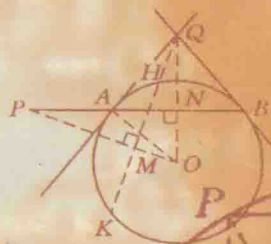


教育部师范教育司组织评审



上海教育出版社

全国中小学教师继续教育参考教材

初中几何教学研究

教育部师范教育司组织评审

孙月光 主编

上海世纪出版集团
上海教育出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

初中几何教学研究 / 孙月光著. —上海: 上海教育出版社, 2000.10

ISBN 7-5320-7056-5

I. 初... II. 孙... III. 几何课-教学研究-初中
IV. G633.633

中国版本图书馆CIP数据核字 (2000) 第42470号

全国中小学教师继续教育参考教材

初中几何教学研究

教育部师范教育司组织评审

孙月光 主编

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海新华印刷厂印刷

开本 890×1240 1/32 印张 6.75 字数 189,000

2000年10月第1版 2000年10月第1次印刷

印数 1—5,100本

ISBN 7-5320-7056-5/G·7212 定价:9.00元

目 录

第一章 初中几何入门教学	(1)
§ 1-1 初中几何入门教学中的兴趣培养	(1)
一、初中几何入门难与学习兴趣	(1)
二、初中几何入门阶段培养兴趣的方法	(3)
§ 1-2 初中几何入门教学中的语言教学	(14)
一、几何语言和学习几何	(14)
二、学习几何语言的困难分析	(17)
三、入门阶段的几何语言教学	(20)
§ 1-3 初中几何入门教学中的看图训练	(23)
一、看图训练的困难分析	(23)
二、初中几何入门阶段的看图训练	(23)
§ 1-4 初中几何入门教学中的逻辑教学	(28)
一、推理和论证	(28)
二、入门阶段推理论证学习的困难分析	(30)
三、入门阶段的推理论证教学	(31)
第二章 初中几何论证教学	(40)
§ 2-1 初中几何教学中的论证训练	(40)
一、推理论证是数学的特征	(40)
二、初中几何论证教学中的常见错误	(49)
三、教会探索,引导“自得”	(52)
§ 2-2 初中几何教学中的变式图	(64)
一、变式图	(64)
二、初中几何教学中的变式图	(73)
§ 2-3 初中几何教学中的添线补图	(81)

一、添线补图的判断及其原则	(81)
二、添线补图的方法	(84)
第三章 初中几何的轨迹和作图教学	(97)
§ 3-1 初中几何中的轨迹教学	(97)
一、轨迹的意义和基本轨迹	(97)
二、轨迹命题的教学	(100)
§ 3-2 初中几何中的作图教学	(112)
一、初中几何作图的意义	(112)
二、尺规作图和作图方法	(113)
三、作图教学	(118)
四、尺规作图不能问题	(124)
第四章 初中几何中的初等变换、几何动态和用数解题	(127)
§ 4-1 初中几何中的初等变换	(127)
一、保距变换	(127)
二、保角变换	(137)
三、保积变换	(139)
§ 4-2 几何动态	(144)
一、什么是几何动态	(144)
二、几何动态和几何问题的探求	(146)
§ 4-3 数与初中几何解题	(159)
一、代数法解题	(159)
二、参数法解题	(165)
三、三角法解题	(169)
四、解析法解题	(172)
五、面积法解题	(173)
§ 4-4 初中几何的练习与复习	(174)
一、初中几何的练习	(175)
二、初中几何的复习	(184)
第五章 初中几何教材改革简介	(191)
§ 5-1 “新数学”运动和几何教材改革	(191)

一、“新数学”运动简介	(191)
二、“新数学”运动中的平面几何教材	(194)
三、对初中几何教学改革的趋向一致的结论	(197)
§ 5-2 几种不同的初中几何教材简介	(198)
一、用向量方法组织初中几何教材	(198)
二、用面积方法组织初中几何教材	(200)
三、用变换群方法组织初中几何教材	(203)
四、用计算机处理初中几何教材	(204)
附录 基本图形分析法	(207)

第一章 初中几何入门教学

§ 1-1 初中几何入门教学中的兴趣培养

兴趣是一种特殊的意识倾向,是学习动机产生的主要原因。宋朝程颐曾说过:“教人未见其趣,必不乐学。”在入门阶段就应十分重视采取各种有效措施,激发学生对平面几何的兴趣。那么,如何培养学生的学习兴趣呢?

