高等院校经济管理系列教材

应用运筹学

YINGYONG YUNCHOUXUE

周晓光 曹勇 李宗元/编著

第三版

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

高等院校经济管理系列教材

应用运筹学

YINGYONG YUNCHOUXUE

周晓光 曹勇 李宗元/编著

第三版

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

应用运筹学/周晓光，曹勇，李宗元编著. —3版. —北京：经济管理出版社，2013.10
ISBN 978-7-5096-2718-1

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①周… ②曹… ③李… Ⅲ. ①运筹学 Ⅳ. ①022

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第247613号

责任编辑：张　艳　丁慧敏
责任印制：黄　铄
责任校对：超　凡

出版发行：经济管理出版社
（北京市海淀区北蜂窝8号中雅大厦A座11层 100038）
网　　址：www.E-mp.com.cn
电　　话：(010)51915602
印　　刷：三河市延风印装厂
经　　销：新华书店
开　　本：720mm×1000mm/16
印　　张：24
字　　数：364千字
版　　次：2013年11月第3版　2013年11月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5096-2718-1
定　　价：36.00元

目　　录

第一讲　运筹学的 ABC

提要:本讲从学科的高度,深入阐述了运筹学的成就、信念和能力。在总结概括了 40 多篇代表性文献的基础上,重点论述了运筹学的三个来源:军事、管理与经济,以及三个组成部分,即运用分析理论、竞争理论及随机服务理论。在第三部分中,扼要论述了运筹学的方法论。

运筹学的 ABC,也就是运筹学的成就(Achievement)、信念(Belief)和能力(Capability)。几年前,运筹学家哈维 · 瓦格纳(Harvey Wagner)发表过同样题目的文章,实际上他论述了运筹学的过去、现在和未来。这样的题目,对我来说,是太大了,恐怕讲不好。

我想讲一下运筹学的:①三个来源;②三个组成部分;③解决问题的一种模式。这也可以简称为运筹学的“三三一”,它蕴涵着运筹学的 ABC。

第一节　运筹学的三个来源

任何一门科学都不是突然诞生的,运筹学也不例外。运筹学问题和朴素的运筹思想,可以追溯到古代,它和人类实践活动的各种决策并存。直到 20 世纪初,并延续到 30 年代末 40 年代初,在烽火硝烟的战争中,正式诞生了运筹学。

运筹学有三个来源:军事、管理、经济。下面我们来分别进行讨论。

一、军事

军事是运筹学发源地之一，是运筹学的一个大好的舞台。事实上，运筹学(Operational Research; Operation's Research，简称 OR)的原意，可称为作战研究。我们中文的运筹学是根据“运筹帷幄之中，决胜千里之外”而来的。这是汉高祖刘邦称赞张良的话，取其义而用之，把 OR 翻译成运筹学。

美国军事运筹学会 1981 年出版了一本书，书中第一句话，就是说孙武是世界上第一个军事运筹学的实践家。我认为把孙武称为世界上第一个军事运筹学家，是非常恰当的。在著名的《孙子兵法》中，他在质的论断中，渗透着深刻的量的分析。在“计篇”中，他认为，应当从政治、天时、地利、帅和法制五个方面，对敌我双方的优劣条件，进行全面的估计和分析，来估量战争的胜负。这是从全局的观点来分析战争，指出：“知之者胜，不知者不胜”。在“计篇”中，他指出了算计和谋划对于决定战争胜负的重要性。在“谋攻”篇中，他指出：知己知彼，百战百胜；知彼不知己或知己不知彼，胜负各半；既不知己也不知彼，仗仗皆输。在此处，军事运筹学家孙武的论断中就有数量分析。军事运筹问题和运筹学思想的例子，还是很多的，比如田忌赛马、围魏救赵、行军运粮等。

同样，在国外，运筹思想也可追溯到很早很早以前。如阿基米德、伦纳多·达·芬奇、伽利略，都研究过作战问题。第一次世界大战时，英、美均有应用运筹学的例子。1916 年，英国的兰彻斯特(Lanchester)发表了一个有名的小册子，指出了数量优势、火力和胜负的动态关系，即后来被人们称之为兰彻斯特方程。美国的爱迪生为美国海军咨询委员会研究了潜艇攻击和潜艇回避攻击的问题。这些工作对第二次世界大战中运筹学的产生是有影响的。

