

信息科学技术学术著作丛书

多速率数字信号处理和 滤波器组理论

王光宇 著



科学出版社

信息科学技术学术著作丛书

多速率数字信号处理 和滤波器组理论

王光宇 著

科学出版社

内 容 简 介

本书全面系统地论述了多速率数字信号处理和滤波器组的基本原理,包括时变和非时变滤波器组。全书共十章,包括离散时间系统和滤波器、多速率系统的组成单元、多通道滤波器组、多通道滤波器组的相关理论、 M 通道 DFT 滤波器组、余弦调制滤波器组、时变滤波器组的基本理论、最一般的时变滤波器组、 M 通道时变滤波器组、时变余弦滤波器组。

本书可供研究和工程部门从事数字信号处理和通信技术工作的广大科技人员参考,也可供高等学校相关专业的高年级学生、研究生学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

多速率数字信号处理和滤波器组理论/王光宇著. —北京:科学出版社,2013

(信息科学技术学术著作丛书)

ISBN 978-7-03-038890-2

I. 多… II. 王… III. ①数字信号处理②滤波器组 IV. ①TN911.72
②TN713

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 244964 号

责任编辑:魏英杰 杨向萍 / 责任校对:彭 涛

责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 11 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013 年 11 月第一次印刷 印张:15 1/2

字数:313 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



《信息科学技术学术著作丛书》序

21 世纪是信息科学技术发生深刻变革的时代,一场以网络科学、高性能计算和仿真、智能科学、计算思维为特征的信息科学革命正在兴起。信息科学技术正在逐步融入各个应用领域并与生物、纳米、认知等交织在一起,悄然改变着我们的生活方式。信息科学技术已经成为人类社会进步过程中发展最快、交叉渗透性最强、应用面最广的关键技术。

如何进一步推动我国信息科学技术的研究与发展;如何将信息技术发展的新理论、新方法与研究成果转化为社会发展的新动力;如何抓住信息技术深刻发展变革的机遇,提升我国自主创新和可持续发展的能力?这些问题的解答都离不开我国科技工作者和工程技术人员的求索和艰辛付出。为这些科技工作者和工程技术人员提供一个良好的出版环境和平台,将这些科技成就迅速转化为智力成果,将对我国信息科学技术的发展起到重要的推动作用。

《信息科学技术学术著作丛书》是科学出版社在广泛征求专家意见的基础上,经过长期考察、反复论证之后组织出版的。这套丛书旨在传播网络科学和未来网络技术,微电子、光电子和量子信息技术、超级计算机、软件和信息存储技术,数据知识化和基于知识处理的未来信息服务业,低成本信息化和用信息技术提升传统产业,智能与认知科学、生物信息学、社会信息学等前沿交叉科学,信息科学基础理论,信息安全等几个未来信息科学技术重点发展领域的优秀科研成果。丛书力争起点高、内容新、导向性强,具有一定的原创性,体现出科学出版社“高层次、高质量、高水平”的特色和“严肃、严密、严格”的优良作风。

希望这套丛书的出版,能为我国信息科学技术的发展、创新和突破带来一些启迪和帮助。同时,欢迎广大读者提出好的建议,以促进和完善丛书的出版工作。

中国工程院院士

原中国科学院计算技术研究所所长



前 言

在实践中,多速率信号处理技术早在 20 世纪 70 年代就被用到语音信号处理中,但当时还没有一套完整的理论来分析和设计多速率系统。第一本关于多速率处理技术的书出版于 1983 年,书中总结了当时对多速率系统的应用和一些分析方法,主要从应用的角度对多速率系统进行了分析,在描述上主要使用传统的傅里叶变换。现在看来,该书中使用的对多速率系统的描述方法在文献中大都不用了,但是该书的出版对多速率系统的研究起到了推进的作用,激起了许多人对研究多速率滤波器组的兴趣。对多速率滤波器组的研究在 20 世纪 80 年代末和 90 年代达到了巅峰,其中一个非常重要的原因是当时对低速语音、音频及图像编码的需求,其代表为国际电信联盟 ITU 和 MPEG 标准组织对宽带语音、音频和图像编码标准的征集。为了研究新的编码算法,人们把焦点都投到了多速率系统上,因为研究发现多速率滤波器组在信号编码中效果很好。经过对多个被选算法的比较,ITU 和 MPEG 最终都采用了基于多速率滤波器组的算法作为宽带语音和音频信号的编码方案作为标准,其中 MP3 音频信号压缩编码最著名。在 MP3 编码器中傅里叶调制滤波器组和余弦调制滤波器组都得到了有效的应用。