一、初中几何入门难与学习兴趣

初中几何入门教学(也称初中几何启蒙教学),它所包含的内容,一般是指直线、射线、角、相交线和平行线等基本概念的教学。上海市全日制九年制义务教育数学学科标准,是从六年级至七年级的平行直线止。从教学实际看,还应扩大到整个七年级。包括三角形全等的判定及全等三角形的应用。在这些内容学习中,学生会遇到哪些困难呢?

1. 从初中几何研究的对象分析

初中几何所研究的对象,与学生以前所学的教学内容大相径庭。过去所学内容不外乎数与式的计算,即使在五年级接触了一些图形知识,也只是停留在代公式进行数字计算上。而从六年级开始的初中几何,所学习的内容是需要作抽象提炼后才能认识到的“点”、“线”、“面”,要学习和探讨它们之间的位置关系及大小关系,通过计算和思考,形成一定的图形概念。而且对这些对象的认识,不仅是结论,更重要的是要能清晰、明白、不主观臆断地说明得到结论的道理。这就是说,初中几何把学生从数、式的学习领进一个新的、陌生的、以图形研究为主的领域。学生在开始学习时,对这个转变很不适应。

2. 从初中几何研究的思维方法分析

小学阶段对一些简单图形性质的认识,往往是通过观察和实验,对一些图形的研究也仅仅侧重于面积和体积的计算。在思维方法上以形象思维为主。在初中几何学习中,虽然图形直观能对寻找解题方法有所启示,然而,单凭形象思维不能解决几何问题。它的解决,必须通过图形直观,依据条件和已学过的有关定义、定理、公理,采用恰当的逻辑推理得到结论。这种思维过程,有形象思维、逻辑思维,有时还加入直觉思维活动。学生在开始接受逻辑思维训练时,往往搞不清逻辑关系,反映出对思维方式改变的不适应。

3. 从初中几何的教材内容和教学形式分析

基础知识多,概念集中是初中几何入门阶段教学内容的特点,这些概念又与存在于学生头脑中的认识不完全相同,此外,接踵而来的各种几何术语,虽然难度不大,但多数在小学阶段没有接触过。尽管初中学生对新内容的学习有好奇心,但这种好奇心也常会表现出不稳定性。如果有的教师在教学中表现出驾驭教材的能力不强,不善于把几何知识讲活,讲出趣味性,便很容易变成让学生囫圇吞枣地背诵,食而不化的学习状况。

4. 从技能要求分析

初中几何要求学生逐步具有识图、画图、作图的能力,正确地理解和掌握几何语言,具备演绎推理的思维能力和操作技能,以及逐步了解并掌握图形变换的思想方法,运用综合法、分析法、反证法等的证题能力。

5. 从新旧学科间的影响分析

新旧学科间存在着知识、技能的迁移。在学习初中几何以前,学生已从小学的“简单图形知识”中了解了直线、射线、线段等名称,这对学习初中几何有可利用的迁移作用,但这些认识只是形象直观的,这种认识图形的方法常常会给初中几何学习带来消极的负迁移作用,如以直观形象替代抽象论证,对论证的必要性认识不足,甚至产生排斥心理。

因为研究对象、内容、思维方式、技能要求上的变化,要求学生在学习方法和学习习惯上作相应的改变和调整。但是过去的学习方法和习惯一旦形成,便具有一定的顽固性,学生常又没有认识到这种改变的重

要性和必要性,因而想当然、浮光掠影的学习态度和学习方法堵而不绝。

从教师的“教”来看,有些教师认为入门阶段内容破碎,课堂教学有困难,于是,尽量压缩教时,借以早日进入平面几何论证阶段的“华采乐章”,更加重了学生入门阶段学习的困难,这种种困难使很多学生失去学习的兴趣。

