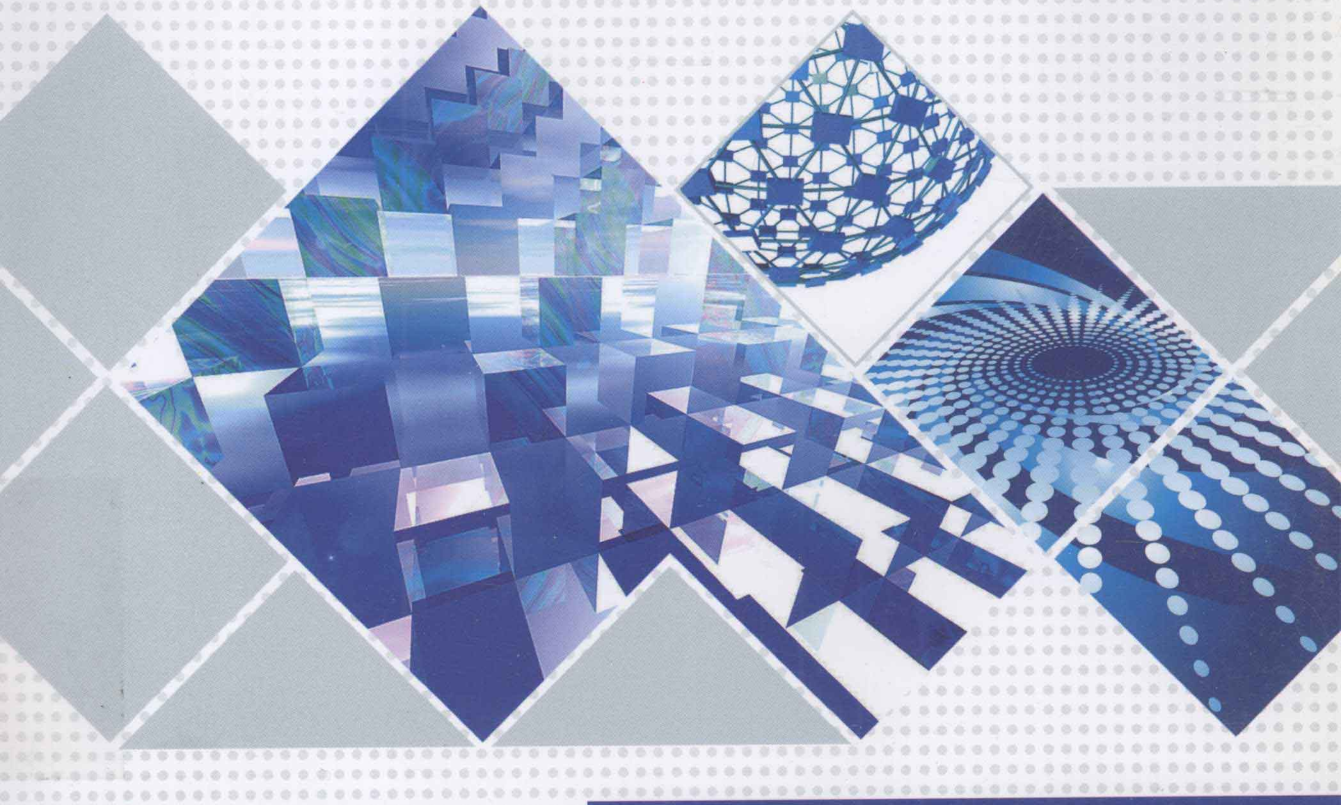
高等教育“十一五”规划教材
公 共 基 础 课 教 材 系 列

高等数学（下）（第二版）

刘春凤　主编



科 学 出 版 社

高等教育"十一五"规划教材

公共基础课教材系列

高等数学(下)

(第二版)

刘春风　主编

马醒花　米翠兰　副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本套书遵循教育部高等院校非数学类专业数学基础教学指导分委会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，传承高等数学的结构体系，体现新形势下教材改革的精神，面向普通高校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成．本套书分上、下两册，上册内容为一元函数微积分和空间解析几何与向量代数（共七章），下册内容为多元函数微积分、级数和常微分方程（共五章）．书末附有习题参考答案．

本书可作为高等工科院校工学、经济学等专业“高等数学”教材，也可作为相关教师、工程技术人员用书和参考书．

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学（下）(第二版）/刘春凤主编．—2 版．—北京：科学出版社，2010

（高等教育“十一五”规划教材・公共基础课教材系列）

ISBN 978-7-03-028598-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 158658 号

责任编辑：沈力匀 张 斌/责任校对：耿 耘

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版	开本：787×1092 1/16
2008 年 8 月修 订 版	印张：17 1/2
2010 年 9 月第 三 版	字数：403 000
2011 年 7 月第 二 次印刷	印数：6 501-13 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（HP04）

编 委 会

第二版前言

信息化时代，实质上是一个数学时代，当今如此广泛称颂的高技术本质上就是一种数学技术.

