



"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

# 复变函数 与积分变换

第四版

华中科技大学数学与统计学院

李红 谢松法



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



“十二五”普通高等教育  
国家级规划教材

# 复变函数与积分变换

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

## 第四版

华中科技大学数学与统计学院

李 红 谢松法



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书介绍复变函数与积分变换的基本概念、理论和方法。全书共分9章,主要内容包括:复数与复变函数,解析函数,复变函数的积分,解析函数的级数表示,留数及其应用,共形映射,解析函数在平面场的应用,傅里叶变换,拉普拉斯变换等。

本书中每章的后面给出本章小结及若干思考题,便于读者复习和总结;同时每章还配备了一定数量的习题并在书后给出习题的答案或提示。附录中附有傅氏变换简表和拉氏变换简表,可供学习时查用。

本书可作为高等院校工科类专业学生的教材,也可供相关专业科技工作者和工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/李红,谢松法编. —4版. —  
北京:高等教育出版社,2013.11  
ISBN 978-7-04-038606-6

I. ①复… II. ①李…②谢… III. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 IV.  
①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第244355号

策划编辑 李晓鹏 责任编辑 李晓鹏 特约编辑 师钦贤 封面设计 张申申  
版式设计 董丹 插图绘制 郝林 责任校对 窦丽娜 责任印制 刘思涵

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
印 刷	山东鸿杰印务集团有限公司		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
开 本	880mm×1230mm 1/32	版 次	1999年8月第1版
印 张	8.5		2013年11月第4版
字 数	230千字	印 次	2013年11月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	19.00元
咨询电话	400-810-0598		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 38606-00

# 第四版前言

本教材自1999年出版第一版以来,已经走过了14个年头,其间经过多次修订,已日渐成熟。本教材的主要特点是取材合理、概念清楚、内容流畅、易于教学。

在2008年出版了第三版后,经过5年来的使用,编者发现教材中还存在一些问题需要改进。同时,编者围绕教材进行了许多配套性的建设工作,比如教学方式的改进、教学工具的开发以及立体化教材的建设,等等。为此,对教材重新进行了修订,使得新版教材更为完善。

同时,我们对与教材配套使用的辅导教材也进行了同步修订,在内容安排以及典型例题等方面都进行了较大的改进。此外,读者还可登录国家级精品课程网站(<http://jpkc.hust.edu.cn/ec3.0/C35/index.asp>)了解更丰富的教学资源。

五柳先生有云:“奇文共欣赏,疑义相与析”,衷心希望读者通过学习本教材,能够获得一份学习上或者教学上的享受,并让我们共同分享您的使用心得。同时,在教材的使用过程中,如果发现什么问题和错误,欢迎您及时与编者联系。

编者

hongli@hust.edu.cn

xiesongfa@126.com

2013年3月于华中科技大学

## 第三版前言

复变函数理论以其完美的理论与精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分,它产生于18世纪,并在19世纪得到了全面的发展。欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯、柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯等为这门学科的创建与发展做了大量的工作。20世纪初,米塔-列夫勒、庞加莱、阿达马等进一步开拓了复变函数理论的研究领域,为这门学科的发展做出了重要贡献。复变函数理论不仅对数学领域的许多分支产生了重要的影响,而且在其他学科中得到了广泛的应用。

复变函数与积分变换是工科相关专业的一门重要基础课程,通过本课程的学习,使学生掌握复变函数的基础理论和方法,重点掌握解析函数、柯西定理与柯西积分公式、留数、共形映射等内容,以及掌握傅里叶变换与拉普拉斯变换的性质与方法,为有关后续课程的学习奠定必要的数学基础。

本教材的第一版于1999年由高等教育出版社出版,2003年经修订后出版了教材的第二版,并同时出版了与之配套的辅导教材《复变函数与积分变换学习辅导与习题全解》。本教材具有概念明确、重点突出、循序渐进、便于教学等特点,自出版以来一直为全国不少高等院校相关专业的教师和学生所选用,曾多次重印。

俗话说“十年磨一剑”,本教材从第一版算起到现在正好进入第十个年头,为了使其更趋成熟与完善,我们针对第二版教材的不足又进一步进行了修改,订正了原教材中的一些印刷错误和不确切的文字叙述,并形成第三版教材提供给广大读者。新版教材保持了原教材的风貌,仍然分为九章,其中前七章为复变函数的内容,后两章为积分变换的内容。除了第七章解析函数在平面场的应用作为选讲内容之外,其余八章内容的教学大约需要40学时。

