_1), f_{21}(r_1), \cdots, f_{n1}(r_1), \cdots, \\
f_{12}(r_2), f_{22}(r_2), \cdots, f_{n2}(r_2), \cdots, \\
\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

令 $f_n(t) = f_{nn}(t), n \in \mathbf{N}$, 则 $\{f_n(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的.

事实上, 由于 $\{f_n(t)\}$ 的取法, 它在 $[\alpha,\beta] \bigcap \mathbf{Q}$ 上是收敛的. 因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, $r_k \in [\alpha,\beta] \bigcap \mathbf{Q}$, 存在 $N_k = N(\varepsilon, r_k) \in \mathbf{N}$, 当 $l, m > N_k$ 时, 有

$$
|f_l(r_k) - f_m(r_k)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2.1}
$$

又由 $\{f_n(t)\}$ 的等度连续性, 存在 $\delta > 0$, 当 $t, t' \in [\alpha,\beta], |t - t'| < \delta$ 时, 有

$$
|f_n(t) - f_n(t')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2.2}
$$

记 $N(r_i, \delta) = \{t || t - t_i| < \delta\}$. 因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N(r_i, \delta) \supset [\alpha,\beta]$, 由 Heine-Borel 有限覆盖定理, 不妨假设

$$
\bigcup_{i=1}^{n} N(r_i, \delta) \supset [\alpha,\beta],
$$

令 $N = \max\{N_1, \cdots, N_n\}$, 则当 $l, m > N, t \in [\alpha,\beta]$ 时 (不妨设 $t \in N(r_j, \delta)$), 由式 (1.2.1) 和式 (1.2.2), 有

$$|f_l(t)-f_m(t)| \leqslant |f_l(t)-f_l(r_j)|+|f_l(r_j)-f_m(r_j)|+|f_m(r_j)-f_m(t)|<\varepsilon,$$

即 $\{f_n(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的. 定理证完.

注 1.2.1 在 Ascoli-Arzelà 定理的条件下, 若 $t_0 \in [\alpha,\beta]$, f_0 是 $\{f(t_0)\}$ 的极限, 则从 $\{f(t)\}$ 中可选取在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的函数序列 $\{f_n(t)\}$, 它的极限函数 $f^*(t)$, 并且满足 $f^*(t_0)=f_0$.

注 1.2.2 假设 $G=\{g_n(t)\}$ 是定义于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的函数族, 满足 Ascoli-Arzelà 定理的条件, 并且它的所有在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的子序列都有相同的极限函数 $g(t)$. 则 $\{g_n(t)\}$ 本身在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $g(t)$.

定义 1.2.3 假设 M 是 Banach 空间 E 中的子集. 若 M 中任意一个序列$\{x_n\}$都有子序列$\{x_{n_i}\}$, 使得 $x_{n_i} \to x^* \in E, i \to \infty$, 则称 M 是 E 中的相对紧集.

定义 1.2.4 设 E_1, E_2 是 Banach 空间, $D \subset E_1$, 若 A 将 D 中的任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 (相对紧集), 则称 $A: D \to E_2$ 是紧算子.

定理 1.2.1 也可写成下面的形式.

定理 1.2.2[30](Ascoli-Arzelà定理) $A: D \to E_2$ 是紧算子的充要条件是对于 D 中的任何有界集 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\{Ax_{n_k}\}$ 在 E_2 中收敛.

定义 1.2.5 若算子 $A \in C(D, E_2)$, 并且紧, 则称 A 是全连续算子.

1.3 几个不动点定理

1.3.1 Banach 压缩映像原理

1922 年, S Banach 给出了一个既简单又非常有用的压缩映像原理. Banach 压缩映像原理实际上是 Picard 逐次逼近法的抽象表述, 是一个典型的代数型不动点定理. 由它不仅可以判定不动点的存在唯一性, 而且还可以构造一个迭代序列, 逼近不动点到任何精确程度, 在应用数学的几乎各个分支都有着广泛的应用.

定理 1.3.1[30](Banach 压缩映像原理) 假设 D 是 Banach 空间 E 的非空闭子集, $\Gamma: D \to D$ 是压缩算子, 即对任意的 $x, y \in D$, 有

$$|\Gamma x-\Gamma y| \leqslant \alpha\,|x-y|, \quad \alpha \in [0,1).$$

则存在唯一的 $x^* \in D$, 使得 $\Gamma x^*=x^*$, 即 Γ 在 D 内存在唯一的不动点 x^*.

