常微分方程习题解答

目 ☆ 录

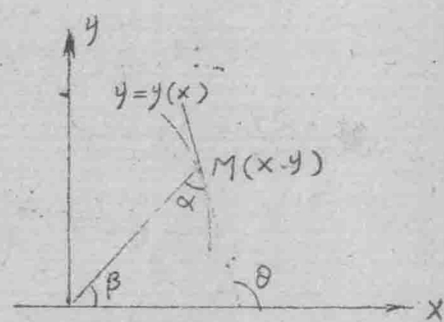
一. §1

1. 已知曲线的切线和切点的矢径相交为定角α，求这曲线所适合的微分方程

解：设曲线方程为$y=y(x)$

过曲线上任一点$M(x,y)$的切线斜率为$y'(x)$，

即$\operatorname{tg}\theta=y'(x)$



过切点M矢径的斜率为

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{x}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}\operatorname{tg}\alpha}$$

解： 即$\left(1-\frac{y}{x}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)y'=\operatorname{tg}\alpha+\frac{y}{x}$

作代换$u=\frac{y}{x}$　则$(1-u\operatorname{tg}\alpha)(u+xu')=\operatorname{tg}\alpha+u$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-u\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha(1+u^2)}du$$

$$\therefore \ln|x|=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{arctg}u-\ln\sqrt{1+u^2}+C_1$$

$$\ln\sqrt{x^2+y^2})=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arcctg}\frac{y}{x}+C_1$$

即$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x}}$

2、已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求这曲线所适合的微分方程

解：过曲线上任意点P的切线方程为：

$$\bar{y}-y=\frac{dy}{dx}(\bar{X}-x)$$

曲线方程为 $y=y(x)$

则有 $y-x\dfrac{dy}{dx}=x$

$$\therefore\ x\frac{dy}{dx}=y-x$$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}y-1$

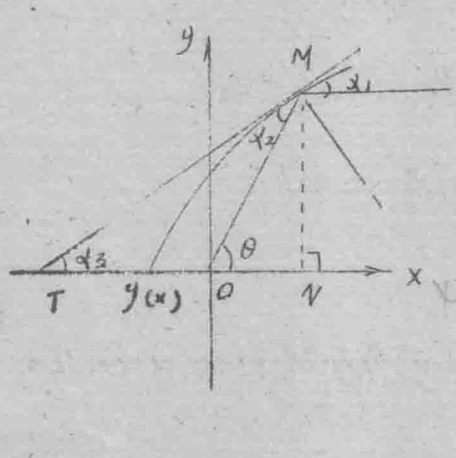
$$\therefore y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(c-\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$$

$$=x(c-\ln|x|)$$

$$=cx-x\cdot\ln|x|$$

3、试求把平行光线集中于一点的曲面镜所适合的微分方程．

解：设光线集中的一点为原点，平行光线的方向为x轴的方向，曲面镜的子午线的方程为 $y=y(x)$，在其上任取一点M $(x\cdot y)$．则 由反射定律得



$$\frac{\pi}{2}-\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\alpha_2$$

$$\therefore\ \alpha_3=\alpha_1=\alpha_2$$

$$\therefore\ \overline{OT}=\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\overline{TN}=x-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=tg\alpha_3=\frac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=-\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

故 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

解之： $ydy = -(xdx + \sqrt{x^2+y^2}dx)$

即 $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -dx$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = -(x+c)$

