

非均匀介质电磁成像

曹俊兴 编著

四川科学技术出版社

ISBN 7-5364-4099-5



9 787536 440999 >

ISBN 7-5364-4099-5/O·44

定价: 20.00 元

国家自然科学基金 (49774222, 49894190)、四川省学术和技术带头人
培养基金、教育部高校骨干教师资助计划基金、“油气藏地质及开发工程”
国家重点实验室基金等资助项目

非均匀介质电磁成像

曹俊兴 编著

四川科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

非均匀介质电磁成像/曹俊兴编著.-成都:四川科学技术出版社, 2000.3

ISBN 7-5364-4099-5

I. 非… II. 曹… III. 非均匀介质-电磁-成像 IV.0357.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 15708 号

内 容 简 介

以层析成像为核心的原位无损探测技术是二十世纪最重要的科技成就之一, 电磁成像是其重要的组成部分。电磁成像指由目标体对外加电磁场的响应来重建其内部的电磁参数分布的理论方法及技术。最为复杂的电磁成像问题来源于地球探测领域。本书主要论述非均匀岩石介质的电磁成像理论及方法。全书共分四章, 第一章介绍介质的电磁参数特征与介质中的电磁波与场, 第二章讨论电磁成像的原理与方法, 第三章阐述非均匀介质中电磁波与场的数值计算, 第四章论述电磁成像方程的求解。书末附有典型激励条件下均匀半空间介质表面电磁场分布的解析表达和较为详尽的参考文献。

本书可供从事地球探测、油气勘探开发以及无损探测研究实践的人员参考, 亦可供上述专业方向的研究生和高年级大学生参阅。

非均匀介质电磁成像

编 著 者	曹俊兴
责任编辑	安小望 尧汝英
封面设计	曹京龄
版面设计	阴戈民
责任校对	王 勤
责任出版	周红君
出版发行	四川科学技术出版社 成都盐道街 3 号 邮政编码 610012
开 本	787mm×1092mm 1/16 印张 11.25 字数 274 千
印 刷	西南冶金地质印刷厂
版 次	2000 年 3 月成都第一版
印 次	2000 年 3 月成都第一次印刷
印 数	1-1000 册
定 价	20.00 元
ISBN	7-5364-4099-5/0-44

■ 版权所有·翻印必究 ■

■ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

■ 如需购本书, 请与本社邮购组联系。

地址/成都盐道街 3 号

邮政编码/610012

前 言

以层析成像为核心的原位无损探测技术是二十世纪最重要的科技成就之一，已在人体组织结构成像、工业设备检测、地球物理勘探等领域获得了广泛地应用。电磁成像(EMI: electromagnetic imaging)是原位无损探测技术之一类，包括了从 X-射线断层扫描成像(CT)、核磁共振(NMR)、雷达成像(RI)、合成孔径雷达(SAR)、地质雷达(GPR)到可控源大地电磁(CSAMT)、瞬变电磁(TEM)、阵列大地电磁(EMAP)等众多的方法技术和应用领域。电磁成像以获得目标体内部的电磁参数分布为直接目标，以目标体属性与结构特征的识别为根本目的。最为复杂的电磁成像问题来源于地球探测领域，首先是因为观测数据体不完备且含噪，其次是因为逆散射分析经常需在非均匀背景介质和近-远场条件下进行，同时对场的作用或响应范围以及介质属性也知之不多。本书主要论述地球探测所涉及的电磁成像问题。

电磁成像指由目标体对外加电磁场的响应来重建其内部电磁参数分布的理论方法及技术。典型的工程电磁成像问题的解决包括：①电磁场的激励与响应数据采集→②成像方程的建立→③成像方程的求解→④图像解释等四个必要的步骤。第一个步属工程技术问题，最后一步属具体的应用问题，本书主要讨论带有普遍性的成像方程的建立与求解问题。全书共四章。第一章介绍介质的电磁参数特征与介质中的电磁波与场。目标体的电磁参数差异是电磁成像技术应用的物质基础，介质的电磁参数特征及决定因素是电磁图像解释的理论基础。Maxwell 方程组是宏观电磁运动规律的表述，适用于一切介质中各种形式的电磁波与场的描述，是建立电磁成像方程的理论基础。