二、初中几何入门阶段培养兴趣的方法

历史上一些著名科学家,如阿基米德、牛顿、罗素、爱因斯坦,都曾被欧几里得几何迷住过,说明人们对数学的兴趣,往往受到欧几里得几何的启示。

美国著名心理学家布卢姆曾说过:“学生成功地学习一门学科与他对该学科的兴趣有较高的相关……。”北京市教育部门曾组织过有关同志,进行两年的几何入门教学实验,发现学生对学习几何兴趣增浓了,学习质量也提高了。从他们的调查结果中看到,兴趣是可以通过培养得到提高的。

第一次:学习几何之前

对数学喜欢的程度	百分比
非常喜欢	26.7%
比较喜欢	48.9%
一般	20%
不喜欢	4.4%

第二次:学习几何之后

对数学喜欢的程度	百分比
非常喜欢	44.4%
比较喜欢	55.6%
一般	0%
不喜欢	0%

应该怎样培养学生学习几何的兴趣呢?

1. 从实际出发确定恰当的教学要求

根据“因材施教”和“可接受性”教育原则、初中几何的特点、初中学生认知心理和思维方法,从实际出发确定教学要求,是激发学生学习兴趣的基本措施。教学中设置小步子循序渐进,让学生树立学好几何的信心。

(1) 从实际出发,降低坡度,分散难点,少混循环多单循环。80年

代的我国部编教材,虽然从学生的年龄特点、认识规律以及几何的教学内容和教学目的出发,注意到了这个问题,但是我国地大人多,差异很大,要想能适应各地不同环境和条件下的学生,这是不可能的。即使从1990年以后,上海已普遍使用新编的、沿海发达地区的教材,各学校以统一尺码去要求和衡量也是行不通的。特别是学习基础比较差的学生,他们往往意志比较薄弱,有一种压抑的自悲感,他们的自制能力也比较差,对这种学生也不能跨大步。应该铺设学习阶梯,减缓坡度,使学生每堂课学习都能有所得。

(2) 推理论证训练一般从填理由练习开始。填理由是为了强调在推理时步步有根据,这些根据就是已学过的公理、定义和定理。这种推理训练,也必须由浅入深,由易到难,一步步地进行。在刚学习逻辑推理时免不了会出逻辑上的差错,要靠教师引导,让学生模仿,不能急于求成,否则只会挫伤学生的学习兴趣。

2. 让学生动手实验,培养学习几何的兴趣

大数学家欧拉曾经说过:“数学这门科学,需要观察,还需要实验。”应把初中几何入门教学过程变成学生经自己动手操作、发现规律的过程。在动手操作实践中,感到投身于发现规律的快乐。在观察和实验中,掌握知识的来龙去脉,学到发现规律的方法,激发情趣,促进科学思维能力的提高。

以引言课的设计为例:

第一步,简要地介绍几何是随着生产、生活的实际需要而产生并发展的历史,以及我国古代在几何上的突出成就。

第二步,让学生动手操作,增加对常见几何图形的实感。比如:

(1) 折纸和剪纸 要求师生一起做,教师边折边讲,在黑板上画出图(图1-1-1)。用长方形纸卷起一角,折出一个正方形,并对这些折痕进行解释:“ AF 在几何上称为 $\angle A$ 的平分线,以后的学习,我们将会看到,它具有很多性质。”“ AB 和 AE 重合,这种做法在

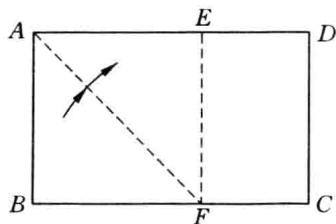


图 1-1-1

几何上又叫做在线段 AD 上截取一段 AE , 使 $AE = AB$ 。”再沿 AF 剪下 $\triangle ABF$, “这是一个等腰三角形, AB 、 BF 称为这个等腰三角形的两条腰, AF 为底边。以后还会学到等腰三角形, 它具有很多特殊的性质。”“如果分别连接长方形两个相对的顶点 A 、 C 和 B 、 D (图 1-1-2), 那么 AC 、 BD 称为这个长方形的两条对角线。以后还会知道, 这两条对角线等长, 交点 O 将它们平分。”