科学技术的发展都遵循从实践到理论,再从理论到实践的过程。滤波器组在实践中的成功应用极大地推动了信号处理理论界对滤波器组的研究,由于滤波器组可以用来实现小波变换,这使得对滤波器组的研究扩展到了小波变换理论,同时也把滤波器组理论推到一个新的理论高度。20 世纪八九十年代,多速率滤波器组和小波变换是信号处理领域最热门的研究领域之一,很多有关滤波器组的文献都出自这个时期。到 20 世纪 90 年代末,多速率滤波器组理论已经相当成熟,出现了很多不同的滤波器组分析理论和设计方法,这些理论和设计方法基本都列入了几本有代表性的著作中。Vaidyanathan 的《多速率系统和滤波器组》总结了基于 z 变换的滤波器组分析和设计理论,介绍了各种 z 变换下的多相位分解法,并把矩阵理论引入了滤波器组的分析中,使得对滤波器组的描述变得非常简洁。书中还介绍了很多和滤波器组相关的理论,是滤波器组研究者必读的书籍。Vetterli 的《小波变换和子带编码》重点介绍了小波变换和滤波器组的关系及在子带编码中的应用,包括子带语音信号编码、子带音频信号编码和子带图像编码。该书的不同之处在于,对滤波器组的时间域分析方法作了系统的介绍。时域分析方法的引入完善了滤波器组的分析理论,使人们对滤波器组的特性又有了新的认识。Malver 的《基于重叠变换的信号处理》重点介绍了基于余弦调制滤波器组的重叠变换及其应用,书中所描述的重叠变换是余弦滤波器的一种,因为余弦调制滤波器组具有完全

