



高等学校经济与管理类教材·基础课系列

# 概率与统计 习题与解答

主编◇李继根 副主编◇尧雪莉 苏巨国



华东师范大学出版社



高等学校经济与管理类教材·基础课系列

# 概率与统计

## 习题与解答

主 编◇李继根

副主编◇尧雪莉 苏巨国



华东师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

概率与统计习题与解答/李继根主编. —上海:华东师范大学出版社, 2013. 8

ISBN 978 - 7 - 5675 - 1181 - 1

I. ①概… II. ①李… III. ①概率论—高等学校—题解②数理统计—高等学校—题解 IV. ①O21 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 203716 号

## 概率与统计习题与解答

主 编 李继根  
责任编辑 朱建宝  
审读编辑 李 娜  
封面设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社  
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062  
网 址 [www.ecnupress.com.cn](http://www.ecnupress.com.cn)  
电 话 021 - 60821666 行政传真 021 - 62572105  
客服电话 021 - 62865537 门市(邮购)电话 021 - 62869887  
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口  
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 苏州工业园区美柯乐制版印务有限公司  
开 本 787 × 1092 16 开  
印 张 8.25  
字 数 164 千字  
版 次 2013 年 8 月第一版  
印 次 2013 年 8 月第一次  
书 号 ISBN 978 - 7 - 5675 - 1181 - 1/O · 245  
定 价 20.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021 - 62865537 联系)

# 前 言

本书是与李继根所主编的教材《概率与统计》(华东师范大学出版社 2013 年版)配套的习题详解。

本书完全遵循教材中各章习题的编排顺序,与教材中的习题完全一致。书中每道习题都给出了比较详尽的解答过程,以方便读者理解和掌握求解过程,并通过模仿培养和提高解决问题的能力。考虑到部分读者的数学基础,尤其是在需要使用高等数学知识(特别是凑微分法、分部积分法以及二重积分等重、难点知识)的习题中,本书给出了非常详尽的解答过程,以增强他们学好本课程的信心。