第二章讨论电磁成像的基本原理与方法。电磁成像的应用领域很广，可资利用的电磁波谱很宽。不同频段的电磁波在介质中的传播规律及其主要影响因素不同。高频电磁波在介质中的传播路径可以光学射线近似，但低频电磁波在良导介质中则主要以扩散方式传播。电磁成像的数据采集方式多种多样，不同方式下采集的相同或不同观测量需要用不同的物理模型来描述。因此，电磁成像的方法因所使用的频段、观测方式、观测量以及目标参数的不同而异。成像方程的建立就是根据这些具体的特定条件，利用 Maxwell 方程组或其导出方程建立联系观测数据与目标参数的数学物理方程。成像方程大体可分为两类：线性成像方程与非线性成像方程。

第三章讨论非均匀介质中电磁波与场的数值计算问题。非均匀介质的格林函数无解析表达式，波场的计算必须使用数值方法。可资计算非均匀介质中电磁波与场的数值方法较多，本章主要介绍了常用的时域有限差分法(FDTD)和积分方程法(IE)，前者对于复杂介质的模拟较为方便，后者对于参数成像方程的构造较为便利。电磁成像多数属非线性反问题，采用迭代方法求解最大量的计算化在了波场的正演模拟计算上。因此电磁波场的数值计算效率与精度对成像方程求解的效率和精度影响甚大。

第四章讨论电磁成像方程的求解问题。成像方程的求解与建立有所不同，各类成像方程的求解具有许多共同之处。地球探测所涉及的电磁成像方程一般都是病态非适定的，

数据不完备且含噪,解的非唯一性严重,求解时必须施加一定的正则化约束。非均匀介质成像一般都按离散反演问题处理。线性成像方程乃大型矩阵方程,其系数矩阵为离散参数向量的贡献度矩阵,观测数据即已知数据,而未知数据即离散的目标参数。非线性成像问题一般都化作约束最优化问题求解。其解算方法大体可分为两类:逐次线性化迭代求解和全局随机迭代寻优。前者将非矩阵方程逐次线性化,转换为矩阵方程进行求解。此处的矩阵方程以灵敏度(Fréchet 导数)矩阵为系数矩阵,以数据拟合差为已知数据,以模型参数修正向量为未知数据。逐次线性化迭代解法属局部优化方法,解依赖于初值和目标函数的导数(Jacobian 矩阵)。全局随机迭代寻优主要指 Monte Carlo(蒙特卡罗)类方法,包括模拟退火算法和遗传算法。神经网络算法也可视为全局寻优算法,但它应属模式识别之类。直接寻优解法最主要的优点是无须计算 Fréchet 导数。

非均匀介质电磁成像既是具有实用价值的现代探测技术方法,更是富有挑战性的科学研究领域。尽管电磁成像的应用领域在日益拓展,研究文献与日俱增,但仍有很多问题没有或没有很好的解决,而在既有问题得到解决的同时新的问题又在不断涌现。在介质物理模型方面,对各向异性还考虑较少,对非均匀性的离散近似还相当粗略;在反演方面,对病态不适定矩阵方程仍无普适的精确解法,非线性反演的不稳定性 and 多解性问题依然严重;在应用方面,探测深度与精度的矛盾异常突出,对实际问题常显力所不及。需求是科学研究的第一推动力。20 世纪油气勘探的需要推动了地震成像理论方法技术的飞速发展,21 世纪地下水资源探查的需求将极大地推动电磁成像理论方法技术的发展。

电磁成像属应用技术学科,常需集介质中的电磁场理论、反演理论、计算物理、数值计算、数字图像重建与处理等众多学科技术的最新成就于一体。它所涉及的每一个方面都极其博大精深,并几乎都有专门的著述。本书的主要目的在于将电磁成像所涉及各主要方面融合贯通,并不刻求阐述的全面和推证的深入。涉及电磁成像有关问题的文献浩如烟海,据不完全查阅统计,自 1970 年以来的英、俄、中文文献总数当在 4 千篇(部)以上,并仍以每年 300-400 篇(部)的速度在积累。书末所附参考文献虽达 300 篇(部)之多,仍远未能囊括其精华之全部,加之作者才疏学浅,对很多问题的阐述推证难免有错漏谬误之处,诚请读者赐教指正。

本书是在国家自然科学基金(49774222, 49894190)、四川省学术和技术带头人培养基金、教育部高等学校骨干教师资助计划基金、“油气藏地质及开发工程”国家重点实验室基金等资助项目的研究过程中编著而成的。这些项目都还在进行之中,期望能在这些项目完成之后再对非均匀介质的电磁成像问题进行更为全面深入的总结。本书成文过程中作者多位尊敬的师长曾给予指导,许多同事和研究生曾给予帮助和支持,在此一并向给予资助的单位和领导、向多年教育培养我的师长、向所有给予关心和帮助的亲朋好友同事学生以及众多引文的作者表示衷心的感谢!