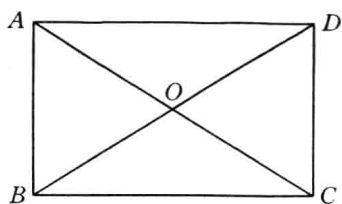


图 1-1-2

(2) 拼图 师生拿出事先准备好的两块可以重叠的三角尺或用纸剪成的能重叠的三角形, 教师问学生: “在相等长的两边重合时, 能拼出多少种不同的图形?” (见图 1-1-3)

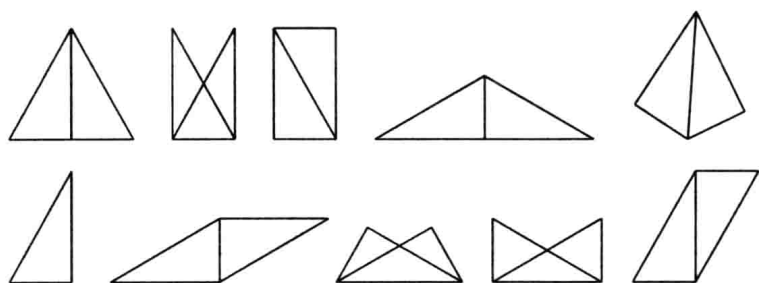


图 1-1-3

(3) 火柴棒搭图 课前给学生准备好火柴棒若干。提出这样的问题: “拼搭一个等边三角形, 至少要几根火柴棒?” “拼搭在一起的两个、三个、四个、六个等边三角形各至少要多少根火柴棒?” (图 1-1-4) 当学

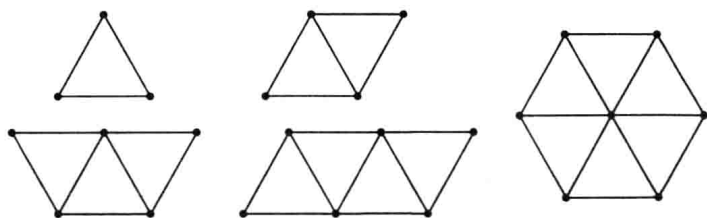


图 1-1-4

生拼搭好后,说明这些图形的名称,初中几何也要研究这些图形的性质。

第三步,结合学生的实际,选编有趣的与几何知识有一定联系的实际问题,让学生观察、分析、判断和思考。

(1) 比较长短 两条本是等长的线段 AB 和 CD ,组成如图 1-1-5,要求学生先观察,再判断 AB 和 CD 的长短。

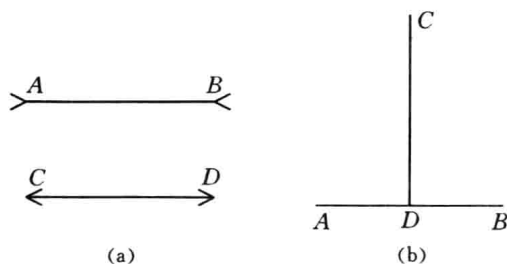


图 1-1-5

(2) 比较大小 如图 1-1-6, $\odot A$ 和 $\odot B$ 的半径相等,让学生判断 $\odot A$ 和 $\odot B$ 哪个大。通过比较告诉学生学习几何的方法,初中几何是研究平面图形的形状、位置和大小,但是这种研究不能凭视觉判断。因为这样做有时会发生错误。如何判断才能保证正确性? 这些都将在初中几何里学习。

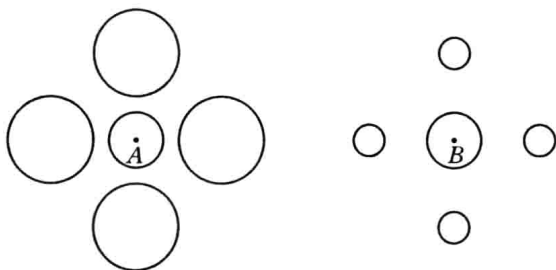


图 1-1-6

无论用剪纸、拼图还是火柴棒搭图,都体现了简单的图形变换的思想。在这些操作活动中,学生作为活动的主体并没有变化,而作为客体的图形却在变化着。这种活动能使学生在注意集中的同时,产生注意的