本教材主要面向工科专业,在编写上尽力做到重概念、重方法与重应用。一方面,注重概念、定理的精确性、严密性与科学性,强调概念、定理的产生过程中所蕴含的思想方法;另一方面,在保证科学性的基础上,切实贯彻“以理论为指导,以应用为目的”的原则,减少某些理论推导,注重学生的基本运算能力和实际应用能力。每章后面的小结除对本章主要内容进行简要的总结外,还对某些内容在概念与方法上作了进一步阐释,以帮助学生从细节的掌握升华到对整体的认识,使学生“既见树木,又见森林”。每章后面还设置了一定数量的思考型题目,用于启发并训练学生的独立思考能力和分析能力。

借第三版出版之际,再次感谢各位教师与新老读者对本教材的信任与支持,对华中科技大学数学系领导和同仁们给予的热情帮助也再次表示衷心的感谢,并向本教材的出版、发行人员所付出的辛勤劳动表示诚挚的谢意。

限于编者水平,不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。特别是在本教材的使用过程中,如果有什么问题和建议,欢迎您及时与编者取得联系。

编 者

lhlh0125@163.com

xiesongfa@126.com

2008年3月于华中科技大学

## 第二版序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中，“工程数学”一直是属于具有重要地位的课程系列。当前，革新之风正吹遍高等教育界，课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨。在此形势下，工程数学课程经受了严峻的考验，它作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课，其地位丝毫没有动摇。

然而，这绝不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺；更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为。恰好相反，面对现代科学技术飞速发展的形势，面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待，数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫！正是意识到时代的需要与自己的职责，我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者。

华中科技大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法，先后编写了百余万字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼，逐步趋于完善。应该说，本套教材正是这一长期探索过程的产物，它凝结了华中科技大学数学系几代教师的心血。当然，具体执笔的教师对教材的最终成型作出了决定性的贡献。

本套教材分《线性代数》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版。编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求；在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要，注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力；在表述上力求清晰易读，便于教学与自学。本套教材配备了较丰富的例题与习题，它们大多源于教师在自身教学中的积累，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义。书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考。本套教材可供高等学校理工

科各专业(非数学)使用。

本套教材的编写自始至终得到华中科技大学教务处及数学系的支持,也得到华中科技大学数学系全体教师的协助与鼓励。高等教育出版社的宝贵支持,使本套教材得以顺利出版。对此,我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2003年5月于武汉



## 第二版前言

本书是在《复变函数与积分变换》(高等教育出版社1999年出版)的基础上,广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的。从这几年使用第一版教材的高校教师的反馈情况来看,普遍认为本教材取材合理、叙述清楚、简明精要、易于教学、每章后的小结便于学生提纲挈领地掌握本章内容。因此,新版在主要内容和结构框架上未作大的改动,但从教学角度出发对语句进行了仔细的推敲,改写了一些陈述,调整了例、习题的配置。

总的来说,新版保持了原书简明精要、逻辑严谨、论述清晰、例习题丰富、实用性强、便于自学等特色。另与本教材配套的学习辅导教材即将由高等教育出版社出版。

对曾使用过第一版教材的各位教师和读者表示衷心的感谢,正是依据你们使用后的意见,作者在第二版中修正了不少错漏,使得本书更趋完善。

本书共分九章,外加两个附录,其中第一、二、三、四、五及第七章由李红教授执笔;第六、八、九章及附录由谢松法副教授执笔。胡适耕教授审阅、修改,并作了详尽的具体指导。

编者

2003年5月于华中科技大学

# 第一版前言

复变函数课程的主要内容是讨论复数之间的相互依赖关系,其主要研究对象是解析函数。

复变函数论是一门古老而富有生命力的学科。早在 19 世纪,柯西,魏尔斯特拉斯及黎曼等人就已给这门学科奠定了坚实的理论基础。作为一种有力的工具,复变函数论广泛地应用于自然科学的众多领域,如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、地质学及自动控制学等等。

一般而言,积分变换是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换。这里所说的积分变换是指傅里叶变换与拉普拉斯变换,它与复变函数有着密切的联系。它的理论与方法不仅在数学的许多分支中,而且在其他自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用,它已成为不可缺少的运算工具。