为了使没有配套教材的读者也能独立地使用本书,编者采取了“习题+解答”的编排模式,并在书后附上了主要的概率分布表。

本书可作为高等院校经管和文科学生学习概率论与数理统计课程的参考书,同时,对继续教育本科、专升本的学生也具有参考价值。

本书由李继根主编,副主编为尧雪莉、苏巨国,参与本书编写的人员除主编、副主编外,还有杨晓伟。

书中不当乃至谬误之处,敬请各位方家高手来函批评指正。

编 者

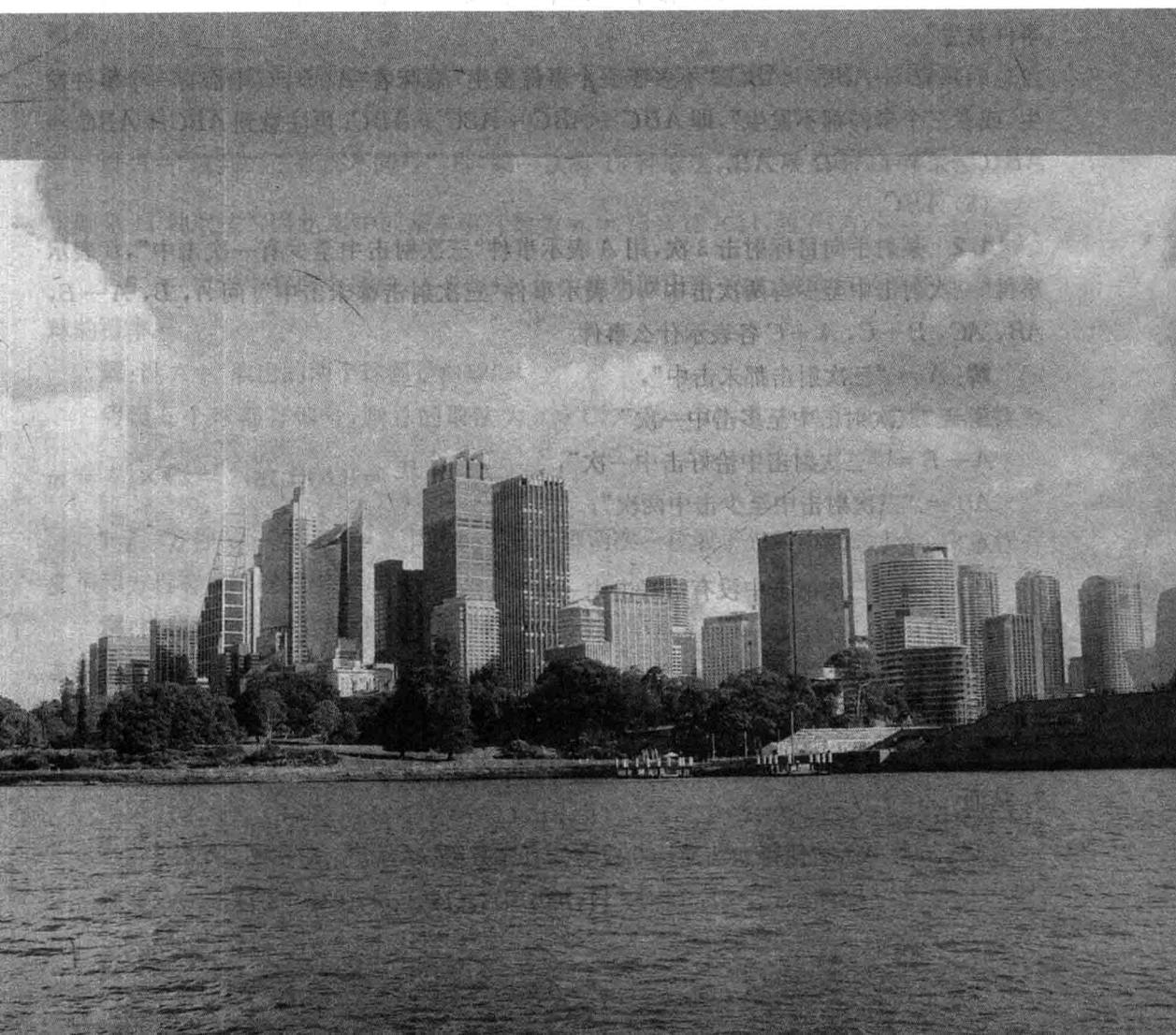
2013 年 6 月

# 目 录

|                 |    |               |     |
|-----------------|----|---------------|-----|
| 第一章 随机事件与概率     | 1  | 第五章 统计量及其分布   | 89  |
| 第二章 离散型随机变量     | 17 | 第六章 参数估计与假设检验 | 101 |
| 第三章 连续型随机变量     | 43 | 附录            | 118 |
| 第四章 大数定理和中心极限定理 | 81 |               |     |

## 第一章

# 随机事件与概率



## 习 题 一

1.1 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 试用  $A, B, C$  表示下列事件:

- (1)  $A, B$  都发生而  $C$  不发生;
- (2)  $A, B, C$  至少有一个发生;
- (3) 恰有两个事件发生;
- (4) 不多于一个事件发生;
- (5) 三个事件都不发生.

解: (1)  $ABC$ .

(2)  $A+B+C$ . “ $A, B, C$  至少有一个发生”的对立事件是“ $A, B, C$  都不发生”, 即  $\overline{ABC}$ , 故由对偶律可知  $\overline{\overline{ABC}} = A+B+C$ .

(3)  $ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C$ . 注意“恰有两个事件发生”等价于“ $A, B, C$  中有且仅有两个事件发生”.

(4)  $\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$ . “不多于一个事件发生”意味着“ $A, B, C$  中恰有一个事件发生, 或者三个事件都不发生”, 即  $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$ . 再注意到  $\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B(C + \overline{C}) = \overline{A}B\Omega = \overline{A}B$ .

(5)  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ .

1.2 某射手向目标射击 3 次, 用  $A$  表示事件“三次射击中至少有一次击中”,  $B$  表示事件“三次射击中至少有两击中”,  $C$  表示事件“三次射击都未击中”. 问  $\overline{A}, \overline{B}, A-B, AB, AC, B+C, A+C$  各表示什么事件.

解:  $\overline{A}$  = “三次射击都未击中”,

$\overline{B}$  = “三次射击中至多击中一次”,

$A-B$  = “三次射击中恰好击中一次”,

$AB$  = “三次射击中至少击中两次”,

$AC = \emptyset$ ,

$B+C$  = “三次射击中没有恰好击中一次”,

$A+C = \Omega$ .