1939 年，英国的鲍得西研究站研究了新研制的对空雷达警戒系统如何和老的作战指挥系统配合的问题，指出了从整个控制系统的角度上分析通信系统的有效性。这些研究人员就是第二次世界大战中最早从事运筹学的科学工作者。后来，战争爆发后，又研究了雷达探测和其他的运筹问题。当时，德国飞机经常来袭，他们观察和研究了地面控制、拦截系统的使用情况，对夜间战斗的各阶段进行了分析，提出了改革措施。他们的这一研究报告，是以后运筹研究报告的样

本。从学术思想上，他们的研究蕴涵着整体性的概念和系统分析的思想。

当德国对法国等几个国家发动攻势时，英国动用了十几个国土防空中队的飞机和德国飞机作战。这些飞机中队必须由大陆上的机场来维护和操作，英国飞机损失率是很高的。与此同时，法国总理要求给他增援 10 个中队的飞机。丘吉尔决定同意这个要求。运筹人员得知此事后，要求参加讨论此军事问题的内阁会议，在会上表示反对这一决定。运筹人员进行了一项快速研究，说明如果补充率不变，损失率不变，飞机数量的下降是非常快的，并且用一些图和表来说明问题，使英国军政首脑一看便懂。简单一句话概括："以现在的损失率持续两周，法国或在英国的'飓风'式战斗机便一架也不存在了。"同时再把一些图表摆在丘吉尔首相面前。这些图表神极了！结果，不仅法国要求增援的 10 个中队的飞机没有派去法国，就连当时已在法国的中队，除留下 3 个中队外，其余全部在几天内返回英国。实践证明这一决策是正确的。从这一研究中，运筹学研究人员为决策者提供的不是作战的事实或孤立的数据，而是把数据和事实进行加工成为决策的定量信息。同时，我们可以看到，运筹学报告要尽量用图和表，用浅显易懂的语言。这些经验直到现在还是有用的。

第二次世界大战中所研究的军事运筹问题是很多的。例如，搜索潜艇问题、护航问题、布雷问题、轰炸问题、运输问题等，有兴趣者可参看参考本讲文献[4]~[7]。早期一般性质的运筹问题的研究，均收集在参考文献[2]中。

第二次世界大战的军事运筹问题及其解决方法，有如下的特点：①数据是实践中的真实数据；②解决问题的人员组成是多学科的；③处理问题的方法渗透着物理学的思想。

二、管理

运筹学的第二个来源是管理。管理的范畴很广，企业管理是管理领域中最活跃、最先进的部分。企业管理经历了三个时期：①手工式管理时期；②机械化管理时期；③系统化管理时期。

小农经济或小手工业经济的管理职能，是很简单的，往往是由家长、业主兼雇。他们作计划、安排生产、指挥下属、参加劳动，并在一定的时候进行核算。这

种管理方式，完全凭脑子记忆、思考，凭手或极其简单的工具计算。大规模的机械化生产，使企业管理进入机械化时期。管理职能分化为相对独立的部分，计划、会计、物资、设备、工艺、人事等。与此相适应，簿记、报告和机械式计算器，是管理人员熟练掌握的工具。当前，企业管理处在系统管理时期。

管理是一门技艺，也是一门科学。管理科学，按照国际管理科学会的说法，是把各种科学方法用于管理。在管理科学学术领域中，有三个最有影响的学派：①古典学派；②行为学派；③系统学派。

第一次世界大战前就已诞生并成熟的古典管理学派，对运筹学的产生和发展，影响是非常大的。古典学派的代表人物，有泰勒（Taylor）、甘特（Gantt）、吉尔布雷思（Gilbreth）等。古典管理学派的中心思想是寻求一些方法，使人们自愿地联合和协作，保持个人的首创精神和创造能力，达到增加效率之目的。以此思想为指导，可以详细分析劳动过程中每一个动作及其相应的时间，去掉多余的动作，改进不合理的操作，找出最有效的工作方法。这就是通常所说的泰勒制的部分内容，里面蕴涵着系统分析的思想。泰勒本人对车工非常熟悉，他曾试图找出切削效率和车速、进刀量等因素的数学关系。现在来看，这是一个优选问题。古典管理学派的理论，内容是很丰富的。他们提出了管理的基本原则，研究了机构设置、权限、工厂布局、计划等一系列问题，也提出了举世闻名的刺激性工资制度。甘特所创造的甘特图，用于生产活动分析和计划安排，至今还在实践中应用，并向前发展成为统筹方法。管理实践和管理科学中的许多问题，至今仍是运筹学者重点研究的课题。