复变函数又称复分析,是实变函数和微积分的推广与发展。因此它不仅在内容上与实变函数和微积分有许多类似之处,而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似。当然,复变函数也有自身的特点,有自己的研究工具和方法,在学习过程中,应注意与微积分理论的比较,从而加深理解,同时须注意复变函数本身的特点,并掌握它自身所固有的理论和方法。

积分变换与复变函数一样,也是在实变函数和微积分的基础上发展起来的,因此在学习中也应特别注意分清异同点,这样才能抓住要点、融会贯通。

编写本书的主要目的是为理工科本科生提供一本比较系统完整的“复变函数与积分变换”教材。编者一方面汇总了国内同类教材的主要优点;另一方面融合了我校众多教师长期讲授该门课程的经验体会,力

求思路清晰、推证简洁且可读性强,从而满足广大师生的教、学需求。

本书在每章后精心设计了“小结”,可帮助读者更清楚地把握学习要点,更深刻地理解该章的主要学习内容。大部分章节还给出了思考题,帮助读者对所学内容进行检验,启发并训练读者的独立思考能力与分析能力。全书习题经过教学实践不断积累和更新,其内容涵盖了全书主要讲授内容的基本概念、基本理论和基本方法。既有一般的基础习题,也有难度较大的提高题。书末除对计算题给出答案外,还对有些必要的难题给出了提示,其目的在于帮助读者尽快掌握本书所讲授的内容。

本书适当地介绍了本学科与其他学科之间的联系,给出了一些实际应用问题以帮助读者加深对课程的理解,培养解决实际问题的能力,从而达到学为所用的最终目的。

目录中打“\*”号的章节,可根据各专业的不同需要选用。在本书的完成过程中,自始至终得到了本校数学系领导和同仁们的大力支持,没有他们的热情鼓励和帮助,本书不可能如期顺利出版,在此向他们表示衷心的感谢!

本书共分九章,外加两个附录,其中第一、二、三、四、五及第七章由李红副教授执笔;第六、八、九章及附录由谢松法副教授执笔。胡适耕教授审阅、修改,并作了详尽的具体指导。

编 者

1999年4月于武汉

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

<b>第一章 复数与复变函数</b> .....	<b>1</b>
§ 1.1 复数 .....	1
§ 1.2 复数的三角表示 .....	5
§ 1.3 平面点集的一般概念 .....	14
§ 1.4 无穷大与复球面 .....	19
§ 1.5 复变函数 .....	21
本章小结 .....	26
思考题 .....	27
习题一 .....	27
<b>第二章 解析函数</b> .....	<b>30</b>
§ 2.1 解析函数的概念 .....	30
§ 2.2 解析函数和调和函数的关系 .....	36
§ 2.3 初等函数 .....	40
本章小结 .....	50
思考题 .....	51
习题二 .....	51
<b>第三章 复变函数的积分</b> .....	<b>54</b>
§ 3.1 复积分的概念 .....	54
§ 3.2 柯西积分定理 .....	59
§ 3.3 柯西积分公式 .....	66
§ 3.4 解析函数的高阶导数 .....	71
本章小结 .....	74
思考题 .....	75
习题三 .....	75

<b>第四章 解析函数的级数表示</b> .....	<b>78</b>
§ 4.1 复数项级数 .....	78
§ 4.2 复变函数项级数 .....	82
§ 4.3 泰勒(Taylor)级数 .....	88
§ 4.4 洛朗(Laurent)级数 .....	93
本章小结 .....	100
思考题 .....	101
习题四 .....	101
<b>第五章 留数及其应用</b> .....	<b>103</b>
§ 5.1 孤立奇点 .....	103
§ 5.2 留数 .....	112
§ 5.3 留数在定积分计算中的应用 .....	121
* § 5.4 对数留数与辐角原理 .....	127
本章小结 .....	132
思考题 .....	133
习题五 .....	133
<b>第六章 共形映射</b> .....	<b>136</b>
§ 6.1 共形映射的概念 .....	136
§ 6.2 共形映射的基本问题 .....	140
§ 6.3 分式线性映射 .....	143
§ 6.4 几个初等函数构成的共形映射 .....	156
本章小结 .....	164
习题六 .....	165
* <b>第七章 解析函数在平面场的应用</b> .....	<b>167</b>
§ 7.1 复势的概念 .....	167
§ 7.2 复势的应用 .....	173
§ 7.3 用共形映射的方法研究平面场 .....	178
本章小结 .....	181
思考题 .....	182
习题七 .....	182