作者

1999 年 10 月于成都

目 录

前 言

第一章 电磁成像的理论基础	(1)
1.1 介质的电磁参数	(1)
1.1.1 电导率、介常数和磁导率	(1)
1.1.2 波数、衰减常数、相移常数、波阻抗及趋肤深度	(3)
1.2 介质中的电磁波与场	(6)
1.2.1 麦克斯韦方程组	(6)
1.2.2 基本电磁场模型	(7)
1.2.3 格林函数	(9)
1.2.4 惠更斯原理与电磁散射	(11)
1.2.5 物理光学近似与弱散射近似	(14)
1.2.6 电磁波场的反射与透射	(16)
1.2.7 定解条件	(20)
1.2.8 电磁波场的激励	(22)
第二章 电磁成像原理及方法	(30)
2.1 参数成像原理	(30)
2.1.1 射线成像原理	(30)
2.1.2 偏移成像原理	(37)
2.1.3 散射成像原理	(47)
2.2 非均匀介质电磁参数成像方法	(50)
2.2.1 一维反射波场的逆散射与剥层反演	(50)
2.2.2 三维反射波场的迭代偏移成像	(59)
2.2.3 二维透射波场的射线层析成像	(66)
2.2.4 任意非均匀介质的散射成像与比散射成像	(76)
2.2.5 全局积分局部微分域分解成像	(85)
2.2.6 Fréchet 导数计算	(88)
第三章 非均匀介质中电磁波场的数值计算	(95)
3.1 基本方程	(95)
3.1.1 时间空间域方程	(95)
3.1.2 频率波数域方程	(97)
3.1.3 数值解	(98)

3.2	时域有限差分方法(FDTD)	(99)
3.2.1	基本方程	(100)
3.2.2	解的稳定性与数值色散	(104)
3.2.3	吸收边界条件	(105)
3.2.4	FDTD 数值计算步骤	(111)
3.3	积分方程法	(112)
3.3.1	频域积分方程法	(112)
3.3.2	时域积分方程法	(116)
第四章	成像方程解算方法	(123)
4.1	反演问题及解算概论	(123)
4.1.1	反演问题的数学与几何模型	(124)
4.1.2	反演问题的基本数值解算方法	(126)
4.1.3	非线性反问题的线性化	(127)
4.1.4	反演问题的物理准则约束	(128)
4.1.5	不适定问题与正则化	(129)
4.2	线性成像方程 — 矩阵方程解算方法	(131)
4.2.1	矩阵方程的分类	(131)
4.2.2	广义逆解法	(132)
4.2.3	正交投影迭代解法	(138)
4.2.4	代数重建迭代解法	(141)
4.3	非线性成像方程解算方法	(144)
4.3.1	模拟退火	(145)
4.3.2	遗传算法	(146)
4.3.3	神经网络算法	(148)
4.4	成像反演解评价	(150)
4.4.1	连续模型反问题解评价	(150)
4.4.2	线性反问题广义逆解的解评价	(151)
4.4.3	线性反问题迭代解的解评价	(155)
附录:	典型激励条件下均匀半空间介质表面的电磁场分布	(157)
	参考文献	(169)

第一章 电磁成像的理论基础

电磁成像以获得目标体的电磁参数分布为目标,进而根据参数的数值与分布特征对目标体的属性与结构特征做出推断解释。目标体的电磁参数差异是电磁成像技术应用的物质基础,介质的电磁参数特征及决定因素是电磁图像解释的理论基础。

电磁成像以电磁波场在介质中的传播理论为构造成像方程的基础。麦克斯韦方程组是宏观电磁运动规律的表述,适用于一切介质中各种形式的电磁波与场的描述。麦克斯韦方程组有微分和积分两种基本形式,前者对于深刻理解电磁现象的内在机制非常有用,后者对于成像研究比较方便。对于不同的介质条件和场特征,麦克斯韦方程组可有不同的简化导出形式。积分形式麦克斯韦方程组的应用会导致一系列的矢量场边界条件和矢量势与标量势函数边界条件。电磁成像问题多数都可归结为麦克斯韦方程组或其导出方程在特定初边值条件下的解。电磁理论极其博大精深,介质中的电磁波与场问题更是复杂。本章仅限于对电磁成像所必须的基础电磁理论知识的有限概括介绍。