三、经济

运筹学的第三个来源是经济。经济学理论对运筹学的影响，是和数理经济学这一学派紧密联系的。数理经济学对运筹学，特别是运筹学中的线性规划的影响，可以从 Qusnay 1758 年在凡尔赛发表的《经济表》算起。当时许多经济学家对数理经济有显著贡献，最有名者是沃尔拉思（Walras），他当时就研究了经济平衡的问题，其数学形式被后来的数理经济学家一而再、再而三地研究和深入发展。20 世纪 30 年代，奥地利和德国的经济学推广了沃尔拉思的工作。1932 年，

Von Neumann 提出了一个广义经济平衡模型。1939 年,苏联的康托洛维奇发表了《生产组织和计划中的数学方法》一书,这些工作都可看做是运筹工作的先驱。

这里,我们需要指出一点:伟大的导师马克思是第一个成功地把数学用于经济研究的无产阶级经济学家。在他毕生致力研究的《资本论》中,处处渗透着量的分析。在关键之处,还蕴涵着新的数学理论的萌芽。虽然在《资本论》这部巨著中并没有大量的数学公式,但是的确存在着深刻的量的分析。实际上,在经济研究的同时,马克思在钻研着数学。在 1858 年他致恩格斯的信中写道:"在制定政治经济学原理时,计算的错误大大地阻碍了我,失望之余,只好重新坐下来把代数迅速地温习一遍。算术我一向很差,不过间接地用代数方法,我很快又会计算的。"在 1863 年致恩格斯的信中,马克思说他本人正在研究微积分,并热情地向恩格斯推荐,认为微积分对恩格斯的军事研究是非常有用的。正如恩格斯所说:马克思是当时唯一能用哲学(正确的方法论)作为指导来研究数学的人。事实上,在沃尔拉思钻研他的数理经济问题的同时,马克思也在研究他所碰到的数理经济问题。二人都在相应的数学理论之前,解决了各自的数理经济问题。沃尔拉思在数学家布劳沃(Brouwer)之前,几乎用了布劳沃后来作出来的不动点定理;而马克思在数学家 Mapkof, Perron, Frobenius 之前,实际上就用了这三位数学家命名的定理。因而,可以说马克思是最早的把数学用于经济研究的经济学家之一。

近卅年来,经济数学和运筹学相互影响,相互促进,共同发展。

运筹学来源于军事、管理和经济,离开了这三个领域,运筹学就会成为无源之水,就会走向歧途,这是实践已证明了的事实。

第二节 运筹学的三个组成部分

任何一门科学都要研究其他科学不研究的一种或几种自然(或社会)现象,它才能独立于科学之林。在运筹学的对象中,哪些现象是它独自深入研究的呢?我们认为,有三类现象:一是机器、工具、设备等如何充分运用的问题,即如何使

运用效率较高；二是竞争现象、战争、投资、商品竞争等；三是拥挤现象，公共汽车排队、打电话、上百货大楼买东西、飞机着陆、船舶进港等。这三类现象，其他科学分支研究比较少。它是运筹学的研究对象，也成为和其他科学分支相区别的标志。但无论怎样看，运筹和管理都是紧密相连的。

根据运筹学所研究的对象和内容，我们认为运筹学有三个组成部分：①运用分析理论；②竞争理论；③随机服务理论即排队论。

一、运用分析理论

运用分析理论，主要包括分配(Allocation)、选址(Location)、资源最佳利用、设备最佳运行等。运用分析中常用的数学方法有：线性规划、非线性规划、网络图、动态规划、最优控制等。

我们以田忌赛马的例子来说明运用分析的基本概念。在此问题中，田忌和齐王各有上、中、下三匹马。田忌的马与齐王的马，分别上对上，中对中，下对下比赛，田总是要输。在肯定已知齐王的马的出场顺序时，田忌的问题就是资源最佳运用的问题。如表 1－1 所示的输赢金额。

在表 1－1 中，正表示田忌赢，负表示输，输赢均为千金。

表 1－1

输赢 齐王 / 田忌	上	中	下
上	－1000	1000	1000
中	－1000	－1000	1000
下	－1000	－1000	－1000

田忌的每一等级的马，均有三种可能的比赛对手。假设齐王的策略给定不变，田忌的问题就是一个分派问题。

令：

$$X_{ij}=\begin{cases}1,\text{表示田忌的 i 种马对付齐王的 j 种马;}\\0,\text{表示田忌的 i 种马不去对付齐王的 j 种马;}\end{cases}$$

$i=1$(上),2(中),3(下);