1.3 设  $S$  是不等式  $x^2 - x - 6 \leq 0$  的解集, 整数  $m, n \in S$ . 事件  $A$  表示“使得  $m+n=0$  成立的有序数组  $(m, n)$ ”, 求  $A$  中的基本事件个数.

解:  $S = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ,  $m, n \in S$  且  $m, n$  是整数, 故  $m, n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ . 从而

$$\begin{aligned} A &= \text{“使得 } m+n=0 \text{ 成立的有序数组 } (m, n)\text{”} \\ &= \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)\}, \end{aligned}$$

即  $A$  中的基本事件个数为 5 个.

**1.4\*** 甲、乙、丙三人轮流掷硬币,第一次出现正面朝上者为胜.用 0 表示“正面朝下”,用 1 表示“正面朝上”,因此样本空间可写为:  $\Omega = \{0000\cdots, 1, 01, 001, 0001, \cdots\}$ . 请根据你对样本空间  $\Omega$  的理解,表述以下事件:

(1)  $A$  = “甲胜”;

(2)  $B$  = “乙胜”;

(3)  $\overline{AB}$ .

**解:** 样本空间  $\Omega$  表示的是甲乙丙三人依次投币出现的结果.

(1) “甲胜”即“第一次,第四次,……出现正面朝上”,故  $A = \{1, 0001, 0000001, \cdots\}$ ;

(2) “乙胜”即“第二次,第五次,……出现正面朝上”,  $B = \{01, 00001, 00000001, \cdots\}$ ;

(3)  $\overline{AB}$  即“甲未胜且乙未胜”,也就是“丙胜或平局”,故

$$\overline{AB} = \{000\cdots, 001, 000001, 000000001, \cdots\}.$$

**1.5** 从一副扑克牌的 13 张梅花中,有放回地取 3 次,求取到的三张都不同号的概率.

**解:** 因为是有放回的取球方式,故本题是一个重排列问题,样本空间中基本事件总数为  $n = 13^3$ .

设  $A$  = “取到的三张都不同号”,即“第一次有 13 种取法,第二次只有 12 种取法,第三次则是 11 种取法”,因此  $A$  中的基本事件数为  $m = 13 \times 12 \times 11$ ,故  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{132}{169}$ .

**1.6** 一口袋中有两个白球,三个黑球,从中依次取出两个球,求取出的两个球都是白球的概率.

**解:** 设  $A$  = “取出的两个球都是白球”.

假设 5 个球都有编号,则总的取法为  $n = C_5^1 \times C_4^1 = 20$ ,其中属于  $A$  的取法总数为  $m = C_2^1 \times C_1^1 = 2$ ,故  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10}$ .

**1.7** 方程  $x^2 + bx + c = 0$  中的  $b, c$  是连掷两次一枚骰子先后出现的点数.求方程有实根和方程有重根的概率.

**解:** 由题可知有序点数对  $(b, c) \in \Omega$ ,其中  $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, \cdots, 6\}$ ,显然基本事件总数  $n = 6^2 = 36$ .

设  $A$  = “方程有实根”,  $B$  = “方程有重根”,则

$$A = \{(b, c) \mid b^2 \geq 4c\}$$

$$= \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\},$$

$$B = \{(b, c) \mid b^2 = 4c\} = \{(2, 1), (4, 4)\},$$

$$\text{故 } P(A) = \frac{19}{36}, P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

**1.8** 一批零件共 100 个,其中有次品 10 个.每次从中不放回地取出一个零件,求第一、二次取到的是次品,第三次才取到正品的概率.

**解:**由题可知,总的取法为  $n = C_{100}^1 \times C_{99}^1 \times C_{98}^1 = 100 \times 99 \times 98$ .

设  $A =$ “第一、二次取到的是次品,第三次才取到正品”,则  $A$  的取法为  $n = C_{10}^1 \times C_9^1 \times C_{90}^1 = 10 \times 9 \times 90$ ,因此  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \times 9 \times 90}{100 \times 99 \times 98} = \frac{9}{1078} \approx 0.0083$ .