重建输入信号的特性,而且其原型滤波器的设计相当简单,因此余弦调制滤波器组在实际应用中得到了广泛的应用。

到目前为止,所有关于滤波器组的专著,包括上面提到的三部专著介绍的都是非时变滤波器组,也就是说滤波器组的系数、滤波器组的长度及滤波器组的通道数都不随时间变化,这类滤波器组相对来说比较容易分析,因为我们可以把传统的频域分析方法,例如 z 变换和傅里叶变换用到滤波器组的分析中。但随着多速率滤波器组在实际中的广泛应用,人们发现,如果滤波器组的系数可以随时间和输入信号特性的变化而变化,那么滤波器组的效果会更好,这个特性首先被用到了 MP3 音频信号编码中。在音频编码中,人们发现当音乐信号在时间域快速变化时,短时滤波器组能更好地捕获信号的瞬间变换特性,使压缩编码的效果更好。而当音乐信号在频率域快速变化时,长时滤波器组比短时滤波器组的效果好,因为长时滤波器组的频域分辨率高,能更好地捕捉信号的频率变化。实际上,让滤波器组时变的目的是要得到最优的时域和频域分辨率,这种思想和小波变换的原理类似,因为小波变换也具有非均匀时频分辨率。但不同之处在于,小波变换中的时频分辨率关系一旦设计确定后,对每一帧输入信号的处理都是不变的,而时变滤波器组的系数可以随着每一帧的输入信号不同而变化,因此时变滤波器组可以更好地捕捉信号的变化特性。当然,我们也可以让小波变化随时间变化,从而得到时变小波变换。当人们在 MP3 中使用时变滤波器组的概念时还没有相应的时变滤波器组理论,对时变滤波器组的理论研究开始于 20 世纪 90 年代中对两组不同滤波器组转换的研究,但这一时期的文献仅局限于对两组滤波器组转换的研究,不仅对时变滤波器组没有一个完整的定义,而且也没有形成一个系统的理论来分析和设计时变滤波器组。主要的问题是在这一时期人们仅局限于用研究非时变滤波器组的方法,如 z 变换和傅里叶分析来研究时变滤波器组,而传统的 z 变换和傅里叶变换不适用于分析时变系统,因为时变系统没有卷积定理,也就是说,时变系统的输入输出和系统函数在时域的卷积关系不能简单地转换成频域的乘积关系。在传统的信号处理分析中,我们总是假设系统是线性和非时变的,因为只有这样卷积定理才存在,而卷积定理是联系系统时域和频域的桥梁,没有卷积定理我们很难对系统进行分析。由于没有找到新的方法,人们对时变滤波器组的研究一直没有进展,直到 21 世纪初,一种基于模型分析的方法被提出来。这种方法的基本思想是通过建模,把时变滤波器组中的某一时段通过非时变滤波器组来模拟,从而把时变滤波器组转换成非时变滤波器组来研究。这样,在这一时段内我们就可以用所有非时变滤波器组的理论和方法来对模型进行研究,这一方法的提出从根本上解决了分析最一般的时变滤波器组的难题。基于这种思想,近年来出现一系列有关时变滤波器组的分析和设计方法,包括余弦调制滤波器组和傅里叶调制滤波器组,一套完整的时变滤波器组分析理论已基本形成。

本书将分两个部分来对滤波器组理论进行详细介绍,包括非时变和时变滤波器组理论。第一部分(第1章~第6章)重点介绍非时变滤波器组理论。不同于现有的有关非时变滤波器组理论的英文专著,我们将所有有关非时变滤波器组的描述和分析方法都汇入了书中。我们不仅给出频域的分析方法,而且也给出滤波器组的时域分析方法,力求让读者对非时变滤波器组理论有一个完整的了解。第1章对离散系统和数字滤波器作一个简介;第2章介绍多速率系统的基本组成单元,即抽取器和插值器,及其基本运算;第3章讲述滤波器组的基本分析理论和滤波器组的各种描述方法;第4章详细阐述滤波器组的相关分析理论,包括滤波器组和离散时间序列扩展、小波变换、正交重叠变换的关系,因为本书的重点是一维滤波器组,对多维滤波器组感兴趣的读者可参考相关的文献;第5章介绍离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)滤波器组,包括正交镜像滤波器组(quadrature mirror filter, QMF),它是最早被研究和被研究得最多的滤波器组之一,是滤波器组的基础;第6章讲述余弦调制滤波器组,余弦调制滤波器组是实际中应用得最广的滤波器组之一,最主要的原因是基于余弦调制滤波器组的余弦调制双正交重叠变换具有设计简单和特性好的优点。

本书的第二部分(第7章~第10章)介绍时变滤波器组理论。第7章介绍时变滤波器组的基本理论,包括时变抽取器和时变插值器及其模型;第8章介绍 M 通道时变滤波器组,在这种滤波器组中,除了通道数外其他参数都可以随时间变化;第9章阐述通用时变滤波器组理论,这是最一般的时变滤波器组,滤波器组的所有参数都可以随时间变化,包括滤波器组的通道数、滤波器组的系数和滤波器长度等;第10章介绍时变余弦调制滤波器组,这是在实践中用得最多的时变滤波器组,原因和非时变余弦调制滤波器组类似,因为时变余弦调制重叠变换的原型滤波器系数可以从其非时变形式通过简单的窗口函数变化得到,不需要复杂的优化算法。