高等数学以广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域的变量为研究对象，其中所研究的各种数学模型应用广泛，是客观世界中最基本的处理各种关系结构的量化模式，同时，高等数学作为一种宝贵的人类成就，对大学生科学素质的锻造、理性精神的熏陶和分析解决问题能力的培养意义深远，因而成为工科院校最重要的基础课程之一.

进入 21 世纪，随着我国高等教育理念由过去的“精英”教育转向了“大众”教育，教学内容和课程体系的改革在全国深入开展，面向重点大学的具有新思路且嵌入“数学实验”的新教材陆续出现，对教学改革起到了推动和引领作用. 但是，由于缺乏适合自身的新教材，相当一部分普通院校在选用教材时和重点大学保持一致，培养目标和学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教的辛苦，学生学的艰难，教学效果事倍功半.

本书遵循教育部高等学校“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校人才培养的需要，把握“科学、简约、应用、现代”的原则，汇集作者多年教学实践的经验编写而成.

首先，本书传承高等数学的结构体系，将现代数学的观点、思想、符号、术语渗透其中，结构严谨、逻辑清晰、符合认知规律；其次，考虑普通工科院校学生对数学的需求，本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，对繁琐的理论推导进行了适度的约简，增加了大量的图形，对数学的理论和概念，尽可能地通过几何直观，解释其抽象和深刻的内涵，通俗易懂，宜教易学；再次，对数学概念和理论，加强了其产生背景和应用范围的介绍，注重引导学生品味数学源于现实、高于现实的境界，指引学生体会数学与现实中客观现象的密切联系. 例题的选择注意典型、适度、可拓展，阐述数学方法时，由浅入深，注重启发联想，引导探究，力求使读者融会贯通；最后，介绍了 Mathematica 软件在高等数学中的应用，适度嵌入了与高等数学密切相关的数学实验课题，让学生学习使用 Mathematica 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题. 该软件的强大功能和丰富有趣的内容使高等数学如虎添翼，一方面大大拓宽了高等数学的应用范围，另一方面，相对于传统教材，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决. 总之，本书期望在科学素质的锻造、理性精神的熏陶和分析解决问题能力的培养诸方面为学生奠定良好的数学基础.

刘春凤任本书主编，马醒花、米翠兰任副主编，参加编写的有：刘春凤（第 1、2、4、5、7、10、11 章和全书的数学实验），米翠兰（第 3、8、12 章），马醒花（第 6、9 章）. 阎少宏、纪楠（第 1～6 章的习题），杨爱民、彭亚绵（第 7～12 章的习题），全书最后由主编和副主编审阅定稿.

本书得以出版，诚挚感谢河北理工大学教材指导委员会的支持、科学出版社的协作

和北京航空航天大学的李心灿教授的指导性建议.

在本书再版之际，我们对第一版期间收到的专家、学者及使用本书的教师、同学们提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢，真诚的期望能够继续受到关注并且得到使用本书的专家、同仁和读者朋友们的批评指导，不胜感激. 电子邮箱：gdsx-lcf@163. com.

目　　录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

在《高等数学(上)》中，所研究的函数是依赖于一个自变量的函数，但在实际问题中，常常需要考虑含有多个自变量的函数，即多元函数. 例如，植物的生长速度就依赖于土壤、温度、雨量、肥料等多个因素.

本章将在一元函数微分学的基础上，重点讨论二元函数的极限、连续、偏导数、全微分、多元复合函数求导法、极值及几何应用，对于二元以上的函数微分法可类似讨论.

8.1　二元函数

8.1.1　预备知识

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为平面点集，记为

$$E=\{(x,\ y)\mid (x,\ y)\text{ 具有性质}\}$$

例如，平面点集 $E=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是平面上以原点为中心、半径为 1 和 2 的圆环内所有点的集合. 实际上平面点集就是坐标平面的子集.