**1.9** 把 10 本书任意地放在书架上,求其中指定的三本书放在一起的概率.

**解:**设  $A =$ “指定的三本书放在一起”.显然 10 本书总的排列数为  $n = 10!$ .

将指定的三本书看成一本“超级大书”,则这本“超级大书”和剩下的 7 本书的排列数为  $8!$ ,而这本“超级大书”内部的排列数为  $3!$ ,按照乘法原理或分步计数原理,  $A$  的排列数为  $m = 8! \times 3!$ ,因此所求概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8! \times 3!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

**1.10** 从 0~9 这十个数字中任意选出三个不同的数字,求下列事件的概率:

(1) 三个数字中不含有 0 和 5;

(2) 三个数字中不含 0 或 5;

(3) 三个数字中含 0,但不含 5.

**解:**显然从十个数字中任意选出三个不同的数字的组合数为  $n = C_{10}^3$ .

(1) 设  $A =$ “三个数字中不含有 0 和 5”,则  $A =$ “从 1~4 和 6~9 这八个数字中任意选出三个不同的数字”,即  $A$  的组合数为  $m = C_8^3$ ,故  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$ ;

(2) 设  $B =$ “三个数字中不含 0 或 5”,则  $\bar{B} =$ “三个数字中包含 0 和 5”,即  $\bar{B} =$ “从 1~4 和 6~9 这八个数字中任意选出一个数字”,故  $\bar{B}$  的组合数为  $C_8^1$ ,此即  $B$  的组合数为  $C_{10}^3 - C_8^1$ ,故

$$P(B) = \frac{C_{10}^3 - C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{14}{15};$$

(3) 设  $C =$ “三个数字中含 0,但不含 5”,此即  $C =$ “从 1~4 和 6~9 这八个数字中任意选出两个不同的数字”,故  $C$  的组合数为  $C_8^2$ ,从而  $P(C) = \frac{C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{30}$ .

**1.11** 一学生宿舍有 4 名同学,问:

(1) 4 人生日都在星期四的概率是多少?

(2) 4 人生日都不在星期四的概率是多少?

(3) 4 人生日不都在星期四的概率是多少?

**解:**显然本题是一个重排列问题,因此按生日在周几考虑,在 4 名同学的生日构成的样本空间

$$\Omega = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d = 1, 2, \dots, 7\}$$

中,基本事件总数为  $n = 7^4$ .

(1) 设  $A = \text{“4 人生日都在星期四”}$ ,显然  $A = \{(4, 4, 4, 4)\}$ ,基本事件数为  $m = 1$ ,因此  $P(A) = \frac{1}{7^4}$ ;

(2) 设  $B = \text{“4 人生日都不在星期四”}$ ,则  $B = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d = 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ,显然  $B$  中的基本事件数为  $m = 6^4$ ,故  $P(B) = \frac{6^4}{7^4}$ ;

(3) 设  $C = \text{“4 人生日不都在星期四”}$ ,显然  $\bar{C} = \text{“4 人生日都在星期四”} = A$ ,因此

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{7^4}.$$

**1.12** 一个袋中装有 2 个白球和  $n$  个红球,每次从袋中摸出两个球(每次摸球后把这两个球放回袋中).若规定摸出的两个球颜色相同为中奖,否则为不中奖,求一次摸球即中奖的概率.

**解:**摸球的总组合数  $n = C_{n+2}^2$ . 设  $A = \text{“一次摸球即中奖”}$ ,则  $A = \text{“两个球都是白球,或者两个球都是红球”}$ ,因此  $A$  的组合数为  $C_n^2 + C_2^2$ ,从而

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_2^2}{C_{n+2}^2} = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2}.$$

**1.13** 在区间  $(0, 1)$  内随机地取两个数,求它们的积小于  $\frac{1}{4}$  的概率.

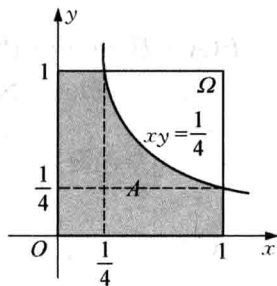
**解:**设这两个数为  $x, y$ . 则  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < 1\}$ ,此即题图中的单位正方形,其面积为  $S_\Omega = 1$ .