如前所说,在英文专著中,我们可以查到多部有关非时变滤波器组理论的书,但还没有有关时变滤波器组理论的英文专著。在中文文献中,更缺乏介绍滤波器组理论的专著,特别是时变滤波器组理论,这正是我们出版本书的动力之一。我们想通过出版本书让对滤波器组理论感兴趣的学者和想使用滤波器组的研发人员多一部参考文献。本书也可以作为信息和信号处理专业的研究生和本科生的教材,因此本书力求写得通俗易懂,从系统的高度把滤波器组的相关概念和原理尽可能地阐述清楚。为了更好地理解本书的内容,建议学生在修完数字信号处理这门课后再来阅读。

作者

2013年2月

目 录

《信息科学技术学术著作丛书》序

前言

第 1 章 离散时间系统和滤波器	1
1.1 引言	1
1.2 离散时间信号和分析	1
1.2.1 离散时间信号	1
1.2.2 离散时间信号的变换域分析	3
1.3 离散时间系统	6
1.3.1 线性非时变离散时间系统	6
1.3.2 线性时变离散时间系统	10
1.3.3 线性周期时变离散时间系统	12
1.4 离散时间系统的实现	13
1.4.1 FIR 系统和 FIR 滤波器	14
1.4.2 IIR 系统和 IIR 滤波器	15
1.4.3 线性相位滤波器	16
1.4.4 离散时间系统的矩阵描述	17
参考文献	19
第 2 章 多速率系统的组成单元	20
2.1 引言	20
2.2 抽取器	20
2.2.1 抽取器的频域分析	22
2.2.2 抽取器的时域分析	23
2.3 插值器	24
2.3.1 插值器的频域分析	25
2.3.2 插值器的时域分析	26
2.4 多相位分解表示	26
参考文献	29
第 3 章 多通道滤波器组	30
3.1 引言	30
3.2 多通道滤波器组结构	30
3.3 多通道滤波器组的频域分析	33

3.4	多通道滤波器组的多相位分解表示	36
3.5	多通道滤波器组的时域表示	40
3.6	滤波器组的完全重建条件	42
3.6.1	频域分析和多相位分析的关系	43
3.6.2	时域分析和多相位分析的关系	45
3.6.3	完全重建定理	45
3.7	滤波器组和变换之间的关系	46
3.7.1	方块变换	46
3.7.2	重叠变换	48
	参考文献	50
第4章	多通道滤波器组的相关理论	52
4.1	引言	52
4.2	正交镜像滤波器组	52
4.2.1	两通道 QMF	53
4.2.2	M 通道 QMF	54
4.3	树形结构滤波器组	56
4.3.1	频域分析	58
4.3.2	时域分析	59
4.4	传输多路复用器	64
4.4.1	频域分析	64
4.4.2	时域分析	65
4.5	DFT 滤波器组和正交频分复用调制系统	67
4.5.1	DFT 滤波器组	67
4.5.2	OFDM 调制系统	69
4.5.3	单载频调制系统	73
4.6	离散时间序列扩展和滤波器组	75
4.6.1	正交基	76
4.6.2	双正交基	77
4.6.3	信号的扩展	78
4.6.4	信号扩展与滤波器组	79
4.7	信号的时频分解和离散时间小波变换	81
4.7.1	短时傅里叶变换	82
4.7.2	离散时间小波变换	85
	参考文献	88

