应用型本科"十二五"重点规划教材

简明概率论与数理统计

（第2版）

李永艳 主 编
修 春 安玉冉 王宝丽 副主编

北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

应用型本科"十二五"重点规划教材

简明概率论与数理统计

（第 2 版）

李永艳　主　编

修　春　安玉冉　王宝丽　副主编

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书主要特色是简单明了，循序渐进，易读易学，且能够启发和培养学生的自学能力。全书由随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量及抽样分布、参数估计、假设检验共8章内容组成。书中每章末配有本章小结，以及章、节两组习题和参考答案。

本书适合作为应用型本科院校工科类、经济管理类专业教材，也可以作为一般高等院校的教学参考书，并可供考研学生参考。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

简明概率论与数理统计/李永艳主编. —2版. —北京：北京交通大学出版社，2013.8
（应用型本科“十二五”重点规划教材）
ISBN 978-7-5121-1569-9

Ⅰ.①简… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第186633号

责任编辑：郭海云　郝建芳　　特邀编辑：李　俊
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京交大印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：12　字数：269千字
版　　次：2013年8月第2版　2013年8月第2次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5121-1569-9/O·122
印　　数：1～2 500册　定价：26.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

应用型本科“十二五”重点规划教材·数学类

编　委　会

总　编　施久玉

编　委　(以姓氏笔画为序)

王其元	王宝丽	尹宗明	朱丽娜
安玉冉	李永艳	杨　冰	杨慧贤
肖金桐	张　坤	张　莹	张　波
张兰云	陈丙振	孟庆才	修　春
董立伟	温晓楠	翟文娟	

第 2 版前言

为适应学生自主学习，《简明概率论与数理统计》第 2 版在第 1 版基础上进行了幅度较大的修改，在结构及内容上作了调整，文字叙述进行了细化，例题演算过程更详细。习题配备上也作了调整，增添了基础练习题，删减了繁杂计算题及证明题。

编者

2013 年 6 月于北京交通大学海滨学院

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 版前言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科，是工科院校诸多专业的一门重要基础课。为了适应应用型本科学生的水平和教学要求，按国家对工科类本科数学教学的基本要求及研究生入学考试大纲编写了《简明概率论与数理统计》这本书。在选材和叙述上力求简明、扼要、够用。

全书主要由概率论基础知识（第 1 章至第 5 章）和数理统计初步（第 6 章至第 8 章）两部分组成。每节后的习题供基本练习用，每章后的习题中有少部分题目可供选做提高，以备考研使用。

参加本书编写工作的有修春（第 1、5 章），李永艳（第 2、3 章），安玉冉（第 4 章），王宝丽（第 6、7 章），王其元（第 8 章），最后由王其元统稿。

北京交通大学海滨学院的领导，对本书的编写始终给予关心和帮助，谨此致谢。

最后，我们特别感谢北京交通大学出版社的领导和编辑，由于他们的支持和出色工作，本书才能顺利出版。

由于编者水平有限，书中可能存在不当和错误之处，恳请读者批评指正。

编者

2012 年 6 月于北京交通大学海滨学院

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会生活中普遍存在着以下两类现象．一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象．例如，向上抛一块石子必然下落、同性电荷相互排斥，等等．另一类是随机现象，即在同样条件下进行一系列重复试验或观测，每次出现的结果并不完全一样，并且在每次试验或观察前无法预料确切的结果，其结果呈现出不确定性．例如，在相同的条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前不能预测弹着点的确切位置，等等．

人们经过长期实践及深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观察结果来说，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性．例如，掷一枚硬币，如果硬币是匀称的，当抛掷次数少时，正面、反面的次数没有明显的规律性，但随着抛掷次数的增加不难发现，正面和反面的次数的比值接近 1：1．又例如在射击中，当射击次数少时，靶上命中点是杂乱无章的，没有什么明显的规律性；可是当射击次数增加时，靶上命中点的分布就呈现出了规律性，射击次数越多，规律性越明显．这说明个别随机现象虽然是无规律的，但大量性质相同的随机现象总存在着某种统计规律性，这就是人们常说的“偶然的背后一定隐藏着某种必然性”．概率论与数理统计就是一门从数量方面研究随机现象客观规律性的学科．到了 20 世纪 30 年代，通过俄国数学家柯尔莫哥洛夫在概率论发展史上的杰出贡献，概率论成为一门严谨的数学分支．近代又出现了理论概率及应用概率的分支，概率论被广泛地应用到了不同范畴和不同学科．