1.1 介质的电磁参数

1.1.1 电导率、介电常数和磁导率

电磁性质是介质最重要的物理性质之一,也是电磁成像方法应用的物质基础。描述介质基本电磁性质的参数有三:电导率 σ 、介电常数 ϵ 和磁导率 μ 。

电导率 σ 是欧姆定律中联系电流与电场矢量的比例因子($\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$),表征介质对电流的传导能力,单位为 S/m 或称 mho(姆欧)。电阻率也是表征介质对电流传导能力的参数,其值为电导率的倒数,单位为 $\Omega\cdot\text{m}$ 。

介电常数 ϵ 是麦克斯韦方程组中联系电场强度和电位移矢量的比例因子($\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$),表征介质的介电性与极化。通常使用相对介电常数 ϵ_r 表征介质的介电性, $\epsilon_r=\epsilon/\epsilon_0$, $\epsilon_0=8.854\times10^{-12}\text{F/m}$ 是自由空间的介电常数。因此,介电常数与电导率不同,即使在不存在任何介质的真空中,它仍有确定的值 ϵ_0 。

磁导率 μ 是麦克斯韦方程组中联系磁场强度与磁感应强度的比例因子($\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$),表征介质的导磁性。电导率和介电常数在一般情况下可视为是同外加场强无关的介质参量,但磁导率则不同,它同外加磁场强度有着复杂的依存关系。与介电常数相类似,通常使用相对磁导率或称导磁系数 μ_r 表征介质的导磁性, $\mu_r=\mu/\mu_0$, $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{H/m}$ 为真空中的磁导率。磁导率在不存在介质的真空中也有确定的值。

对于非磁性介质,影响低频($<10^6\text{Hz}$)电磁波场传播的主要因素是电导率,而影响高频电磁波场传播的主要因素则是介电常数;对于磁性介质,磁导率对电磁波场的传播也有重要影响。

σ, ϵ, μ 所联系的场量均为矢量,从理论上来说它们都应是张量,仅在近似、简化条件

下可视为标量。 σ, ϵ, μ 与空间坐标无关的介质称为均匀介质, 反之, 称为非均匀介质。最简单的非均匀介质是一维分层非均匀介质, 最复杂的非均匀介质是三维任意非均匀介质。介质条件最简单的情况是线性各向同性均匀介质, 最复杂的情况是非线性各向异性有耗非均匀介质。在各向异性有耗非均匀介质中, σ, ϵ, μ 不仅是坐标的函数, 而且是张量, 甚或同时间变量也有关。 σ, ϵ, μ 均具频散特性, 但不同介质、不同参数的频散强度不完全相同。在高频场中, 由于频散等原因, σ, ϵ, μ 均为复数, 只是通过引入适当的定义, 可将这些参数按实数处理, 如将电导率的虚部归入介电常数, 而将介电常数的虚部归入电导率的实部。当然, 也可直接将其作为复数处理。

岩石介质的电磁性质是最为复杂多变的。对岩石介质电磁性质参数影响因素的分析研究不仅涉及到对电磁成像技术运用条件的评价与方法的选择, 而且涉及到电磁图像的物理地质解释和应用。对岩石介质, 最重要的电磁参数是电导率, 其次是介电常数。磁导率只在涉及含磁性矿物的岩石时才加以考虑。

岩石介质的电导率由岩石的化学与矿物组成及其结构构造所决定, 受孔裂隙流体性质及饱和度和所处环境的温度压力等因素的影响。从化学组成上来说, 对岩石电导率影响最大的是铁的含量, 铁的含量越高, 岩石的导电性越好, 电导率越大。从矿物组成上来说, 影响最大的是含铁矿物, 特别是磁铁矿、黄铁矿、磁黄铁矿、黄铜矿等。但不少不含铁的硫化物也具有好的导电性, 如方铅矿、闪锌矿等, 这些矿物的大量存在也会使岩石的电导率显著提高。对于沉积岩, 泥质胶结物、腐殖质以及碳质的含量对岩石的电导率值有重要影响, 这些物质的存在会显著提高岩石介质的导电性, 降低其电阻率。从结构构造上来说, 良导矿物的接触与连通情况, 特别是含水孔裂隙的连通情况, 对岩石导电性的影响很大, 随接触与连通情况的不同, 可使其电导率发生数个数量级的变化。良导矿物与含水孔裂隙的接触及连通情况对以传导电流为观测对象的勘测方法有重要的影响。岩石组成矿物的定向排列是造成其电性呈各向异性的主要因素。岩石孔裂隙流体性质及饱和度对岩石的电导率有很重要的影响, 其程度甚至会超过物质组成的影响。为高矿化度地下水所饱和的岩石, 其电导率往往会较干燥岩石的电导率高 2-3 个数量级。孔裂隙流体性质及饱和度的变化是导致同种或同一岩石的电导率在一个较大范围内变化的主要因素。温度对岩石电导率值的影响在很大程度上也是通过这一机理起作用的。各类岩石的物质组成都具相对的稳定性, 因而其电导率值具有一定的特征性; 同类岩石的不同实体的物质组成又是有差别的, 其孔裂隙流体及饱和度也是变化的, 因而其电导率也是变化的, 有时变化的范围还很大, 可达数个数量级(图 1.1), 但就一确定的勘测区而言, 各种岩石介质的电导率值仍具一定的稳定性, 这是电磁成像方法能运用于地球物理勘查的物质基础。岩石介质的电导率具频散性, 因此使用不同频段的电磁波进行成像时所获得的电导率参数值可能是不同的, 特别是当频差较大时更是如此。