第 5 章 M 通道 DFT 滤波器组	90
5.1 引言.....	90
5.2 DFT 滤波器组的多相位实现结构	90
5.3 改进的 DFT 滤波器组	95
5.4 MDFT 滤波器组的实现结构	102
5.5 MDFT 滤波器组的设计	106
5.6 复数 MDFT 滤波器组.....	113
5.7 功率互补条件在时域的表现形式	115
参考文献.....	119
第 6 章 余弦调制滤波器组	121
6.1 引言	121
6.2 余弦调制滤波器组的原理	121
6.3 完全重建余弦调制滤波器组	126
6.3.1 重叠系数 $K=1$	131
6.3.2 重叠系数 $K=2$	132
6.4 余弦调制滤波器组的实现	133
6.4.1 $K=1$ 时余弦滤波器组实现结构	135
6.4.2 $K=2$ 时余弦滤波器组实现结构	137
参考文献.....	137
第 7 章 时变滤波器组基本理论	139
7.1 引言	139
7.2 时变抽取器	139
7.2.1 时变抽取器的频域分析	143
7.2.2 时变抽取器的时域分析	143
7.2.3 时变滤波器和非时变抽取器的级联.....	144
7.3 时变插值器	145
7.3.1 时变插值器的非时变模型	146
7.3.2 时变插值器的时域分析	146
7.4 时变抽取器和插值器的组合	147
7.4.1 时变滤波器组的基本组成单元	147
7.4.2 M 通道时变滤波器组的基本组成单元.....	148
7.4.3 时域矩阵表示	149
7.5 时变多速率系统的滤波器组模型	149
7.5.1 最一般时变滤波器组组成单元的模式	150
7.5.2 M 通道时变滤波器组组成单元的模式.....	154
参考文献.....	155

第 8 章 最一般的时变滤波器组	157
8.1 引言	157
8.2 时变滤波器组的模型	157
8.2.1 模型-I	157
8.2.2 模型-II	158
8.3 时变滤波器组的变化域分析	162
8.3.1 基于模型-I的分析	162
8.3.2 基于模型-II的分析	163
8.4 时变滤波器组的调制域分析	168
8.5 时变滤波器组的设计	170
8.5.1 高斯-约当消元法	174
8.5.2 最小二乘法	181
参考文献	188
第 9 章 M 通道时变滤波器组	190
9.1 引言	190
9.2 M 通道时变滤波器组的模型	191
9.2.1 模型-I	191
9.2.2 模型-II	192
9.3 M 通道时变滤波器组的变化域分析	194
9.3.1 基于模型-I的分析	194
9.3.2 基于模型-II的分析	196
9.4 M 通道时变滤波器组的调制域分析	199
9.5 M 通道时变滤波器组的设计	201
参考文献	209
第 10 章 时变余弦滤波器组	211
10.1 引言	211
10.2 时变余弦滤波器组的定义	211
10.3 时变余弦滤波器组的完全重建条件	216
10.3.1 重叠系数 $K(m)=1$	216
10.3.2 重叠系数 $K(m)=2$	219
10.4 时变余弦滤波器组的设计	221
10.4.1 滤波器组的边界条件	222
10.4.2 M 通道($L=2M$)变换到 $M/2$ 通道($L=M$)	223
10.4.3 $M/2$ 通道($L=M$)变换到 M 通道($L=2M$)	227
10.4.4 M 通道($L=4M$)变换到 M 通道($L=2M$)	228
10.4.5 图形矩阵设计法小结	230
参考文献	234

第 1 章 离散时间系统和滤波器

1.1 引言

在数字信号处理中,离散时间系统是最常用的系统,因为几乎所有的系统都可以用离散时间系统来描述,包括线性和非线性系统、时变和非时变系统。根据系统函数的长度,离散时间系统可分为有限冲击响应(finite impulse response, FIR)系统和无限冲击响应(infinite impulse response, IIR)系统。FIR 系统的系统函数长度是有限的,而 IIR 系统的系统函数是无限长的。根据系统函数的时变性,离散时间系统可分为时变和非时变系统。如果根据系统函数的线性和非线性来分,离散时间系统又可分为线性系统和非线性系统。在实际和理论分析中,我们可以根据系统的特性把这些系统特征组合起来得到不同的离散时间系统。有关离散时间系统和数字滤波器的详细分析可以在很多经典的数字信号处理书中找到^[1-4],本章只对离散时间系统和数字滤波器作一个概述,重点介绍线性时变和非时变离散时间系统,为下面几章介绍滤波器组作理论铺垫。