设  $A = \text{“两个数的积小于 } \frac{1}{4} \text{”}$ ,则事件  $A$  相当于

$$A = \left\{ (x, y) \mid xy < \frac{1}{4}, 0 < x, y < 1 \right\},$$

也就是题图中的阴影部分,其面积为  $S_A$ . 故

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{S_\Omega - S_D}{S_\Omega} = 1 - S_D = 1 - \iint_D dx dy = 1 - \int_{\frac{1}{4}}^1 dx \int_{\frac{1}{4x}}^1 dy$$



1.13 题图

$$= 1 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(1 - \frac{1}{4x}\right) dx = 1 - \left(x - \frac{1}{4} \ln x\right) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

**1.14** 将长为  $a$  的细棒折成三段, 求这三段能构成三角形的概率.

**解:** 设三段长分别为  $x, y, z$ , 显然  $x + y + z = a$  且  $x > 0, y > 0, z > 0$ , 因此  $z = a - (x + y) > 0$ , 即

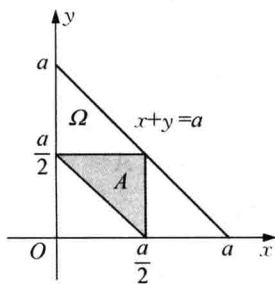
$$\Omega = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < a\},$$

此即题图中的最大三角形, 其面积为  $S_{\Omega} = \frac{1}{2}a^2$ .

设  $A = \{x, y, z \text{ 要构成三角形}\}$ , 显然  $x, y, z$  必须满足三角形边长定理, 即“任意两边之和都要大于第三边”, 注意到  $z = a - (x + y)$ , 故

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \mid x + y > z, y + z > x, z + x > y\} \\ &= \left\{(x, y) \mid x + y > \frac{a}{2}, x < \frac{a}{2}, y < \frac{a}{2}\right\}, \end{aligned}$$

此即题图中的阴影部分, 其面积为  $S_A = \frac{1}{8}a^2$ . 所以所求概率为  $P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{1}{4}$ .



1.14 题图

**1.15** 设  $A, B, C$  为三个随机事件.

(1) 证明推论 1.3.6;

(2) 当  $P(A) = P(B) = P(C) = 0.25, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = 0.125$  时, 求  $A, B, C$  三个事件中至少出现一个的概率.

**解:** (1) 根据加法公式  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 分别将  $A$  和  $B+C, B$  和  $C$  以及  $AB$  和  $AC$  看作加法公式里的  $A$  和  $B$ , 并注意到  $ABAC = ABC$ , 则有

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P(A) + P(B+C) - P(A(B+C)) \\ &= P(A) + P(B+C) - P(AB+AC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABAC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AB) - P(AC) + P(ABC). \end{aligned}$$

(2) 事件“ $A, B, C$  三个事件中至少出现一个”即  $A+B+C$ . 又  $ABC \subset AB$ , 而  $P(AB) = 0$ , 故

$$P(ABC) = P(AB) = 0,$$

从而所求为

$$P(A+B+C) = 0.25 + 0.25 + 0.25 - 0 - 0 - 0.125 + 0 = 0.625.$$

**1.16** 已知  $P(A) = a, P(B) = b, P(AB) = c$ . 求下列概率:

$$(1) P(\bar{A} + \bar{B});$$

$$(2) P(\overline{AB});$$

$$(3) P(\bar{A}B);$$

$$(4) P(\bar{A} + B).$$

**解:** (1) 根据德摩根公式, 有  $\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$ , 因此

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - c;$$

(2) 根据德摩根公式, 有  $\overline{AB} = \overline{A + B}$ , 因此

$$\begin{aligned} P(\overline{AB}) &= P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B) \\ &= 1 - P(A + B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - a - b + c; \end{aligned}$$

(3) 由于  $A - B = A\bar{B} = A - AB$ , 将  $A, B$  对调, 故有  $B - A = \bar{A}B = B - AB$ , 因此由减法公式, 可知

$$P(\bar{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = b - c;$$

(4) 由(3)及加法公式可知

$$P(\bar{A} + B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = 1 - P(A) + b - (b - c) = 1 - a + c.$$

**1.17** 已知  $P(A) = a, P(A - B) = b$ . 求  $P(\bar{A} + \bar{B})$ .

**解:** 根据德摩根公式及减法公式  $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ , 有

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - [P(A) - P(A - B)] = 1 - a + b.$$

**1.18** 已知  $P(A) = 0.8, P(B) = 0.4, P(A | B) = 0.5$ , 求  $P(B | A)$ .

**解:** 根据乘法公式  $P(AB) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$ , 有

$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(A)} = \frac{0.4 \times 0.5}{0.8} = 0.25.$$