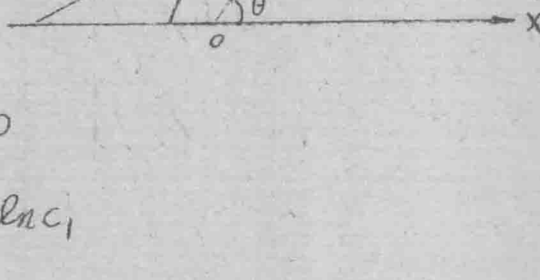
$\therefore x^2+y^2 = (x+c)^2$

即 $y^2 = c(c+2x)$

$\therefore$ 镜面曲线为 $y^2=c(c+2x)$ 线X轴旋转而成

另解：设光线集中的一点为极点，平行光线的方向为X轴方向，曲面镜的子午线的方程为 $r = r(\theta)$，在其上任取一点 $M(r.\theta)$ 则

$\because \alpha_1 = \alpha_2 \qquad \theta = \dfrac{\alpha_1}{2} \qquad \alpha_1 = \dfrac{\theta}{2}$



$\therefore tg(\pi - \dfrac{\theta}{2}) = -tg\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r}{r'}$

即 $\dfrac{dr}{d\theta} = -r\,ctg\dfrac{\theta}{2}$

$\dfrac{dr}{r} + \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta = 0$

$\therefore \ln(r\sin^2\dfrac{\theta}{2}) = \ln c_1$

$r\sin^2\dfrac{\theta}{2} = c_1$

$r = \dfrac{c}{1-\cos\theta}$

故曲面镜是由 $r = \dfrac{c}{1-\cos\theta}$ 绕极轴旋转而成的。

4、试分别求出方程 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t^2-1}$ 过点(0·1)及点(2·1)的积分曲线

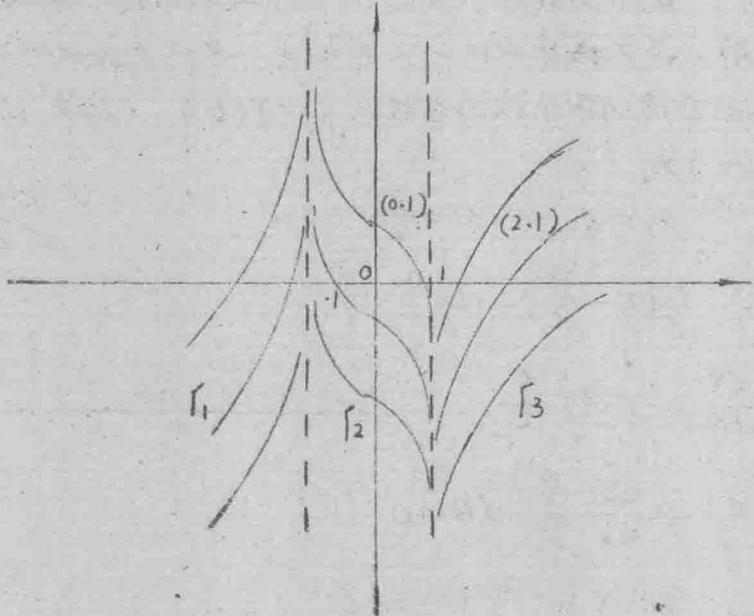
解（参考 P15 例2）

或由 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t^2-1}$ $\quad\therefore dx=\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$\therefore x=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

由过点(0·1) $\quad\therefore C=\ln 2\quad$ 故 $x=\ln 2\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

过点 (2·1) $\quad\therefore C=\ln 3\quad$ 故 $x=\ln 3\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

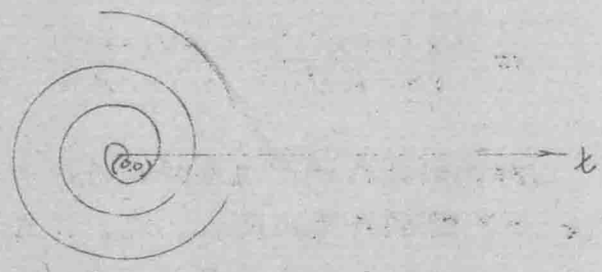


5、试求方程 $\frac{dx}{dt}=\operatorname{tg} t$ 过点(0·0)的积分曲线

解：$\because \frac{dx}{dt}=\operatorname{tg}\alpha$、 α 为曲线的切线与t轴所夹的角

则 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}t$

$\therefore t = \alpha$ 　即为阿基米德螺线



6. 试验证下列函数（曲线）分别是所示方程的解.