1.2 离散时间信号和分析

在描述离散时间系统之前我们先得了解一下什么是离散时间信号以及离散时间信号的分析方法。

1.2.1 离散时间信号

离散时间信号,顾名思义就是在离散时间轴上的信号,通常用 $x(n)$ 来表示,根据需要也可用 $y(n)$ 和 $u(n)$ 等符号来表示,这里整数 n 表示整个离散时间系列值,即 $-\infty < n < \infty$, $x(n)$ 可以是复数或实数。和连续时间信号的区别在于,离散时间信号的时间取值是离散的,而连续信号的时间取值是连续的。离散时间信号通常用于理论分析,在实际应用中,例如用数字信号处理器(digital signal processing, DSP)芯片或微处理器来实现离散时间系统时,所处理的信号都是数字信号,信号取值也是离散的,不过在精度足够高或不考虑量化效应时,数字信号可以认为就是离散时间信号。下面介绍几种在离散时间系统分析中常用的离散时间信号。

(1) 单位冲击信号

单位冲击信号如图 1.1(a)所示,定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

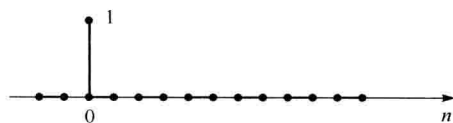
(2) 单位阶跃序列

单位阶跃序列定义为

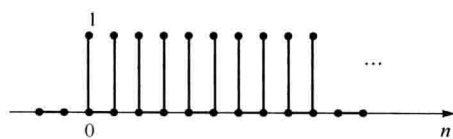
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.2.2)$$

如图 1.1(b)所示,单位阶跃序列在负半轴的值为零,在正半轴和零点为 1。利用单位阶跃序列,单位冲击信号可以表示为

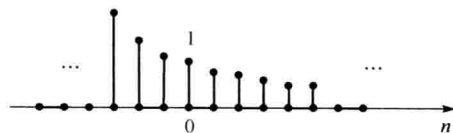
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.2.3)$$



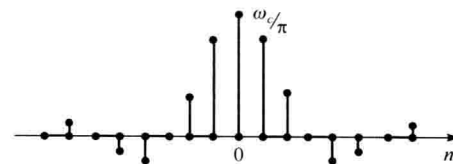
(a) 单位冲击信号



(b) 单位阶跃序列



(c) 指数序列($0 < a < 1$)



(d) Sinc序列

图 1.1 常用的离散时间序列

(3) 指数序列

指数序列定义为

$$x(n) = ca^n, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2.4)$$

其中, c 和 a 是两个任意常数,可以是实数或复数。

如果把指数序列乘上单位阶跃序列就得到右单边指数序列 $ca^n u(n)$ 和 $ca^n u(-n)$ 。

(4) 单频指数序列

如果把 $a = e^{j\omega_0}$ 代入式(1.2.4)中,就得到单频指数序列,即

$$x(n) = ce^{j\omega_0 n} \quad (1.2.5)$$

其中,角频率 ω_0 是一个实数,单位为弧度,代表数字角频率(或归一化角频率)域中的某一频率点,单频指数序列是一个复数序列。

(5) Sinc 序列

离散时间 Sinc(n)序列来源于 Sinc(x)函数,通常定义为

$$x(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.2.6)$$

Sinc 序列在数字信号处理中具有特殊的意义,因为 Sinc 序列的离散时间傅里叶变换对应于一个理想低通滤波器,如图 1.2 所示。 $X(e^{j\omega})$ 定义为