$j=1$(上),2(中),3(下)。

比如 $X_{ij}=1$,表示田忌的上等马和齐王的上等马比赛。X_{ij}($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$)是未知数,是我们要求出来的。田忌的某种马 i 只能分派对付齐王的一种马 j,这是显然的,即上马只可能和上、中、下马三者之一比赛,中马、下马也是一样。数学表达这句话就是:

$$X_{i1}+X_{i2}+X_{i3}=1,\ i=1,\ 2,\ 3。\tag{1-1}$$

同样,齐王的任意一种马 j,只与田忌的一种马 i 比赛。即:

$$X_{1j}+X_{2j}+X_{3j}=1,\ j=1,\ 2,\ 3。\tag{1-2}$$

把未知量写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{32}\end{bmatrix}\tag{1-3}$$

在式(1-3)中,行元素(即横行 3 个未知量)相加等于 1,即式(1-1);列元素相加也等于 1,即式(1-2)。

式(1-3)所示的矩阵中,任意一行的元素取值为 0 或 1,满足式(1-1)和式(1-2),称为一种可行分派方案。对每一可行方案,田忌赢得的钱数是:

$$\begin{aligned}f=&-1000X_{11}+1000\ X_{12}+1000\ X_{13}\\&-1000X_{21}-1000\ X_{22}+1000\ X_{23}\\&-1000X_{31}-1000\ X_{32}-1000\ X_{33}\end{aligned}\tag{1-4}$$

称式(1-4)为田忌这一问题的目标函数。当然,田忌的目标是使目标函数极大。

对这种分派问题已有非常有效的算法。当然对田忌赛马的问题,两千多年前孙子就已经给出最优解了,即田忌的上马对齐王的中马;田忌的中马对齐王的下马;田忌的下马对齐王的上马。写成矩阵的形式是

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

这是田忌的最优策略。在方案(1－5)中,每一行只有唯一的1;每列也只有唯一的1。可行方案一定具有方案(1－5)的形式。这一问题很小,可行方案只有6个,其他5个可行方案是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这5个可行分派方案田忌分别输3000、1000、1000、1000、1000,只有第一个方案(1－5),田忌可以赢1000,所以它是最优策略。

一百个人分派去做一百份工作,每一份工作只允许一个人去做,每一个人只能做一份工作。若已知每一个人去做每一份工作的效率,问如何分派这一百人的工作,使总效率最高。这是比较大的分派问题,就不像田忌赛马那么简单了。

导弹分派目标、火力分派、人力分派等都是这种分派问题。其一般的数学模型是:

求$\{x_{ij}\}$ $(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n)$,满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall i, \forall j。$$

使得$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$达到极大。其中$c_{ij}$是给定的常数;n是给定的正整数。这种分派问题,最有名的解法是匈牙利算法,利用求图上最短路很有效的Dijkstra算法来解分派问题,也是非常有效的。

分派问题是线性规划问题的特例。

运用分析问题，在很多情况下，可归结为最优化问题，其一般提法是：

给定某一空间 U 和定义在 U 上的泛函 $f(X)$，以某种方式定义了 U 的一个区域 A，求 U 的一点 X^*，满足

$$X^* \in U \tag{1-6}$$

使得

$$\forall X \in A \tag{1-7}$$

有 $f(X^*) \geqslant f(X)$。 (1-8)

称 $f(X)$ 为目标函数，A 为可行方案区域，$X \in A$ 为可行方案，X^* 为最优解。

设 $U = E^n$，即 U 是 n 维欧几里得空间，$f(X)$ 和 $G_i(X)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是定义在 E^n 上的连续可微函数。那么，求 $X^* \in E^n$，满足（b_i 为给定常数）：

$G_i(X) \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$。 (1-9)

使一切满足式（1-9）的 $X \in E^n$，有

$f(X^*) \geqslant f(X)$。 (1-10)

就是一般的数学规划问题。

特别地，当 $f(X)$ 和 $G_i(X)$ 都是线性函数时，就是线性规划问题：

$$\max \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \tag{1-11}$$

$$(P)\begin{cases} A_i^T X \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, m; \\ X_j^T \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, n。 \end{cases} \tag{1-12}$$

其中 $A_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 是行向量，A_i^T 是列向量 A_i 的转置；$X^T = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是列向量 X 的转置。显然，式（1-12）是式（1-9）的特殊形式。$A_i^T X = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ 是向量积，同样 $C^T X = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$。满足不等式（1-12）的 X，称之为可行解，使目标函数 $f(X) = C^T X$ 极大的可行解，称之为最优解。一般地，可行解区域是 n 维欧几里得空间的一个多面体。研究线性规划要用线性代数、凸性和多面体理论。研究非线性规划，则要用到微分学。研究抽象空间的最优化问题，要用微分方程和泛函分析理论。