1）函数 $x = Ce^{-\alpha t}$（C是任意常数）．方程

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0$$

证：$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \frac{d}{dt}(Ce^{-\alpha t}) + \alpha \cdot Ce^{-\alpha t}$

$$= -\alpha Ce^{-\alpha t} + \alpha Ce^{-\alpha t} = 0$$

2）、3）、（从略）

4）．圆族 $(t-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \gamma^2$ （$\alpha.\beta.\gamma$是任意常数）

方程 $\dddot{x}(1+\dot{x}^2) - 3\dot{x}\ddot{x}^2 = 0$

证：$(t-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \gamma^2$ 　(1)

$2(t-\alpha) + 2(x-\beta)\dot{x} = 0$ 　(2)

$2 + 2[\dot{x}^2 + (x-\beta)\ddot{x}] = 0$

$\therefore \dot{x}^2 + (x-\beta)\ddot{x} = -1$ 　(3)

$$\ddot{x} = -\frac{1+\dot{x}^2}{x-\beta}$$

由(3)得 $2\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x} + (x-\beta)\dddot{x} = 0$

$$\therefore \dddot{x} = \frac{-3\dot{x}\ddot{x}}{x-\beta} = \frac{(-3\dot{x})\left(-\frac{1+\dot{x}^2}{x-\beta}\right)}{x-\beta} = \frac{3\dot{x}(1+\dot{x}^2)}{(x-\beta)^2}$$

从而，$\ddot{x}(1+\dot{x}^2)-3\dot{x}\ddot{x}^2=\dfrac{3\dot{x}(1+\dot{x}^2)^2}{(x-\beta)^2}-3\dot{x}\left(-\dfrac{1+\dot{x}^2}{x-\beta}\right)^2$

$$=\frac{3\dot{x}(1+\dot{x}^2)^2}{(x-\beta)^2}-\frac{3\dot{x}(1+\dot{x}^2)^2}{(x-\beta)^2}\equiv 0$$

7、已知镭的衰减速率与当時镭的存量$R(t)$成正比，设开始時($t=0$)镭的存量为R_0，试求R与t的函数关系．又知经过1600年，只剩下原始存量的一半，试定出比例系数

解：$\dfrac{dR}{dt}=-KR$　　　$\therefore R=ce^{-Kt}$

$\because R(0)=R_0$　　　$\therefore c=R_0$

故 $R=R_0e^{-Kt}$

又当 $R=\frac{1}{2}R_0$時，　$t=1600$

$\therefore \frac{1}{2}R_0=R_0e^{-K\cdot 1600}$　　故 $e^{1600K}=2$

$$K=\frac{\ln 2}{1600}$$

$$\therefore R=R_0e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}=R_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}=R\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

或取 $K=\dfrac{\ln 2}{1600}=\dfrac{0.603}{1600}=0.0004$

$\therefore R=R_0e^{-0.0004t}$

8、设函数$x=\varphi(t)$在区间$\alpha<t<\beta$中是方程$\dfrac{dx}{dt}=f(x)$的解，试证函数$\psi(t)=\varphi(t+C)$（C为任意常数）也是这方程的解，并确定的定义区间

证　$\because \dfrac{d\varphi}{dt}=f(x)$

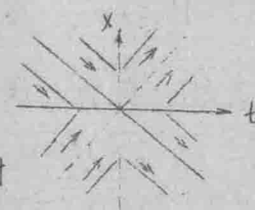
$$\therefore \frac{d\psi}{dt}=\frac{d\varphi(t+c)}{dt}=\frac{d\varphi}{d(t+c)}\cdot\frac{d(t+c)}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=f(x)$$

又 $\because \alpha < t + c < \beta$.