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (1.2.7)$$

其中, ω_c 称为低通滤波器的截止频率。

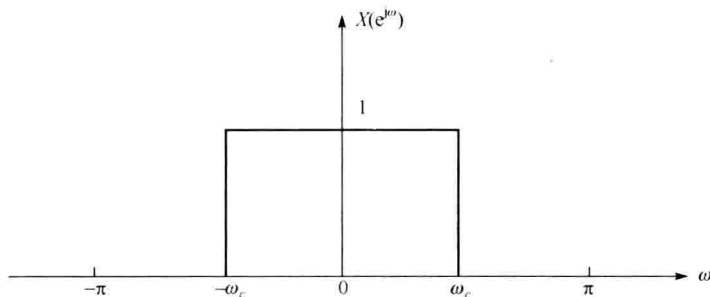


图 1.2 理想低通滤波器

1.2.2 离散时间信号的变换域分析

把离散时间信号从时间域转换到另外一个变量域来分析是信号处理理论的一个重要组成部分,也是信号处理最常用的方法,因为在另一个变量域内可以看到信号在时间域里没有的特性。把信号从时间域变换到其他变量域首先得找到一个具有正交基函数的变量空间和能完成两个域之间信号完全重建的变换对。在数学上可以存在很多这样的变量域和变换对,但在数字信号处理中用得最多的变量域是 z 变换域和频率域,而用来完成这种变量转换的就是 z 变换和傅里叶变换。这两个变换在数学上都属于积分变换。

(1) z 变换

离散时间信号 $x(n)$ 的 z 变换定义为

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1.2.8)$$

其中, z 是复数, $z = Ae^{j\omega} = A(\cos\omega + j\sin\omega)$, A 是复数的幅值, ω 是数字角频率。

按国际学术文献通用的表示方法, 我们用 ω 代表数字角频率, 单位为 rad, 没有时间因子; Ω 代表模拟角频率, 单位为 rad/s。数字角频率 ω 和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$, 其中 T 表示模拟信号的抽样周期。 z 变换属于积分变换, 其反变换是复数域上的围线积分, 定义为

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (1.2.9)$$

其中, C 是 z 变换收敛域中的一个包围所有 $X(z)$ 极点的逆时针围线, 如图 1.3 所示。

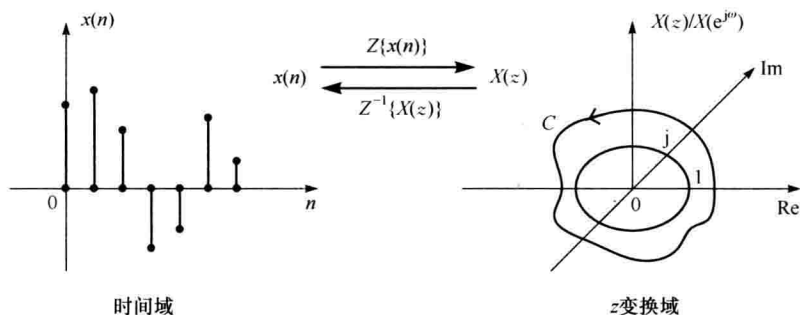


图 1.3 时间域和 z 变换域的对应关系

(2) 离散时间傅里叶变换

离散时间傅里叶变换(discrete-time Fourier transform, DTFT)是 z 变换在单位圆上, 即围线 C 等于单位圆时的一个特例, 如图 1.3 所示。把 $z = e^{j\omega}$ 代入 z 变换的定义(1.2.8)中, 可以得到离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1.2.10)$$

在 z 变换的反变换中, 如果围线 C 在单位圆上逆时针旋转一周, 意味着角频率 ω 从 0 到 2π , 把 $z = e^{j\omega}$ 代入式(1.2.9)中, 可以得到离散时间傅里叶反变换为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.2.11)$$

其中, $X(e^{j\omega})$ 是一个周期为 2π 的复函数, 即 $X(e^{j(\omega+2k\pi)}) = X(e^{j\omega})$ 。

$X(e^{j\omega})$ 还有如下两个重要特性:

- ① 幅度偶对称, 即 $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$ 。
- ② 相位奇对称, 即 $\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$ 。
- ③ 离散傅里叶变换。