相对于电导率而言, 岩石的介电常数的变化范围很小, 其相对介电常数一般在 4~15 之间。影响岩石介电常数变化的主要因素是其水含量, 因为水的相对介电常数很高, 达 81, 所以, 随含水饱和度的增加, 岩石相对介电常数将会上升。不同岩石介质的介电常数的频散差别较大, 如存在频散, 则总的趋势是随频率的提高而减小。

岩石或矿石的磁导率差异是一类称为磁法勘探的地球物理勘探技术的应用基础，对电磁成像技术的应用也有重要影响。从化学组成上来说，含高价铁(Fe^{+3})较多的岩石具有高的导磁系数；从矿物组成上来说，含铁磁性矿物如磁铁矿、磁黄铁矿等较多的岩石具有高的导磁系数。对绝大多数岩石而言，导磁系数的变化范围很小，相对导磁系数一般可视为 1。

岩石介质的电导率、介电常数、磁导率参数都可具体测定。但在目前技术条件下，在实验室测定的这些参数值不能作为精确实际值使用。其原因在于虽然已能比较接近实际的模拟其自然产出环境的温压条件，但却极难恢复其孔隙流体性状。

岩石介质除具有电导率、介电常数、磁导率所表征的电磁性质(导电性、介电与极化性、导磁性)而外，在外加力场的作用下还会表现出一些特殊的电磁现象，如压电效应与震电效应等。压电效应与震电效应都同外力作用下的机械位移有关，但前者主要同具特定结构(不具对称中心)的晶格变形位移有关，而后者则主要同孔隙流体的位移有关，但表现都是电磁运动与机械运动之间的相互偶合与转换。

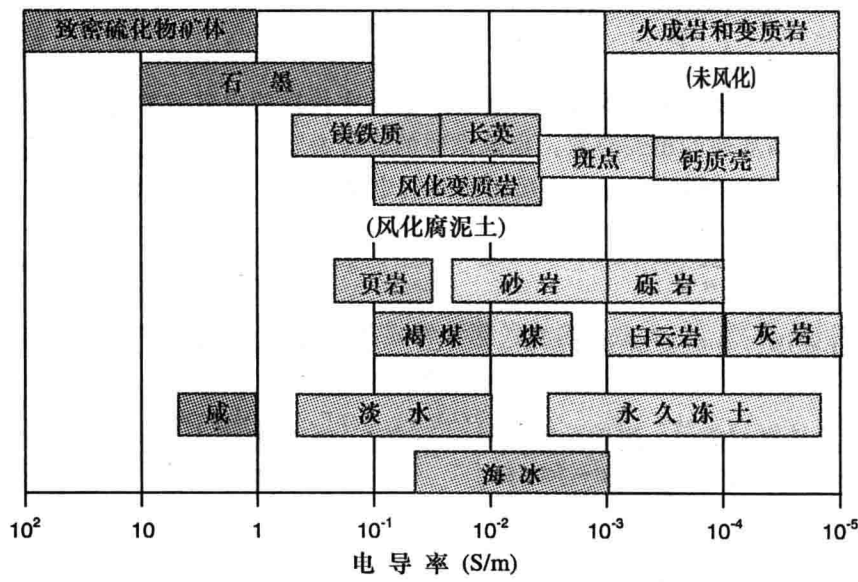


图 1.1 常见地质介质的电导率变化范围(据 G. J. Palacky, 1992)