转移,防止产生疲劳,保持较高的学习兴趣和热情。

在动手实验取得一些初步认识后,教师应给学生小结:

①几何是由生产、生活的需要产生、发展的;②初中几何学习的内容是研究平面图形的位置、形状和大小;③几何学习的方法应是结合图形直观,经过分析,用逻辑推理进行判断和论证。

从上面引言课的设计可以看到,学习几何理论与应用理论解决问题,不能只让教师讲、学生听,学生只是处于被动学习的环境之中,而应设计有趣的科学的实验操作,使学生置身于发现知识的活动中,发挥他们的想象力和创造力。

对学生易犯的错误或易混淆的概念,也可以用实验的方法让学生自己去发现和纠正。

如在讲解三角形的高时,学生容易误认为三角形的高必在三角形内。这是由两方面原因造成的:①三角形的角平分线、中线必在三角形内,误认为高也必在三角形内;②学生根据已有的图形经验,误认为三角形的高是在形内,因为教师在讲三角形的高时,多以锐角三角形为例。为排除这种错误印象,可组织学生观察如下的实验:取三根竹枝,制成如图 1-1-7 的活动教具,演示时,分别将竹枝 AB 的端点 A 与竹枝 CF 上 D 、 E 、 F 三点重叠,就可以分别得到锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。若将竹枝 BC 放在水平位置,从 A 处所挂的重锤就分别在三角形内、和 AB 重合、在三角形外。学生获得这些印象后,教师再小结,使学生从感性认识上升到理性认识,有利于排除上述错误的再次发生。

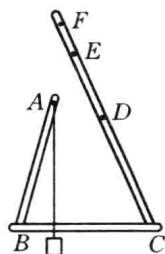


图 1-1-7

若将竹枝 BC 放在水平位置,从 A 处所挂的重锤就分别在三角形内、和 AB 重合、在三角形外。学生获得这些印象后,教师再小结,使学生从感性认识上升到理性认识,有利于排除上述错误的再次发生。

在初级证明阶段,不宜立刻就追求严格的步步有据的逻辑论证,可先让学生通过动手实验的方法认识一般公理,也可用这种方法验证一些简单定理,比如等量公理、不等量公理,“对顶角相等”、“三角形内角之和等于 180° ”等定理。让学生在动手中发现规律,学生的兴趣高,学习效果也好。然而,这只是一些类比、归纳法,不能作为论证,只是为进一步学习作了准备。

3. 从改进学习方法上培养学生学习几何的兴趣

学习几何的方法与学习算术、代数相比有较大突变。如何学,才符合正确学习的要求?教学中,应适时教导学生怎样学习概念,怎样分析问题,怎样进行思维活动。除运用逻辑推理方法外,还应特别注意利用图形直观,仔细观察,从图形的结构分析,提高抽象、概括能力以及类比、化归等数学方法的应用能力。这是初中几何入门阶段激发学生主动学习,保持持久兴趣的根本措施。

4. 从改进教学方法上培养学生学习几何的兴趣

(1) 揭示图形美的特征,指导学生从特征分析中发现规律。从简单题开始,结合教学内容,适当引申,帮助学生通过观察分析,获取规律性的知识和技能。

例 1. 已知线段 AB 上有 1 点 C , 可有多少条线段? 如有 2 点 C 、 D , 可有多少条线段? 若在 AB 上有 C 、 D 、 E 3 点, 总共可有多少条线段?