证明 任取 $x_0 \in D$, 作迭代序列 $x_n=\Gamma x_{n-1}$, 则 $\{x_n\} \subset D$.

易知, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 事实上, 我们有

$$|x_2-x_1|=|\Gamma x_1-\Gamma x_0| \leqslant \alpha\,|x_1-x_0|=\alpha\,|\Gamma x_0-x_0|,$$

$$|x_3-x_2|=|\Gamma x_2-\Gamma x_1| \leqslant \alpha\,|x_2-x_1| \leqslant \alpha^2\,|\Gamma x_0-x_0|.$$

一般地, 我们有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant \alpha^n\,|\Gamma x_0-x_0|\,,\quad n\in\mathbf{N}.$$

因此, 对任意的 $P\in\mathbf{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant |x_{n+1}-x_n|+\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}|\\&\leqslant (\alpha^n+\cdots+\alpha^{n+p-1})\,|\Gamma x_0-x_0|\\&=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}|\Gamma x_0-x_0|\\&\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,|\Gamma x_0-x_0|.\end{aligned}$$

故对所有 $p\in\mathbf{Z}^+$ 一致地有 $|x_{n+p}-x_n|\to 0, n\to\infty$. 从而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列.

因为 E 是 Banach 空间, 故存在 $x^*\in E$, 使得 $x_n\to x^*$. 又因为 D 是闭集, 所以 $x^*\in D$.

下证 $\Gamma x^*=x^*$.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}|\Gamma x^*-x^*|&\leqslant |\Gamma x^*-x_n|+|x_n-x^*|\\&=|\Gamma x^*-\Gamma x_{n-1}|+|x_n-x^*|\\&\leqslant \alpha\,|x^*-x_{n-1}|+|x_n-x^*|\to 0,\quad n\to\infty,\end{aligned}$$

所以 $\Gamma x^*=x^*$.

最后证明唯一性.

假设 $\Gamma x^*=x^*,\Gamma y^*=y^*,x^*\neq y^*$, 则由

$$|x^*-y^*|=|\Gamma x^*-\Gamma y^*|\leqslant \alpha\,|x^*-y^*|$$

有 $x^*=y^*$. 矛盾. 定理证完.

有时要求 Γ 是压缩的有些苛刻, 我们不加证明地给出下面定理, 读者可以自行证明.

推论 1.3.1[30]　假设 D 是 Banach 空间 E 的非空闭子集, $T:D\to D$, 存在 $n\in\mathbf{N}$, 使得 T^n 是压缩算子. 则存在唯一的 $x^*\in D$, 使得 $Tx^*=x^*$.

在本小节的最后, 我们再给出 Banach 一致压缩映像原理.

定义 1.3.1　假设 U,V 是 Banach 空间 E 的子集, 算子 $S:U\times V\to E$. 若存在 $\lambda\in[0,1)$, 使得

$$|S(x_2,y)-S(x_1,y)|\leqslant \lambda\,|x_2-x_1|,\quad x_1,x_2\in U,\quad y\in V,$$

则称 S 是一致压缩算子.

定理 1.3.2[30](Banach 一致压缩映像原理)　假设 U 是 Banach 空间 E 的非空子集, $V\subset E$, $\Gamma\in C(U\times V,U)$ 是一致压缩算子. 则 $\Gamma(\cdot,y)$ 在 U 中有唯一的不

动点 $x(y)$, 并且关于 y 是连续的, 进而, 若 U,V 是开集 U^0,V^0 的闭包, $\Gamma(x,y)$ 关于 x,y 有连续的 k 阶导数, 则 $x(y)$ 关于 y 有连续的 k 阶导数.

1.3.2 Brouwer 不动点定理

1909 年, L Brouwer 给出了一个不动点定理[31](其中只证明了 $n=3$ 的情形).

事实上, J Poincare 早在 1886 年就给出过 Brouwer 不动点定理的一个等价形式, P Bohl 于 1904 年又发现了这个定理[32].

历史上有很多种证明 Brouwer 不动点定理的方法. 1910 年, J Hadamard 利用 Kronecker 指数对任意的 n 给出了证明; 1912 年 L Brouwer[33] 又利用简单的逼近方法和度的概念给出了另外一个证明; 利用各种度的概念给出的证明还有 J Alexander 和 G Birkhoff 和 O Kellogg 于 1922 年给出的证明[34,35]. 下面我们介绍文献 [30] 采用 N Dunford 等[36] 给出的方法得到的结果.