1.1.2 波数、衰减常数、相移常数、波阻抗及趋肤深度

从表面上看，介质的电导率、介电常数、磁导率参数联系的是不同的场量，彼此相互独立，对电磁场的影响也应彼此孤立。但在实际上，由于电磁运动是相互偶合的，因而这三者之间存在一定的联系和相互影响。介质电导率、介电常数、磁导率对电磁场性状的影响可归并为一个统一的表征参数“波数”。波数不仅同介质的固有电磁性质有关，也同激励场的特征(频率)密切相关。就一般介质(各向异性有耗非均匀)中的一般电磁运动而言，波数的具体表达式十分复杂，甚至是不可求得的。假设介质均匀无限各向同性，且其

基本电磁参数 σ, ϵ, μ 不随时间变化, 对于谐变电磁波场, 可导出如下的波数表达式

$$k^2 = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon) = \epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega. \quad (1.1.2.1)$$

由于极化和频散, 介电常数等基本电磁参数在高频时为复数, 因而波数 k 也为复数。为此, 又可将波数表示成

$$k = \alpha - i\beta. \quad (1.1.2.2)$$

称 α 为相移常数(因子), β 为衰减常数(吸收因子)。相移常数即单位长度上的相移量, 反映电磁波的传播速度, 单位为 rad/m ; 衰减常数表征电磁波场沿传播方向场强的指数衰减, 单位为 Np/m 或 dB/m , $1\text{Np/m} = 8.686\text{dB/m}$ 。相移常数及衰减常数均为介质基本电磁参数与频率的函数, 具体表达式如下(Stratton, 1941)*

$$\alpha = \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/2} + 1 \right\}^{1/2}, \quad (1.1.2.3)$$

$$\beta = \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{1/2}. \quad (1.1.2.4)$$

相移常数及吸收常数表征介质特性对在其中传播的电磁波的影响, 是描述电磁波场在介质中传播规律的重要参数, 也是重要的成像参数。介质中电磁波场的电场量和磁场量之间的关系用波阻抗表征。介质的波阻抗定义为

$$\eta = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2}. \quad (1.1.2.5)$$

在有耗介质中, 介电常数为复数 $\tilde{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega}$, 相应的波阻抗表达式为

$$\eta = \left(\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu}{\epsilon - j\sigma/\omega} \right)^{1/2} = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{-1/4} e^{i \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}, \quad (1.1.2.6)$$

因而有

$$|\tilde{\eta}| = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{-1/4}, \quad 2\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right). \quad (1.1.2.7)$$

介质对电磁波的吸收能力或电磁波在介质中传播时的衰减特性是电磁成像至为关心的问题, 它既是工作频率选择的依据, 也是重要的成像参数之一。相移常数和波阻抗也是重要的反演成像参数。因此, 深刻理解这些参数与介质基本电磁参数和工作频率之间的定量关系是必要的(实际上仅在线极化平面波和线性均匀无界介质及无源条件下才能作到这一点)。

*在一些电磁场理论著述中, 令传播常数 $\gamma^2 = \alpha + i\beta$, 并从其定义 $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$ 出发导出的 α 和 β 的表达式恰好与此处的表达相反, 并称 α 为衰减常数而称 β 为相移常数。

在满足 $\frac{\alpha}{\omega\epsilon} < 10^{-2}$ 的良介质中，有如下近似关系(毕德显，1985)

$$\alpha \approx \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \approx \omega (\mu \epsilon)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \approx \omega (\mu \epsilon)^{1/2},$$

$$\beta \approx \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \approx \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta} \approx \left\{ \mu \left[\epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right) \right]^{-1} \right\}^{1/2} \approx \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \left(1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon} \right).$$

即在此条件下传导电流的影响可以忽略，电磁波在传播过程中没有明显地衰减，波长只与介电常数有关。

①在满足 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} > 10^2$ 的良导体中，有如下近似关系(毕德显，1985)

$$\alpha \approx \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} + 1 \right)^{1/2} \approx \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)^{1/2},$$

$$\beta \approx \left(\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} - 1 \right)^{1/2} \approx \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta} \approx \left(\frac{j \omega \mu}{\sigma} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{\omega \mu}{2 \sigma} \right)^{1/2} (1 + j).$$

即在此条件下位移电流的影响可以忽略，波数与介质的介电常数无关，且具有相等的实部和虚部

②当 $10^{-2} < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 10^2$ 时，位移电流和传导电流两者均不可忽略，场的性质具有渐变过渡的特点。