DTFT 是信号分析中最重要的变换之一, 因为信号和系统的频域分析都需要进行 DTFT 变换, 但 DTFT 的直接计算很复杂, 因为 DTFT 的反变换需要进行复数积分运算。在 DTFT 变换对中, 时间域 n 是离散的, 而频率域 ω 是连续的。在实际运算中, 我们并不需要对所有 ω 轴上的值进行计算, 而只需要对 ω 进行抽样计算。假如我们在复平面的单位周期圆 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 上取 N 点, 对式(1.2.10)中 ω 和 n 作下列变量代换, 即

$$\omega = 2\pi(k + mN)/N, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad -\infty < m < \infty$$

由于 $X(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的周期函数, 在对整个 ω 轴进行抽样后有

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (1.2.12)$$

其中, $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的两个周期序列。

$$\tilde{x}(n - mN) = x(n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad -\infty < m < \infty$$

$$\tilde{X}(k + mN) = X(k), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad -\infty < m < \infty$$

$\tilde{X}(k)$ 也称为周期信号 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶序列, 当 $m=0$ 时, 式(1.2.12)可进一步简化为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.2.13)$$

式中, $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。

我们把式(1.2.13)称为 DFT。与 DTFT 不同, DFT 的变量在时域和频域都是离散的, 为了求 DFT 的反变换, 把式(1.2.12)代入式(1.2.11)中可得

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [\tilde{X}(k) e^{j2\pi kn/N}] \frac{2\pi}{N} \right\} \quad (1.2.14)$$

我们对 ω 进行了抽样, 所以式中的积分运算变成了求和, $d\omega$ 换成了 $\frac{2\pi}{N}$ 。当 $m=0$ 时, 式(1.2.14)可进一步简化为离散傅里叶反变换(inverse discrete Fourier transform, IDFT), 即

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.2.15)$$

1.3 离散时间系统

我们把离散时间系统定义为把输入离散时间序列 $x(n)$ 变换到输出离散时间序列 $y(n)$ 的一种映射或运算,如图 1.4 所示。

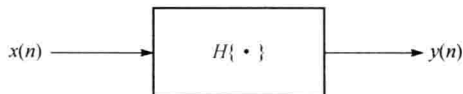


图 1.4 离散时间系统示意图

图中 $H\{\cdot\}$ 表示系统的运算。系统的运算可以是线性、非线性、时变和非时变的,我们只研究线性非时变和线性时变离散系统。

1.3.1 线性非时变离散时间系统

系统的线性定义为,假如 $x_0(n)$ 、 $y_0(n)$ 和 $x_1(n)$ 、 $y_1(n)$ 分别是系统的任意两对输入输出,对于任意的两个常数 a_0 和 a_1 ,如果系统对输入 $a_0x_0(n) + a_1x_1(n)$ 的相应输出为

$$H\{a_0x_0(n) + a_1x_1(n)\} = a_0H\{x_0(n)\} + a_1H\{x_1(n)\} = a_0y_0(n) + a_1y_1(n)$$

那么我们称系统 $H\{\cdot\}$ 是线性的。

系统的非时变定义为,如果系统对输入信号 $x(n)$ 的输出是 $y(n)$,系统对输入 $x(n-N)$ 的输出响应为

$$H\{x(n-N)\} = y(n-N)$$

那么我们称系统是非时变的。系统的非时变性意味着系统的运算不随时间的变化而变化,是固定的。

线性非时变离散时间系统是离散系统中很重要的一种系统,也是实际中用得最广的系统,主要原因是线性非时变系统能用卷积定理来描述。为了说明卷积定理,我们首先把离散时间信号用单位冲击信号 $\delta(n)$ 来表示,由于 $\delta(n)$ 信号的特性,任意一个离散时间信号 $x(n)$ 都可以分解为

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i) \quad (1.3.1)$$

这样我们就可以把线性非时变离散时间系统的输出输入关系表示为

$$y(n) = H\{x(n)\} = H\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n-i)\right\} \quad (1.3.2)$$

其中, $\delta(n)$ 是单位冲击信号。

如果我们把系统的系统函数 $h(n)$ 定义为系统对单位冲击信号的响应,即

$$h(n) = H\{\delta(n)\} \quad (1.3.3)$$