引理 1.3.1 假设函数 $f_i\in C^2(U), i=1,\cdots,n, U\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 是开集,记 Jacobi 矩阵 $M=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, D_j 是从 M 中去掉第 $j+1$ 列后所得到方阵 M_j 的行列式, 则有

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial D_j}{\partial x_j}=0.$$

证明 令

$$C_{jk}=\det M_{jk},\quad j\neq k,$$

其中 M_{jk} 是由 M_j 中把 $f_i(x_0,x_1,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,n$ 关于 x_k 求偏导数而得到的矩阵, 因此, M_{jk} 的第 l 行元素是

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_0},\frac{\partial f_l}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_k\partial x_j},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_{j-1}},\frac{\partial f_l}{\partial x_{j+1}},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_n},\quad 0\leqslant k\leqslant j-1 \tag{1.3.1}$$

或

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_0},\frac{\partial f_l}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_{j-1}},\frac{\partial f_l}{\partial x_{j+1}},\cdots,\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_k\partial x_j},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_n},\quad j+1\leqslant k\leqslant n.$$

由行列式的微分法则, 有

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_j}=\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}C_{jk}.$$

因此,

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial D_j}{\partial x_j}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}(-1)^jC_{jk}. \tag{1.3.2}$$

现在比较 C_{jk},C_{kj}, 不妨假设 $k<j$. 此时 M_{jk} 的第 l 行的元素由式 (1.3.1) 给出, 而 M_{kj} 的第 l 行元素由式 (1.3.1) 应该是

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_0},\frac{\partial f_l}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_{k-1}},\frac{\partial f_l}{\partial x_{k+1}},\cdots,\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_j\partial x_k},\cdots,\frac{\partial f_l}{\partial x_n}.$$

将 M_{kj} 中

$$\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_k\partial x_j},$$

所在列向左平移 $j-k-1$ 次, 则有

$$C_{jk}=(-1)^{j-k-1}C_{kj}$$

或

$$(-1)^jC_{jk}=-(-1)^kC_{kj}.$$

上式对 $k>j$ 的情形也成立, 从而

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}(-1)^kC_{jk}=0,$$

故由式 (1.3.2), 引理证完.

引理 1.3.2　假设 $\bar{B}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位闭球, 而 $T\in C^\infty(\bar{B},\bar{B})$. 则存在 $x^*\in\bar{B}$, 使得 $Tx^*=x^*$.

证明　为简单计, 不妨设

$$\bar{B}=\{x|x\in\mathbf{R}^n,|x|\leqslant 1\},\tag{1.3.3}$$

其中取 Euclid 数

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

假设 $x-\Gamma x\neq 0, x\in\bar{B}$. 首先, 对任意的 $x\in\bar{B}$, 由 $|x+a(x-\Gamma x)|=1$ 或

$$|x|^2+2ax^{\mathrm{T}}(x-\Gamma x)+a^2|x-\Gamma x|^2=1\tag{1.3.4}$$

都能确定一个实数 $a(x)$.

事实上, 方程 (1.3.4) 是 a 的二次方程, 其判别式为

$$\Delta=[x^{\mathrm{T}}(x-\Gamma x)]^2+(1+|x|^2)|x-\Gamma x|^2.$$

显然, 当 $|x|<1$ 时, $\varDelta>0$. 当 $|x|=1$ 时, 仍有 $\varDelta>0$. 事实上, 若不然, 则存在 x', 满足 $|x'|=1$, 使得 $\varDelta=0$. 因而

$$x'^{\mathrm{T}}(x'-\varGamma x')=0 \quad \text{或} \quad x'^{\mathrm{T}}\varGamma x'=|x'|^2=1.$$

此时, 由于

$$1=|x'^{\mathrm{T}}\varGamma x'|\leqslant|x'||\varGamma x'|\leqslant|\varGamma x'|\leqslant 1.$$

所以有 $|\varGamma x'|=1$. 故

$$(x'-\varGamma x')(x'-\varGamma x')=0,$$

即 $x'-\varGamma x'=0$. 矛盾. 因此, 当 $x\in\bar{B}$, 有 $\varDelta>0$. 取式 (1.3.4) 两个实根中较大的一个作为 $a(x)$, 即令

$$a(x)=\frac{x^{\mathrm{T}}(x-\varGamma x)+\sqrt{|x^{\mathrm{T}}(x-\varGamma x)|^2+(1-|x|^2)|x-\varGamma x|^2}}{|x-\varGamma x|}.$$

注意到 $x^{\mathrm{T}}(x-\varGamma x)<0$, 故当 $|x|=1$ 时, 有 $a(x)=0$.