习惯上，以场强衰减 $1/e$ 时的距离 δ 表征介质的衰减特性，并称其为“趋肤深度”，在良导介质中，有

$$\delta = \left(\frac{2}{\omega \mu \sigma} \right)^{1/2} = 503 \left(\frac{1}{f \sigma} \right)^{1/2}. \quad (1.1.2.8)$$

只有在距离不大于几个趋肤深度的范围内，场才具有可供检测的强度。因此，趋肤深度可作为可探测范围的估计测度。

以上介绍的参数都属实参数。但实际成像反演得到的并不一定都是实参数分布，多数情况下得到的是与实参数和观测方式相关的各种视参数。

1.2 介质中的电磁波与场

1.2.1 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是苏格兰数学家及物理学家 James Clerk Maxwell 在 1864 年提出的描述宏观介质中电磁运动规律的线性微分方程组, 它在电磁学中的地位犹如牛顿运动定律在力学中的地位一样。

麦克斯韦方程的时域微分形式

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (1.2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, \quad (1.2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (1.2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \delta. \quad (1.2.1.4)$$

式中: $\mathbf{h}$ = 磁场强度, 单位为 A/m; $\mathbf{e}$ = 电场强度, 单位为 V/m; $\mathbf{b}$ = 磁感强度或磁通密度, 单位为 Wb/m²; $\mathbf{d}$ = 电感强度或电通密度, 单位为 C/m²; $\mathbf{j}$ = 电流密度, 单位为 A/m²; δ = 电荷密度, 单位为 C/m²。

式(1.2.1.1)是法拉第电磁感应定律, 式(1.2.1.2)是经麦克斯韦修正后(加入位移电流项)的安培定律, 式(1.2.1.3)和式(1.2.1.4)则是磁学与电学中的高斯定律。如果在方程(1.2.1.1)的右端加入磁流源项 $-\mathbf{j}_m$, 在方程(1.2.1.3)的右端加入磁荷源密度 ρ_m , 则可使这组方程具有数学形式上的对称性, 而这又包含了解的对偶性(二像性、二重性)。麦克斯韦方程组的对称性有利于通过类比获得一些边值问题的解(毕得显, 1985; Chew, 1992)。

在静场问题中, $\partial/\partial t = 0$, 电场和磁场值间彼此没有耦合。但磁场不可能完全地与电场去耦, 因为电流是由导体作载体的, 除非是超导体, 它必须依赖电场或电压激励。

旋度算子 $\nabla \times$ 是衡量场的旋转量的尺度。方程(1.2.1.1)和(1.2.1.2)揭示的是电场和磁场的相互激励规律: 时变的磁通密度产生有旋的电场; 电流或时变的电通密度(位移电流)产生有旋的磁场。散度算子 $\nabla \cdot$ 是衡量总通量从某点流出量的尺度, 表征的是通量守恒性, 即若在某点没有源或沟, 通量密度在该点的散度必为零。

微分形式的麦克斯韦方程组适用于描述连续媒质内部的电磁运动现象与规律。

麦克斯韦时域积分形式

将方程(1.2.1.1)和(1.2.1.2)在横截面 A 上积分并应用斯托克斯定理, 将方程(1.2.1.3)和式(1.2.1.4)在体积 V 上积分并应用高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) dv = \int_S \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}.$$

可得如下时域麦克斯韦方程组的积分形式

$$\int_C \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.2.1.5)$$

$$\int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} + \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.2.1.6)$$

$$\int_S \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1.2.1.7)$$

$$\int_V \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_V \delta(\mathbf{r}, t) = Q. \quad (1.2.1.8)$$

式中 Q 是体积 V 中的总电荷。

积分形式的麦克斯韦方程组适用于有场存在的任何区域，

麦克斯韦方程的频域时谐形式

将式 (1.2.1.1) — (1.2.1.4) 对时间作 Fourier 变换，或引用时谐场 $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ 的微分表达式 $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[-i\omega \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$ ，可得如下麦克斯韦方程组的时谐形式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.2.1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (1.2.1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.2.1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (1.2.1.12)$$

应用时谐形式的优点是方程不显含时间和对时间的导数项。时谐形式中的场量均为复相量。

本构方程与连续性方程

本构方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.2.1.13)$$

连续性方程

$$\nabla \cdot (\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}) = 0. \quad (1.2.1.14)$$