2. 内点

如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.

3. 开集

如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

4. 边界点

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 点为 E 的边界点，E 的边界点的全体，称为 E 的边界.

E 的内点必属于 E，而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E，如图 8.1 所示，P_1 是 E 的内点，P_2 是 E 的边界点.

注： 如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$，即

$$\mathring{U}(P_0)=\{(x,\ y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

思考　数轴上的邻域、平面上的邻域和空间的邻域有什么异同?

5. 连通集

如果点集 E 内任何两点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为

连通集，如图 8.2 所示.

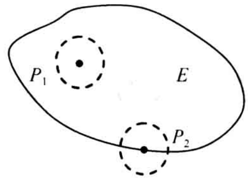


图 8.1

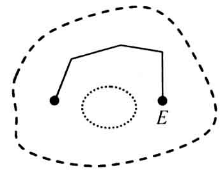


图 8.2

6. 区域(开区域)

连通的开集称为区域或开区域，开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如，$D_1=\{(x,\ y)\mid x+y>0\}$，$D_2=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$为平面区域，而$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=4$是区域$D_2$的边界，如图 8.3 和图 8.4 所示.

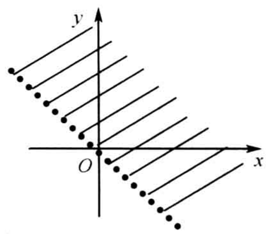


图 8.3

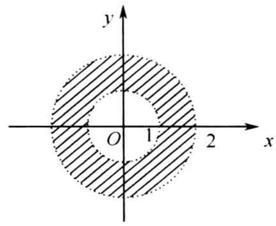


图 8.4

$D_3=\{(x,\ y)\mid x+y\geqslant 0\}$，$D_4=\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$为平面闭区域，如图 8.5 和图 8.6 所示.

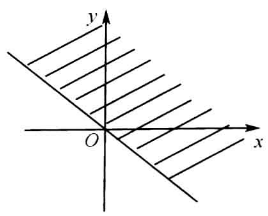


图 8.5

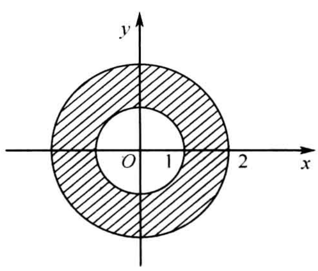


图 8.6

7. 有界区域

对区域D，若存在正数K，使一切点$P\in D$与某定点A的距离满足$|AP|\leqslant K$，则称D为有界区域，否则称为无界区域.

例如，$\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$是有界区域；$\{(x,\ y)\mid x+y>0\}$是无界区域；$\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$是有界闭区域；$\{(x,\ y)\mid x+y\geqslant 0\}$是无界闭区域；$\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 9\}$为空间有界闭区域.

8.1.2　二元函数的概念

我们知道函数就是因变量和自变量之间的对应关系．一元函数是一个自变量与一个因变量之间的对应关系，而一个因变量与两个或多于两个自变量的对应关系就是多元函数．在自然界中，涉及多个变量的这种对应关系很多，例如：

【例 8.1】　长方形的面积 S 与它的长 x 和宽 y 之间有以下关系：

$$S = xy$$

当 x 和 y 在变化范围内取定一对值(x, y)时，S 的值就随之确定．

【例 8.2】　物体运动的动能 W 与物体的质量 m 和运动的速度 v 之间有以下关系：

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

当 m 和 v 在变化范围内取定一对值(m, v)时，W 的值就随之确定．

上面的两例具体意义虽然不同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就得出以下二元函数的定义．

定义 8.1　设变量 x、y 和 z，D 为一非空平面点集，如果对于任意$(x, y)\in D$，按照一定的法则 f，变量 z 总有唯一确定的数值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记为 $z=f(x, y)$．

其中 x、y 称为自变量．当 x、y 取遍 D 内的各个值时，对应的函数值的全体组成的集合称为函数 z 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，D 称为函数 z 的定义域．

类似地，我们把三元函数，四元函数，…，n 元函数分别记作 $f(x, y, z)$，$f(x, y, z, t)$，…，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，或统一记为 $u=f(P)$，$P\in D$．