**1.19** 用条件概率重解 1.8 题.

**解:** 设  $A_i$  表示“第  $i$  次取到合格品” ( $i = 1, 2, 3$ ), 则“第一、二次取到的是次品, 第三次才取到正品”为  $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ . 由乘法公式可知, 所求为

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2A_3 | \bar{A}_1) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98} = \frac{9}{1078} \approx 0.0083. \end{aligned}$$

**1.20\*** (Polya 罐子模型) 设罐中有  $b$  个黑球、 $r$  个红球, 每次随机取出一个球, 取出后将原球放回, 还加进  $c$  个同色球和  $d$  个异色球. 记  $B_i$  为“第  $i$  次取出的是黑球”,  $R_j$  为“第  $j$  次取出的是红球”.

(1) 如果连续地从罐中取出三个球, 其中有两个红球、一个黑球. 求“取出的三个球中

第  $i$  次取出的是黑球”的概率 ( $i = 1, 2, 3$ );

(2) 当  $c = -1, d = 0$  时此模型即为**不返回抽样模型**; 当  $c > 0, d = 0$  时此模型称为**传染病模型**. 请对这种命名的含义加以解释.

**解:** (1) “取出的三个球中第 2 次取出的是黑球”即  $B_1 R_2 R_3$ , 这说明后两次取到的都是红球. 显然“第 1 次取出的球是黑球”的概率为  $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$ . 按规则加进新球, 则罐中有黑球  $b+c$  个, 红球  $r+d$ , 故“第 2 次取出的球是红球”的概率为  $P(R_2 | B_1) = \frac{r+d}{b+r+c+d}$ . 接着又加进新球后, 罐中有黑球  $b+c+d$  个, 红球  $r+d+c$  个, 故“第 3 次取出的球是红球”的概率为  $P(R_3 | B_1 R_2) = \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}$ . 由乘法公式, 可知

$$\begin{aligned} P(B_1 R_2 R_3) &= P(B_1) P(R_2 | B_1) P(R_3 | B_1 R_2) \\ &= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}. \end{aligned}$$

类似地,

$$P(R_1 B_2 R_3) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b+d}{b+r+c+d} \cdot \frac{r+d+c}{b+r+2c+2d},$$

$$P(R_1 R_2 B_3) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r+c}{b+r+c+d} \cdot \frac{b+2d}{b+r+2c+2d}.$$

(2) 当  $c = -1, d = 0$  时, “第一次取出的球是黑球”的概率为  $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$ , 并且按规则, 罐中剩下黑球  $b-1$  个, 红球  $r$  个; “第一次取出的球是红球”的概率为  $P(R_1) = \frac{r}{b+r}$ , 并且按规则, 罐中剩下黑球  $b$  个, 红球  $r-1$  个. 因此此模型即为**不返回抽样模型**.

当  $c > 0, d = 0$  时, 如果第一次取出的是黑球, 则按规则罐中增加了黑球  $c$  个, 红球仍然是  $r$  个, 说明再次取到黑球的概率增大; 如果第一次取出的是红球, 则罐中增加了红球  $c$  个, 黑球仍然是  $b$  个, 说明再次取到红球的概率仍然增大. 这与传染病类似, 因此此模型被称为**传染病模型**.

**1.21** 已知事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(A) = 0.4, P(\bar{A} + \bar{B}) = 0.8$ , 求  $P(B)$ .

**解:** 注意到事件  $A, B$  相互独立, 故  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 再注意到德摩根公式, 可知

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B),$$

此即  $0.8 = 1 - 0.4P(B)$ , 解得  $P(B) = 0.5$ .

**1.22** 已知事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(A) = 0.42, P(B) = 0.45$ , 求下列概率:

$$(1) P(B | A);$$

$$(2) P(A + B);$$

$$(3) P(\overline{AB});$$

$$(4) P(\overline{A} | \overline{B}).$$

**解:** (1) 因为  $A, B$  相互独立, 故  $A$  是否发生, 对  $B$  没有影响, 从而

$$P(B | A) = P(B) = 0.45.$$

(2) 因为  $A, B$  相互独立, 故  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 于是由加法公式, 可知

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.42 + 0.45 - 0.42 \times 0.45 = 0.681; \end{aligned}$$

(3) 因为  $A, B$  相互独立, 故  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 从而有

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B) = 1 - 0.42 \times 0.45 = 0.811;$$

(4) 因为  $A, B$  相互独立, 故  $B$  是否发生, 对  $A$  没有影响, 因此

$$P(\overline{A} | \overline{B}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.42 = 0.58.$$

**1.23** 已知事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(A) = P(\overline{B}) = a - 1$ ,  $P(A + B) = \frac{7}{9}$ , 求常数  $a$ .