麦克斯韦组有四个场矢量，十二个未知数，而独立方程却只有六个。通过状态方程的联系，可使方程的未知数减少六个，从而使其具有严整的数学结构。

本构方程有多种称为，如状态方程、组合关系(Chew, 1992)等，它表征介质的电磁性质特征。当 ε, μ, σ 为空间坐标的函数时，称该介质为非均匀介质；当其为空间坐标和方向的函数时，称该介质为各向异性非均匀介质；当其为频率的函数时，称该介质为频散介质；当其为场的函数时，称该介质为非线性介质。

1.2.2. 基本电磁场模型

波动模型

高频或理想介质中电磁波场的描述模型。

对均匀各向同性无源介质，从微分麦克斯韦组可以导得如下电和磁场量所满足的方

程(称电报方程)

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2.2.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2.2.2)$$

在理想介质($\sigma = 0$)或良介质($\sigma / \omega\epsilon \ll 10^{-2}$)中, 上述两方程中关于时间的一次微分项可以忽略, 并将成为如下的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2.2.3)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.2.2.4)$$

如以磁矢量位与标量位来描述波动模型, 则为:

$$\nabla^2 \mathbf{a} - \mu\tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}, \quad (1.2.2.5)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1.2.2.6)$$

式(1.2.2.5)中的 $\mathbf{a}$ 满足 $\nabla \cdot \mathbf{a} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (洛伦兹条件)。

方程(1.2.2.3)-(1.2.2.6)为波动模型的时域表述, 将其对时间变量作 Fourier 变换(或以 $-\omega^2$ 代换 $\partial^2 / \partial t^2$), 即可得相应的频域方程。

由于电磁成像问题的求解基本上都属初、边值问题, 因此位方程是用的较多, 也较便利的方程形式。

对非均匀各向异性介质, 引入磁流密度 $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, 则频域波动模型可表述为(Chew, 1992):

$$\nabla \times \bar{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla \times \bar{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (1.2.2.7)$$

$$\nabla \times \bar{\epsilon}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \omega^2 \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \nabla \times \bar{\epsilon}^{-1} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (1.2.2.8)$$

式中 $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$ 均为张量, 且为位置的函数, 因此不能和算子 ∇ 交换位置。对非均匀各向同性介质, $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}$ 只是位置的标量函数。

对于时变电磁场, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可相互导出, 因此在上述关于电与磁场量的方程中, 只需电或磁方程之一即可全面描述电磁场。而且由于有 $\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho$ 和 $\nabla \cdot \mu \mathbf{H} = \rho_m$, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的分量也不是彼此线性独立的, 使得一些电磁场问题可仅由 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的六个分量中的两个来描述。

似稳态场模型

随时间变化相当缓慢的电磁场的描述模型。

对满足 $\sigma / \omega\epsilon \gg 10^2$ 的良导介质, 方程(1.2.2.1), (1.2.2.2)中关于时间的二次微分项可以忽略, 并将成为如下的扩散方程

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0, \quad (1.2.2.9)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0. \quad (1.2.2.10)$$

多数地质介质的电磁成像问题所涉及的介质和频率条件都属似稳态场模型的适用范围。通过对工作频率的控制，可以避免出现需使用复杂方程才能描述的困难情况。

静态场模型

与时间无关的场的描述模型。对静态电场，在有源区电位满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.2.2.11)$$

在无源区，电位满足普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1.2.2.12)$$

对静态磁场，定义满足 $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ 的向量磁位函数 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ，在给定库仑规范 $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ 的条件下，有向量形式的泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{a} = -\mu \mathbf{j}. \quad (1.2.2.13)$$

引入标量磁位函数 $\varphi_m(\mathbf{r})$ ，令 $\mathbf{h} = -\nabla \varphi_m$ ，则其满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (1.2.2.14)$$

1.2.3 格林函数

格林函数是点源场方程的解，即点源激励场。任意源分布可视为点源的线性迭加。因此，当点源的场解为已知时，则一般源分布的场解可由迭加原理获得。格林函数一般限指标量波动方程的点源解，矢量波动方程的点源解称为并矢格林函数(dyadic Green function)或张量格林函数(tensor Green function)。格林函数和并矢格林函数是在均匀介质条件下，已知源分布而求场分布的基础，在散射成像的背景场计算中占有重要地位。

对标量波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}), \quad (1.2.3.1)$$

称满足如下方程的函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为格林函数

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.2.3.2)$$

求解(1.2.3.2)式，得到 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 后，即可将(1.2.3.1)式的解表示成

$$\psi(\mathbf{r}) = -\int_V d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') s(\mathbf{r}'). \quad (1.2.3.3)$$

根据互易性原理，有 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ 。

无限均匀介质的格林函数为