概率论的特点就是根据问题先提出数学模型，然后去研究它的性质、特征和规律性；数理统计则是以概率论的理论为基础，利用对随机现象观察和试验所取得的数据资料来研究数学模型．

概率论与数理统计的理论和方法的应用范围越来越广泛，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济各部门，如自动控制、通信工程、土木工程、机电工程、管理工程、金融工程，等等．另外，概率论正在向其他学科渗透并且产生了许多边缘性应用学科，如信息论、计量经济学等．正如一位著名作家所表述的：“概率论和统计学转变了我们关于自然、心智和社会的看法，这些转变是意义深远而且范围广阔的，既改变着权力的结构，也改变着知识的结构，这些转变使现代科学成形．”

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机试验

在大学学习中经常遇到各种试验（如物理实验、力学实验），在这里，试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也被认为是一种试验. 通常用字母 E 表示. 下面举一些试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 及反面 T 出现的情况.

E_2：记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数.

E_3：在一批灯泡中任意取一只，测试它的寿命.

上面举了 3 个例子，它们有着共同的特点. 例如，试验 E_1 有两种可能结果，出现 H 或者出现 T，但是在抛掷之前不能确定试验的结果是出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复进行. 又例如试验 E_3，灯泡的寿命 $t\geqslant 0$，但在试验之前不能确定它的寿命有多长，这一试验也可以在相同条件下重复进行.

概括起来，上述试验具有下列特点.

(1) 可重复性. 试验可以在相同的条件下重复地进行.

(2) 可观察性. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 不确定性. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，一般称具有上述 3 个特点的试验为随机试验（Random experiment），简称为试验，通常是通过研究随机试验来研究随机现象的.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是明确的. 通常把随机试验 E 的每一种可能的结果称为一个样本点（Sampling point），记为 ω，它们的全体称为样本空间（Sampling Space），记为 $\Omega=\Omega(\omega)$. 例如：

试验 E_1 的样本空间由两个样本点组成，样本空间为

$$\Omega_1=\{\mathrm{H},\ \mathrm{T}\}$$

试验 E_2 的样本空间由可列个样本点组成，样本空间为

$$\Omega_2=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

试验 E_3 的样本空间为

$$\Omega_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$$

注意 样本空间的样本点可以是有限个，也可以是无穷多个；样本空间中的样本点可以是数，也可以不是数. 样本空间的样本点取决于试验目的，也就是说，试验的目的不同，决

定了样本空间中的样本点的不同.

又例如，E_4：将一枚硬币抛掷 3 次，观察正面 H 及反面 T 出现的情况.

$$\Omega_4=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

再例如 E_5：将一枚硬币抛掷 3 次，观察正面出现的次数.

$$\Omega_5=\{0, 1, 2, 3\}$$

但是，无论怎样构造样本空间，作为样本空间中的样本点，必须具备以下两条基本属性.

(1) 互斥性．无论哪两个样本点都不会在同一次试验中出现.

(2) 完备性．每次试验一定会出现某个样本点.

1.1.3　随机事件

在随机试验中，人们通常关心的是那些可能发生也可能不发生的事情，即满足某种条件的那些样本点所组成的集合．例如，若规定灯泡寿命小于 2 500 小时为不合格品，则在 1.1.1 节中 E_3，人们更关心的是灯泡的寿命不小于 2 500 小时，满足这个条件的样本点组成样本空间 Ω_3 的一个子集 A，即 $A=\{\omega \mid \omega\geqslant 2\,500\}$，这里称 A 为试验 E_3 的一个随机事件．试验 E 的样本空间 Ω 的子集被称为 E 的随机事件（Random event)，简称为事件．事件是概率论中最基本的概念，常用大写字母 A、B、C 等表示．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点 ω 出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件．例如，

试验 E_1 有两个基本事件：$\{H\}$，$\{T\}$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件．空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

例如，在抛掷骰子的试验中，样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．于是

事件 A："点数为偶数"可表示为 $A=\{2, 4, 6\}$；

事件 B："点数小于 7"$=\Omega$；

事件 C："点数为 8"$=\varnothing$；

事件 D："点数为 3"为基本事件.

显然必然事件和不可能事件都是确定性事件，为讨论方便，今后将它们看作是两个特殊的随机事件来处理.