二元以及二元以上的函数称为多元函数，在后面的讨论中我们主要以二元函数为主，所得结论和性质可以直接推广到三元及其以上的函数．

注：二元函数的两要素是对应关系与定义域．

类似于一元函数，我们约定：二元函数的定义域 D 是使二元函数的表达式有意义的自变量的集合，在实际问题中还要考虑自变量在具体问题中的取值范围．

【例 8.3】　求函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域．

【解】　要使表达式有意义，需要满足 $1-x^2-y^2\geqslant 0$，所求定义域为

$$D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$$

如图 8.7 所示．

【例 8.4】　求函数 $f(x, y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$的定义域．

【解】　要使表达式有意义，需要满足$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leqslant 1\\ x-y^2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\\ x>y^2\end{cases}$，所求定义域为 $D=\{(x, y)\,|\,2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x>y^2\}$，如图 8.8 所示．

注：(1) 当二元函数是几个函数的代数和时，函数的定义域应使得所有的函数都有意义．

(2) 二元函数定义域不一定都是区域．

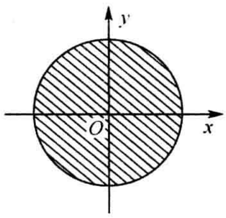


图 8.7

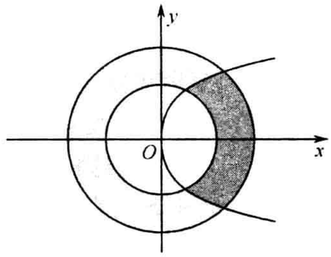


图 8.8

【练习】 求下列函数的定义域.

(1) $z=\ln(x+y-1)$ (2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$,这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时,就得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(图 8.9). 通常我们也说二元函数的图形是空间曲面.

例如,(1) 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,图形为中心在原点的上半球面,如图 8.10 所示.

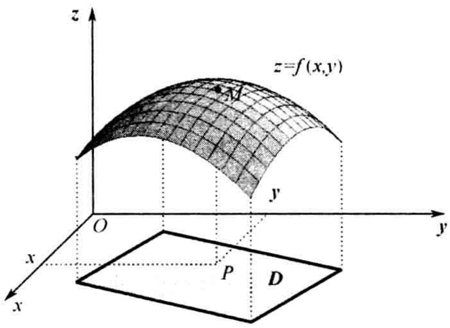


图 8.9

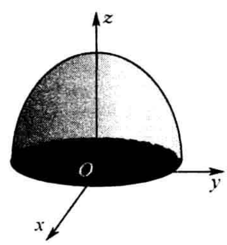


图 8.10

(2) 二元函数 $z=\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}$,图形为顶点在原点的椭圆抛物面,如图 8.11 所示.

三元及其以上的函数没有直观的几何图形.

8.1.3 二元函数的极限和连续

1. 二元函数的极限

在讨论一元函数时,我们是这样描述函数极限的:设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,若当 $x\to x_0$ 时,函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A,即 $|f(x)-A|$ 无限趋近于零,则称当

$x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$（见定义 2.6）. 类似地，二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的极限可以描述如下.

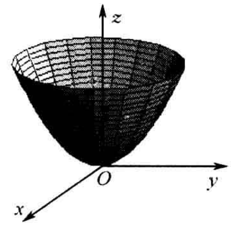


图 8.11

定义 8.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内有定义，A 是常数，$\forall P(x,y) \in \mathring{U}(P_0)$，若当 $P \to P_0$ 时，恒有 $|f(x,y)-A|$ 无限趋近于零，则称当点 $P \to P_0$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

注：函数 $f(P)$ 在点 P_0 有无极限，与函数 $f(P)$ 在点 P_0 的定义无关.

【例 8.5】　设函数 $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{x}$，用定义 8.2 说明 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)=0$.

【解】　$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \sin \dfrac{1}{x}$ 的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid x \neq 0, -\infty < y < \infty\}$$

因为 $\sin \dfrac{1}{x}$ 为有界函数，且 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{x^2+y^2}=0$，所以

$$|f(x,y)-0| = \left|\sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x} - 0\right|$$
$$= \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \cdot \left|\sin \frac{1}{x}\right| \to 0, \quad (x,y) \to (0,0)$$

即

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$$

从形式上看，二元函数的极限定义与一元函数的极限定义极其相似，然而二元函数的极限的获取要比一元函数的极限复杂得多，主要原因如下.

(1) 在平面上，点 $P \to P_0$ 的方向无穷多.