**解:** 显然  $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (a - 1) = 2 - a$ .

因为  $A, B$  相互独立, 故  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 从而由加法公式, 可知

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

此即

$$\frac{7}{9} = (a - 1) + (2 - a) - (a - 1)(2 - a),$$

$$\text{解得 } a = \frac{4}{3} \text{ 或 } a = \frac{5}{3}.$$

**1.24** 甲乙两射手独立地向同一目标各射击 1 次, 其命中率分别为 0.7 和 0.5. 现已知目标被击中, 求该目标被乙击中的概率.

**解:** 设  $A$  表示“甲击中目标”,  $B$  表示“乙击中目标”. 显然  $P(A) = 0.7$ ,  $P(B) = 0.5$ .

设  $C$  表示“目标被击中”, 则  $C = A + B$ , 从而由加法公式, 可知

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.7 + 0.5 - 0.7 \times 0.5 = 0.85, \end{aligned}$$

其中使用了  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 这是由于  $A, B$  互相独立.

事件“已知目标被击中, 则该目标被乙击中”即为  $B|C$ , 因此所求即为

$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{0.5}{0.85} = \frac{10}{17}.$$

**1.25** 3 名译员独立破译一密码, 他们能单独译出的概率分别是  $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ , 求此密码被译出的概率.

**解:** 设  $A_i$  表示“第  $i$  名译员译出此密码” ( $i = 1, 2, 3$ ),  $B$  表示“此密码被译出”. 显然

$$P(A_1) = \frac{1}{5}, P(A_2) = \frac{1}{4}, P(A_3) = \frac{1}{3},$$

注意到  $A_1, A_2, A_3$  互相独立, 则  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$  也互相独立, 因此

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) \\ &= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

**1.26\*** 甲、乙、丙三人轮流掷硬币, 先掷出国徽一面者获胜. 求各人获胜的概率.

**解:** 设  $A_i$  表示“第  $i$  次抛掷掷出国徽一面”, 显然  $P(A_i) = P(\bar{A}_i) = \frac{1}{2}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

事件“甲获胜”=“第  $3k+1$  次抛掷才掷出国徽一面” ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

$$= A_1 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 \bar{A}_6 A_7 + \dots$$

注意到各次抛掷的独立性, 因此甲获胜的概率为

$$\begin{aligned} P\{\text{甲获胜}\} &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4) + \dots \\ &= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{7}, \end{aligned}$$

类似地, 乙获胜的概率为  $\frac{2}{7}$ , 丙获胜的概率为  $\frac{1}{7}$ .

**1.27** 甲、乙、丙三人向同一飞机射击, 设击中的概率分别为 0.4、0.5、0.6. 如果只有一个人击中, 则飞机被击落的概率是 0.2; 如果有两人击中, 则飞机被击落的概率是

0.6;如果三人都击中,则飞机一定被击落.请用全概公式求飞机被击落的概率.

**解:**设  $A_1$  表示“甲击中飞机”,  $A_2$  表示“乙击中飞机”,  $A_3$  表示“丙击中飞机”,则

$$P(A_1) = 0.4, P(A_2) = 0.5, P(A_3) = 0.6.$$

从而  $P(\bar{A}_1) = 0.6, P(\bar{A}_2) = 0.5, P(\bar{A}_3) = 0.4$ .