分析: 若 AB 上有 1 点 C (图 1-1-8(a)), 那么, 总共可有 $2 + 1 = 3$ 条线段: 从 A 点开始数有两条线段 AC 、 AB , 再以 C 点为始点, 有线段 CB 一条, 所以总共有 $2 + 1 = 3$ (条)。千万不能胡乱数数, 因为这样数, 容易犯重复或遗漏的错误, 不利于思维能力的提高。

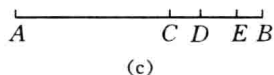
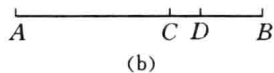
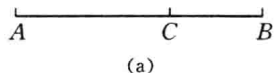


图 1-1-8

若 AB 上有 2 点 (图 1-1-8(b)), 从 A 开始, 有 AC 、 AD 、 AB , 从 C 开始有 CD 、 CB , 从 D 开始有 DB , 所以总共有 $3 + 2 + 1 = 6$ (条)。

若 AB 上有 3 点 (图 1-1-8(c)), 用上述方法数, 最后得数为 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (条)。

从上面分析得到启发, AB 上有 1、2、3、 $\dots$ 、 n 点时, 答案分别为 $2 + 1$ 、 $3 + 2 + 1$ 、 $4 + 3 + 2 + 1$ 、 $\dots$ 、 $(n + 1) + n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1$ 。

另外, 变式在初中几何入门教学中有很重要的作用, 这不仅能克服分析和应用规律的片面性, 而且也是揭示规律, 提高分析思维能力的必要措施。如例 1 可以改为下面的变式题: ①如图 1-1-9(a), 三角形各有

多少个？②如图 1-1-9(b)，长方形各有多少个？③如图 1-1-9(c)，正方形各有多少个？

(注：第③题的答案分别为 1×1 ， $1 \times 1 + 2 \times 2$ ， $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3$ ， $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4$ 。)

总之，入门阶段选择的例、习题，题型上要新颖有趣，解题上要重视思维能力的培养，解题后要善于揭示解题规律，这样才能使学生每堂课学有所得。

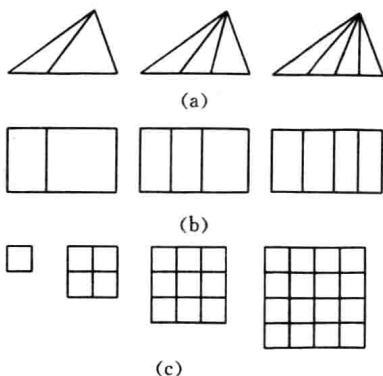


图 1-1-9

(2) 设置悬念心理，激起学生迫切的学习要求，是适合初中学生学习心理的教学方法。

所谓设置悬念心理是借用文艺评话、章回小说中经常用的“欲知后事如何，且听下回分解”的手法，在故事情节发展到紧要关节时嘎然刹住，引而不发，使观众或读者产生一种欲知不知，欲罢不能，非要继续听或者看下去不可的心理要求。教师在入门阶段，若能有效地设置“悬念”，充分利用初中学生的好奇心和好胜心，并使之不衰，将取得很好的学习效果。

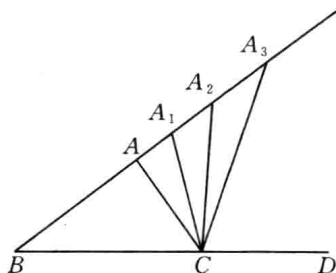


图 1-1-10

例如，为了使学得出“三角形外角大于任何一个不相邻的内角”的结论，教师在画出图 1-1-10 后，可提出下面这些问题：

- ① $\angle ACD > \angle B$ 吗？ $\angle A_1CD$ 、 $\angle A_2CD$ 呢？
- ② $\angle B$ 是一个不变量，而 $\angle A_1CD$ 、 $\angle A_2CD$ 、 $\angle A_3CD$ 逐渐减小，是否仍有 $\angle A_3CD > \angle B$ ？
- ③ 你可以得出什么结论？