1.1.4　事件间的关系和事件的运算

事件是样本空间的某一个子集合，而且样本空间中可以定义若干个事件，因此分析事件

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

之间的关系不但有助于深刻地认识事件的本质，而且可以简化一些复杂事件的概率计算. 既然事件是一个集合，那么可以借助于集合论中集合之间的关系及集合的运算来研究事件间的关系和运算，下面给出这些关系和运算在概率论中的名称和含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，A，B，C，$A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 Ω 的子集.

(1) $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的子事件. 其含义：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2) $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3) 事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的和事件. 其含义是：事件 A，B 至少有一个发生.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 至少有一个发生表示为和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列无穷多个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的和事件，表示“可列无穷多个事件 A_i 至少有一个发生”.

(4) 事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件（或交）. 其含义是：事件 A，B 同时发生. $A\cap B$ 也记为 AB.

类似地，n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 同时发生表示为积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列无穷多个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的积事件，表示“可列无穷多个事件 A_i 同时发生”.

(5) 事件 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的差事件. 其含义是：事件 A 发生且事件 B 不发生.

例如，在投掷骰子的试验中，记事件

A：“点数为奇数”，B：“点数小于 5”.

则

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\};\quad A\cap B=\{1, 3\};\quad A-B=\{5\}$$

(6) 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或称为互斥. 其含义是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

例如，基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 其含义是：对每次试验而言，事件 A，B 中必有一个发生且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=B$ 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

注意：对立事件必是互不相容（互斥）的，但互不相容的两个事件不一定是对立事件.

事件间的关系和运算可用文氏图表示，如图 1-1 所示.

易见，事件的运算满足以下基本关系.

(1) $A\overline{A}=\varnothing$；$A\cup\overline{A}=\Omega$；$\overline{A}=\Omega-A$.

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$.

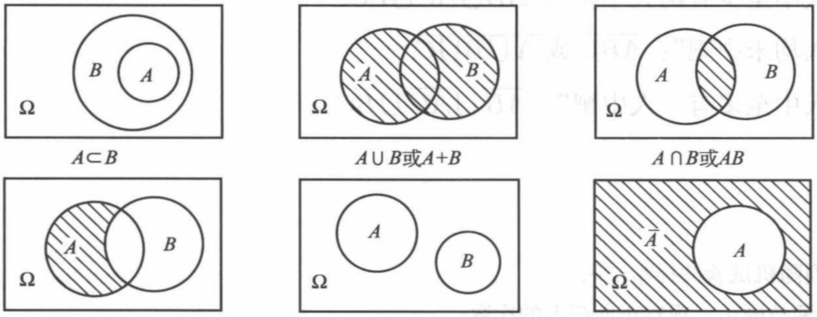

图 1－1

(3) $A-B=A\bar{B}=A-AB$；$A\cup B=A\cup(B-A)$.

1.1.5　事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律. 设 A，B，C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 自反律：$\bar{\bar{A}}=A$；

(5) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

注意　上述各运算可推广到有限个或可列个事件的情形.

例　甲、乙、丙三人各射一次靶，记 $A=\{$甲中靶$\}$，$B=\{$乙中靶$\}$，$C=\{$丙中靶$\}$，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件.

(1)"甲未中靶"：$\bar{A}$.

(2)"甲中靶而乙未中靶"：$A\bar{B}$ 或 $A-B$.

(3)"三人中恰有一人中靶"：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(4)"三人中至少有一人中靶"：$A\cup B\cup C$.

(5)"三人中至少有一人未中靶"：$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

(6)"三人中恰有两人中靶"：$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

(7)“三人中至少有两人中靶”：$AB\cup AC\cup BC$.

(8)“三人均未中靶”：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$.

(9)“三人中至多有一人中靶”：$\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}$.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时抛两枚硬币，观察正面朝上的次数；

(2) 同时掷两枚骰子，观察两枚骰子出现的点数之和；

(3) 生产产品直到得到 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 在某十字路口，1 h 内通过的机动车辆数.

2. 设 A，B，C 为 3 个随机事件，试用 A，B，C 的运算表示下列事件.

(1) A，B 都发生而 C 不发生；

(2) A，B 至少有一个发生而 C 不发生；

(3) A，B，C 都发生或都不发生；

(4) A，B，C 不多于一个发生；

(5) A，B，C 不多于两个发生；

(6) A，B，C 恰有两个发生；

(7) A，B，C 至少有两个发生.