设  $B_i$  表示“恰有  $i$  人击中飞机” ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), 注意到  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 则

$$P(B_0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = 0.6 \times 0.5 \times 0.4 = 0.12,$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.38, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= P(A_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(A_3) + P(A_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.6 + 0.4 \times 0.5 \times 0.6 = 0.38, \end{aligned}$$

$$P(B_3) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.6 = 0.12,$$

设  $C$  表示“飞机被击落”, 由题可知

$$P(C | B_0) = 0, P(C | B_1) = 0.2, P(C | B_2) = 0.6, P(C | B_3) = 1,$$

由于样本空间被分割为  $\Omega = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$ , 因此由全概公式可知,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(B_0) P(C | B_0) + P(B_1) P(C | B_1) + P(B_2) P(C | B_2) + P(B_3) P(C | B_3) \\ &= 0.12 \times 0 + 0.38 \times 0.2 + 0.38 \times 0.6 + 0.12 \times 1 = 0.424. \end{aligned}$$

**1.28** 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件, 第  $i$  个零件是不合格的概率为  $\frac{1}{i+1}$ . 求 3 个零件中恰有两个合格品的概率 ( $i = 1, 2, 3$ ).

**解:**设  $A_i$  表示“第  $i$  个零件是合格品” ( $i = 1, 2, 3$ ), 则

$$P(\bar{A}_1) = \frac{1}{2}, P(\bar{A}_2) = \frac{1}{3}, P(\bar{A}_3) = \frac{1}{4},$$

$$\text{从而 } P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{2}{3}, P(A_3) = \frac{3}{4}.$$

设  $B$  表示“3 个零件中恰有两个合格品”, 则  $B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$ , 注意到  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ &= P(A_1) P(A_2) P(\bar{A}_3) + P(A_1) P(\bar{A}_2) P(A_3) + P(\bar{A}_1) P(A_2) P(A_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

**1.29** 甲、乙两人进行单打比赛,每局甲胜的概率为 0.6,乙胜的概率为 0.4.假定每次比赛打完所有对局,试分析三局两胜和五局三胜两种比赛制度,哪一种对甲更有利?

**解:**采用三局两胜制时,设  $A$  表示“每局比赛甲胜”,显然  $p = P(A) = 0.6$ ,因此甲的三局比赛构成一个 3 重伯努利试验,其中  $n = 3$ . 设  $B$  表示“甲胜”,则

$$P(B) = P_3(2) + P_3(3) = C_3^2 0.6^2 0.4 + C_3^3 0.6^3 = 0.648 0.$$

采用五局三胜制时,甲的五局比赛构成一个 5 重伯努利试验,其中  $n = 5$ ,  $p = 0.6$ . 仍设  $B$  表示“甲胜”,则

$$P(B) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 0.6^3 0.4^2 + C_5^4 0.6^4 0.4 + C_5^5 0.6^5 = 0.682 6.$$

因此五局三胜制对甲更有利.

**1.30** 设某人打靶,每次命中率为 0.6. 现独立地重复射击 6 次,求他至少命中两次的概率.

**解:**显然此人的 6 次射击构成一个 6 重伯努利试验,其中  $n = 6$ ,  $p = 0.6$ . 因此所求概率为

$$p = \sum_{k=2}^6 P_6(k) = \sum_{k=2}^6 C_6^k 0.6^k 0.4^{6-k} = 0.959 0.$$

**1.31** 在 10 次独立重复试验中,每次试验成功的概率为  $p$ ,求:

- (1) 至少失败一次的概率;
- (2) 直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率.

**解:**这是 10 重伯努利试验,其中  $P(A) = p$ .

(1)  $P\{\text{至少失败一次}\} = 1 - P\{10 \text{ 次试验全部成功}\} = 1 - P_{10}(10) = 1 - p^{10}$ ;

(2) 事件“直到第 10 次试验才取得 4 次成功”意味着“第 10 次试验成功,并且前 9 次试验中成功 3 次”,因此所求概率为

$$p \cdot P_9(3) = p \cdot C_9^3 p^3 (1-p)^6 = C_9^3 p^4 (1-p)^6.$$

**1.32** 某地区有 1% 色盲者,问从该地区选出多少人,才能使得里面至少有 1 位色盲者的概率不小于 0.95?

**解:**设  $A$  表示“在该地区任选一人,是色盲患者”,显然  $p = P(A) = 0.01$ . 再设需选出  $n$  人才能符合要求,则选出  $n$  人就意味着进行了一次  $n$  重伯努利试验.

设  $B = \text{“选出的 } n \text{ 人中,至少有 1 位色盲者”}$ ,则  $\bar{B} = \text{“选出的 } n \text{ 人都不是色盲者”}$ ,因此

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.99^n \geq 0.95,$$