这一组系列问题使学生“找结论”的思维之弦绷得很紧，学生处于急切地要找出结论的心态之中。这样，所得到的结论，即使是由教师小

结出来的,学生也会记得很牢。

(3) 设置疑惑心理,激发学生解疑要求。思维是由人们的认识需要引起的。南宋的朱熹说:“读书无疑者,须教有疑,有疑者,却要无疑,到这里方是长进。”“群疑并兴,寝食俱废,乃能骤进。”* 在教学中设疑,就会引起学生释疑的要求。根据教材内容,可以设计一些有障碍的问题,让学生在操作或练习中发生障碍而激起疑问。例如,为引起学生学习三角形三边关系的兴趣,事先准备好三组长分别为 7cm、8cm、9cm; 4cm、6cm、10cm; 4cm、5cm、10cm 的铁丝。指定三位学生到讲台前分别用上述三组铁丝组成三角形(采用磁性黑板最好)。由于学生有“三条线段可以组成首尾相接的三角形”的原始想法,学生对做这一实验很有信心。然而实验结果只有第一组铁丝才能组成三角形,再让学生上台演习,仍是这个结果,这是为什么呢?对原始想法“三条线段可以组成首尾相接的三角形”产生怀疑,很快会想到:能搭成三角形的三条边应有什么关系?给教师教学“三角形任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边”定理,创设了思维的情境。

(4) 帮助学生掌握正确的思维方法,培养正确的思维方式,抓住学习几何的关键,提高学习自信心,是改进教学方法的重要方面。

“两头凑”是入门阶段分析思维活动的主要方式,即从“已知”向“结果”靠拢,从“结果”分析需要条件,向“已知”靠。例如证明“邻补角的平分线互相垂直”的教学程序,可以这样进行:

① 从“已知”想:已知两个角互为邻补角,由它们的顶点引出两条角平分线;“结论”是:这两条角平分线互相垂直。

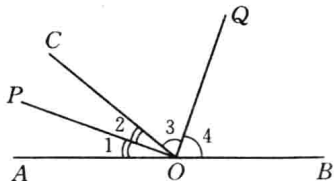


图 1-1-11

② 让学生根据命题画图(如图 1-1-11),把题设条件和结论用符号语言表示出来。

已知: $\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 互为邻补角, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ 。

求证: $OP \perp OQ$ 。

* 朱熹:《学规类编》卷四,第 38 页。

分析:从“结论”看:为证 $OP \perp OQ$, 要证什么? 为什么? 根据两直线垂直定义, 只须证 $\angle POQ = 90^\circ$, 即证明 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ 。从“条件”看, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, 所以只要证 $2(\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ$, 这可从已知条件 $\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 是邻补角直接得到。

③ 教会学生将上述分析画成分析示意图:

由“结论”: 为证 $OP \perp OQ \Leftrightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

由“条件”: $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ } $\rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

④ 引导学生思考分析示意图, 寻找证题思路。(略)

(5) 采用由浅入深、由粗及细的方法, 促使学生产生学习概念的兴趣。

有些几何概念, 在初学时不要求定义得十分严格, 比如直线、射线和线段, 如要求学生刚开始接触就完全掌握, 只会导致他们死记硬背, 这种学习方法是不足取的。教学时尽可能用学生熟悉的事例, 或配以图形, 帮助学生学习并掌握概念是十分重要的。比如关于“过两点可以连结一条直线”, 可采用提问方式引进: “有一条木条, 至少用几只钉子可以把这木条钉在天花板上?” 学生会很快地回答“两只”, 教师再作归纳: 过两点可以确定一条直线, 这是欧氏平面几何作图的一条公法。用这种方法讲述远比干巴巴的叙述公法要有效得多。

在不失严密性的前提下, 给概念赋予一定的趣味性, 也是符合学生心理特点的。比如, 为了加深对“点动成线”的理解, 可以先给学生猜谜语: “千条线、万条线, 落到水中都不见。”再如, 为了区分直线、射线和线段之间的异同点, 可提出下面问题给学生回答: “下面是一只小白兔和一只小灰兔的对话, 你认为它们说得对吗? 为什么?”

白兔: “我的家在线段的一端。”

灰兔: “我的家在线段的另一端。”

白兔: “我的家在射线的一端。”

灰兔: “我的家在射线的另一端。”

白兔: “我的家在直线的一端。”

灰兔: “我的家在直线的另一端。”