3. 下列各式哪个成立？哪个不成立？

(1) 若 $A\subset B$，则$\overline{B}\subset\overline{A}$；　　(2) $(A\cup B)-B=A$；　　(3) $A(B-C)=AB-AC$.

4. 设 A，B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系.

5. 设 Ω 为随机试验的样本空间，A，B 为随机事件，且 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$. 试求：$A\cup B$，$AB$，$B-A$，$\overline{A}$.

6. 已知随机事件 A 和事件 B 是对立事件，求证：$\overline{A}$和 $\overline{B}$ 也是对立事件.

1.2　随机事件的频率与概率

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，更希望找到一个数，用它来衡量一个事件发生的可能性的大小. 例如，为了确定保险费，保险公司希望知道某些意外事故发生的可能性大小. 这时希望找到一个合适的数来描述事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 频率

定义 1　若在相同的条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，则称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**（Frequency）.

由频率的定义可得到它有以下基本性质.

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

(2) $f_n(\Omega)=1$

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

即
$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$$

事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生越频繁. 这意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因而，直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小. 但是，这样做是否合适？先看下面例子.

例 1　考虑“投硬币”这个试验，有学者将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，结果如表 1 - 1 所示（其正面为 H，n_{H} 表示 H 发生的次数，$f_n(\mathrm{H})$ 表示 H 发生的频率）. 历史上曾有几位科学家做过这样试验，结果如表 1 - 2 所示.

表 1 - 1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$	n_{H}	$f_n(\mathrm{H})$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	37	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1-2

试验者	试验次数 n	出现正面次数 n_H	频率 $f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表中数据可以看出，抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 有随机波动性，即对于同样的 n，所得的 $f_n(H)$ 不尽相同，且波动幅度较大；随着抛硬币次数 n 的增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性，总是在 0.5 附近摆动，且摆动的幅度越来越小，逐渐稳定于 0.5.

当 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随意波动，其幅度较大. 因而，当 n 较小时用频率来表达事件发生的可能性大小是不太合适的；而当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(H)$ 逐渐稳定于某常数，对于每一个事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应，这种"频率稳定性"，即通常所说的统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 一般让试验重复大量次数，用这个频率稳定数来表达事件发生的可能性大小是合适的，称这个"稳定值"为事件发生的概率（Probability).

定义 2 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当频率 n 很大时，$\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动，若随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

习惯上人们将上述定义称为事件 A 发生的概率的统计定义. 到第 5 章，我们将证明，当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定条件下逼近于概率 $P(A)$ 这一事实.

有以下几点值得注意.

(1) 上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为在试验中，不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得频率，用它来表示事件发生的可能性大小.

(2) 又不知道 n 取多大才行，如果 n 取得很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同.

(3) 并且也没有理由认为，试验次数为 $n+1$ 时计算的频率一定比试验次数为 n 时计算的频率更准确、更能逼近所求的概率.

1.2.2 概率及其性质

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使得其具有广泛的适用性. 概率的频率解释为概率提供了经验基础，但是不能作为一个严格的数学定义，从概率论有关问题的

研究算起，经过近 3 个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义．1933 年，苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫（Kolmogoroff）在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上．

定义 3　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 中的每一个事件 A 赋予一个实数与之对应，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足以下条件．

(1) 非负性：对于每个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$．

(2) 完备性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$．

(3) 可列可加性：设 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，即当 $A_iA_j=\varnothing$ ($i\neq j$，i，$j=1$，2，…) 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，此定义为概率的公理化定义．

由概率的定义可以得到概率的一些重要性质．

① $P(\varnothing)=0$．

② 加法公式：对任意事件 A，B，如图 1－2 所示，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

特别地，当 A，B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

当 $B\subset A$ 时，$P(A\cup B)=P(A)$．

性质②可推广：对于任意事件 A，B，C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

当 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容时，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\quad\text{（有限可加性）}$$

其中，n 为正整数．

③ 减法公式：$P(B-A)=P(B)-P(AB)$．

如图 1－3 所示．

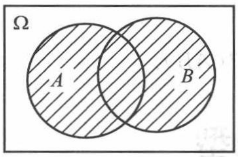

图 1－2

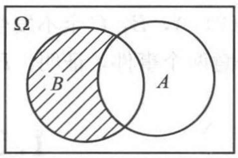

图 1－3

特别地，当 $A\subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$．

④ 对任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$，其中 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com