(2) 点 $P \to P_0$ 的路径无穷多.

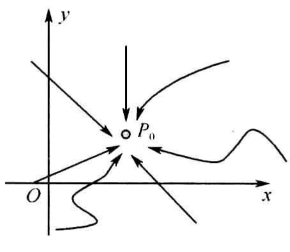


图 8.12

如图 8.12 所示. 因此，当 P 沿某条特定的路径趋向于 P_0 时，有

$$f(x, y) \to A$$

这时不能断定极限是否存在.

例如，函数

$$z=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋向于原点时，即当 $y=0$ 而 $x \to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

当点 $P(x,y)$沿 y 轴趋向于原点时，即当 $x=0$ 而 $y\to0$ 时，

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,\ y)=\lim_{y\to0}f(0,\ y)=\lim_{y\to0}0=0$$

可见它们的极限都存在且相等(均为 0).

但是$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,\ y)$并不存在，这是因为当点 $P(x,\ y)$沿着直线 $y=kx$ 趋向于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然，它是随着 k 值的变化而变化，根据极限的唯一性，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$不存在.

注： 当点 P 沿某条特定的路径趋向于点 P_0 时，$f(x,\ y)$没有极限，或点 P 沿两条不同的路径趋向于点 P_0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)$不相等，则可断定$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,\ y)$不存在，这是证明二元函数极限不存在的常用方法.

【例 8.6】 说明极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在.

【解】 当点 $P(x,\ y)$沿坐标轴 $y=0$ 趋于原点(0, 0)时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2+0}=0$$

当点 $P(x,\ y)$沿曲线 $y=x^3$ 趋于原点(0, 0)时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^6}{x^6+x^6}=\frac{1}{2}$$

因点 $P(x,\ y)$沿不同的路径趋于原点(0, 0)时，函数的极限值不同，所以原极限不存在.

思考 在上例中，若取点 $P(x,\ y)$沿直线 $y=kx$ 趋于原点(0, 0)，因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^3\cdot kx}{x^6+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0$$

由 k 的任意性，能否可以说明极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=0$？为什么？

【练习】 说明$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$极限不存在.

同一元函数求极限一样，利用定义求二元函数的极限是比较麻烦的. 一般来说，可以经过适当变形，借助于我们所熟知的一元函数求极限的方法求二元函数的极限. 如一元函数极限的四则运算法则、两个重要极限、无穷小量的性质等.

【例 8.7】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(\sqrt[3]{x-1}+y)\sin\dfrac{1}{x-1}\cos\dfrac{1}{y}$.

【解】 因为$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(\sqrt[3]{x-1}+y)=0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\cos\dfrac{1}{y}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}(\sqrt[3]{x-1}+y)\sin\frac{1}{x-1}\cos\frac{1}{y}=0\qquad\text{(利用无穷小与有界量的乘积仍是无穷小)}$$

【例 8.8】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

【解】 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta=0$$

注：此例所用的方法叫方向极限法，即用极坐标考虑极限.

当 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 时，$(x, y)\to 0$ 等价于 $\rho\to 0$，这里，

$$f(x, y)=f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)=\rho(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta$$

值得注意的是 θ 不是常数，但无论 θ 如何变化，$(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta$ 总是有界量，所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=0$. 这是一种常用方法，某些极限问题用此法更简便.

【练习】 求极限(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$　(2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

2. 二元函数的连续

回忆一元函数连续定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

现在我们用 $z=f(x, y)$ 代替 $y=f(x)$，用平面上的点邻域

$$U(P_0, \delta)=\{(x, y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

代替直线上的点邻域 $U(x_0, \delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，类似于一元函数的连续定义，不难得出二元函数 $z=f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点的连续定义.

定义 8.3 如果二元函数 $z=f(x, y)$ 满足下面条件：

(1) 二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内有定义

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)$ 存在

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)=f(x_0, y_0)$

则称函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续，点 $P_0(x_0, y_0)$ 称为 $z=f(x, y)$ 的连续点.

若函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上各点都连续，则称函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上连续，也称函数 $z=f(x, y)$ 为区域 D 上的连续函数.

注：连续函数的定义指出了连续与极限的差别仅仅在于前者要求极限值正好等于该点的函数值.

【例 8.9】 讨论函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0，0)处的连续性.

【解】 这是一个分段函数，且 $f(0, 0)=0$，因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{r}=1(r=x^2+y^2)$$