<b>第八章 傅里叶变换</b> .....	<b>183</b>
§ 8.1 傅里叶变换的概念 .....	183
§ 8.2 单位冲激函数( $\delta$ 函数) .....	192
§ 8.3 傅里叶变换的性质 .....	197
本章小结 .....	209
习题八 .....	210
<b>第九章 拉普拉斯变换</b> .....	<b>213</b>
§ 9.1 拉普拉斯变换的概念 .....	213
§ 9.2 拉氏变换的性质 .....	217
§ 9.3 拉普拉斯逆变换 .....	227
§ 9.4 拉氏变换的应用及综合举例 .....	230
本章小结 .....	234
习题九 .....	235
<b>附录 1 傅氏变换简表</b> .....	<b>238</b>
<b>附录 2 拉氏变换简表</b> .....	<b>241</b>
<b>部分习题答案</b> .....	<b>246</b>

# 第一章

## 复数与复变函数

复变函数论中所研究的函数的自变量与因变量均取复数. 因此, 首先对于复数域以及复变量的函数要有清晰的认识. 本章论述复数的基本概念、复数的四则运算、复数的三角表示、平面点集的一般概念及其复数表示, 以及复变量连续函数. 复数的概念、四则运算以及三角表示在现行中学数学课本中已经涉及, 但可能有的读者未曾学到, 因此这里仍从头开始, 由于复数全体可以同平面上的点的全体作成一一对应, 所以平面点集以后经常要用到. 这里仅介绍平面点集的一般概念, 学习将某些简单的平面点集用含复变量的等式或不等式来表示的方法. 关于复变函数, 本章主要讨论连续函数的性质, 许多定义与结果从形式上看与微积分中所学的颇为相似, 但意义已不尽相同. 希望读者在开始学习时就特别留意.

### § 1.1 复数

#### § 1.1.1 复数的基本概念

我们将形如  $z = x + iy$  的数称为复数, 其中  $i$  称为虚数单位, 并规定  $i^2 = i \cdot i = -1$ , 或  $i = \sqrt{-1}$ ;  $x$  与  $y$  是任意实数, 依次称为  $z$  的实部 (real part) 与虚部 (imaginary part), 分别表示为

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y.$$

例如, 对复数  $z = \sqrt{2} + i$ , 有

$$\operatorname{Re} z = \sqrt{2}, \operatorname{Im} z = 1.$$

当  $y = 0$  时,  $z = x + iy = x + i0$ , 我们就认为它是实数  $x$ ; 当  $x = 0$



时,  $z = x + iy = 0 + iy$ , 我们称它为**纯虚数**, 并且就写作  $iy$ . 例如,  $2 + 0i$  就是实数  $2$ ;  $0 + 3i$  是纯虚数, 可以写成  $3i$ ; 而  $0 + 0i$  既可看作实数  $0$ , 也可以看作纯虚数  $0i$ .

设  $z_1 = x_1 + iy_1$  与  $z_2 = x_2 + iy_2$  是两个复数. 如果  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ , 则称  $z_1$  与  $z_2$  **相等**. 由此得出, 对于复数  $z = x + iy, z = 0$  当且仅当  $x = y = 0$ .

设  $z = x + iy$  是一个复数, 称  $x - iy$  为  $z$  的**共轭复数**, 记作  $\bar{z}$ . 易知  $\overline{(\bar{z})} = z$ . 共轭复数有很多用处, 后文将逐步介绍.

### § 1.1.2 复数的四则运算

设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  是两个复数. 定义复数的**加法**为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.1)$$

复数的**减法**是加法的逆运算. 如果存在复数  $z$  使  $z_1 = z_2 + z$ , 则  $z = z_1 - z_2$ , 因此得到

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.2)$$

定义复数的**乘法**为

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.3)$$

例如,

$$\begin{aligned} & (2 - 3i)(4 + 5i) \\ &= [2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5] + i[2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4] \\ &= 23 - 2i. \end{aligned}$$

由乘法定义可验证

$$i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1.$$

复数的**除法**是乘法的逆运算. 当  $z_2 \neq 0$  时, 我们说: “ $z_1$  除以  $z_2$  得到商  $z$ ”, 意思就是

$$z_1 = z_2 \cdot z.$$

从这个式子我们来求  $z$ . 记  $z = x + iy$ . 由于

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= (x_2 + iy_2)(x + iy) \\ &= (x_2 x - y_2 y) + i(x_2 y + x y_2), \end{aligned}$$

根据两个复数相等的定义, 得到