现在考虑映像

$$f(t,x)=x+ta(x)(x-\varGamma x), \qquad (t,x)\in\mathbf{R}\times\bar{B}.$$

显然, $f\in C^\infty$, 并且有

$$\frac{\partial f}{\partial t}=a(x)(x-\varGamma x)=0, \quad |x|=1, \tag{1.3.5}$$

$$f(0,x)=x,$$

$$f(1,x)=x+a(x)(x-\varGamma x) \quad \text{或} \quad |f(1,x)|=1.$$

由上式, $f(1,x)$ 的各个分量之间存在一个关系式. 从而

$$\det\left(\frac{\partial f_i(1,x)}{\partial x_j}\right)=0. \tag{1.3.6}$$

又由式 (1.3.5), 有

$$\det\left(\frac{\partial f_i(0,x)}{\partial x_j}\right)=1. \tag{1.3.7}$$

假设

$$F(t)=\int_B\det\left(\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x.$$

由式 (1.3.6), $F(1)=0$. 由式 (1.3.7), $F(0)=k=B$ 的体积 $\neq 0$. 由 $F(t)$ 的定义, 显然它是连续可微的, 并且

$$F'(t)=\int_B\frac{\partial}{\partial t}\det\left(\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x.$$

重新使用引理 1.2.1 中的记号, 把 t 看成是其中的 x_0, 有

$$F'(t)=\int_B \frac{\partial D_0}{\partial x_0}\mathrm{d}x.$$

但由引理 1.3.1, 有

$$\frac{\partial D_0}{\partial x_0}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{\partial D_j}{\partial x_j}=0.$$

因此有

$$F'(t)=-\int_B \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\partial D_j}{\partial x_j}\mathrm{d}x.$$

把上式右端的体积分化为单位球面 $\bar{B}$ 上的面积分, 我们有

$$F'(t)=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\int_{\partial B} D_j x_j \mathrm{d}\sigma.$$

但由式 (1.3.5), 各行列式 $D_j, j\neq 0$ 在 ∂B 上都为零. 所以, $F'(t)=0, t\in[0,1]$. 这与 $F(1)=0, F(0)=k\neq 0$ 矛盾. 引理证完.

引理 1.3.3　若 $K\subset \mathbf{R}^n$ 是有界凸闭集, 并且 $\mathbf{R}^n$ 是包含 K 的最低维的线性空间, 则 K 与任意一个 n 维闭球同胚.

定理 1.3.3 (Brouwer 不动点定理)　假设 $K\subset \mathbf{R}^n$ 是有界凸闭集, $\varGamma\in C(K,K)$. 则存在 $x^*\in K$, 使得 $\varGamma x^*=x^*$.

证明　不失一般性, 假设 $\mathbf{R}^n$ 是包含 K 的最低维的线性空间. 则由引理 1.3.3, K 与 $\mathbf{R}^n$ 中的一个单位闭球 $\bar{B}$ 同胚. 从而存在同胚映像 $f: K\to \bar{B}$. 此时显然有 $F=f\varGamma f^{-1}\in C(\bar{B},\bar{B})$. 往证, 存在 $x^*\in \bar{B}$, 使得 $\mathcal{F}x^*=x^*$. 为此, 我们不妨假设 $\bar{B}$ 同式 (1.3.3). 由于 $f\in C(\bar{B})$, 故由 K Weierstrass 于 1885 年给出的逼近定理, 对任意的 $\delta>0$, 存在 $\mathcal{F}_\delta\in C^\infty(\bar{B},\mathbf{R}^n)$, 使得

$$\sup_{x\in\bar{B}}|\mathcal{F}x-\mathcal{F}_\delta x|\leqslant \delta.$$

因此, 对任意的 $x\in\bar{B}$, 有

$$|\mathcal{F}_\delta x|\leqslant|\mathcal{F}x-\mathcal{F}_\delta x|+|\mathcal{F}x|\leqslant \delta+1,$$

即

$$\left|\frac{\mathcal{F}_\delta x}{\delta+1}\right|\leqslant 1.$$

从而

$$\tilde{\mathcal{F}}_\delta x=\frac{1}{\delta+1}\mathcal{F}_\delta x\in C^\infty(\bar{B},\bar{B}),$$