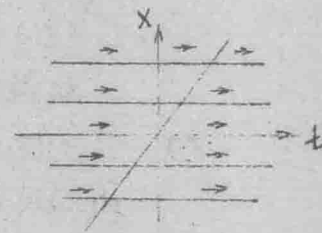
$\therefore \varphi(t)$ 的定义区间为 $\alpha - c < t < \beta - c$.

9、试利用等斜线作出下列方程的方向场，并描出积分曲线

1) $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{|xt|}$



2) $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 0 & 当x \neq t时 \\ 1 & 当x = t时 \end{cases}$

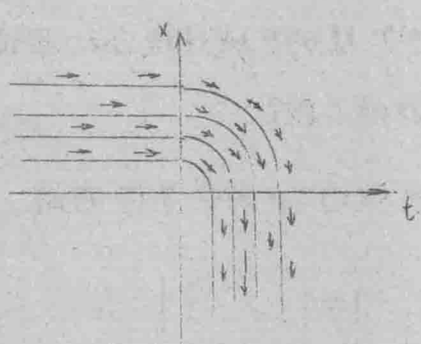


3) $\frac{dx}{dt} = -\frac{|t| + t}{|x| + x}$.

解：3) $-\frac{|t| + t}{|x| + x} = K$

当 $t \leqslant 0$ 時，$K = 0 \quad (x > 0)$

当 $t > 0$，$x \leqslant 0$ 時 $\quad K = \infty$



当 $t > 0$. $x > 0$. $-\frac{|t| + t}{|x| + x} = -\frac{2t}{2x}$

$= -\frac{t}{x} = K$

$K = -\frac{1}{4} \quad x = 4t$. $K = -\frac{1}{2} \quad x = 2t$

$K = -1 \quad x = t$, $\quad K = -2$, $x = \frac{1}{2}t$

$K = -4 \quad x = \frac{1}{4}t$

10、试验证下列方程满足初值问题的解的存在和唯一性定理的条件：

1) 线性方程 $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$

2）黎卡提方程 $\frac{dx}{dt}=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$

其中 $R(t)$、$P(t)$、$Q(t)$ 都是在区间 $a<t<b$ 上连续.

証 (1) $\frac{dx}{dt}=Q(t)-P(t)x$ 令 $f(t,x)=Q(t)-P(t)x$,

$\therefore f(t,x)$ 是两个变量的连续函数.

又 $|f(t,x)|-f(t,\bar{x})|=|(Q(t)-P(t)x)-(Q(t)-P(t)\bar{x})|=|P(t)(\bar{x}-x)|\leq N|x-\bar{x}|$

故满足条件,

2）令 $f(t,x)=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$

由题设知，$f(t,x)$ 在 $D: a<t<b, -\infty<x<+\infty$ 上连续、在 D 的任一有限子域上取 (t,x).$(t,\bar{x})$ 两点. D_1: $a<t<\alpha$ $R<x<S$

$$|f(t,x)-f(t,\bar{x})|=|P(t)(x^2-\bar{x}^2)+Q(t)(x-\bar{x})|$$
$$=|P(t)(x+\bar{x})+Q(t)||x-\bar{x}|\leq(2\varepsilon_1K_1+K_2)|x_1-\bar{x}|$$

其中: $\varepsilon_1=\max(|R|,|S|)$ $P(t)$、$Q(t)$ 的最大值为 K_1、K_2.

11、试讨论方程 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中适合初始值问题的解的存在性和唯一性定理的条件,并验证

$$x(t)=\begin{cases}0 & 当t\leq 0\\ t^{3/2} & 当t>0\end{cases}$$ 和函数 $x(t)\equiv 0$ 都是方程的解.

証 $\because\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|=\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right|=\left|\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right|$

$\therefore$ 方程在 $\begin{cases}-\infty<t<+\infty\\ -\infty<x<0 和 0<x<+\infty\end{cases}$

上适合初始值问题的解的存在唯一定理.

当 $t\leq 0$, $\frac{dx}{dt}=\frac{d0}{dt}=0$ 而 $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}=0$

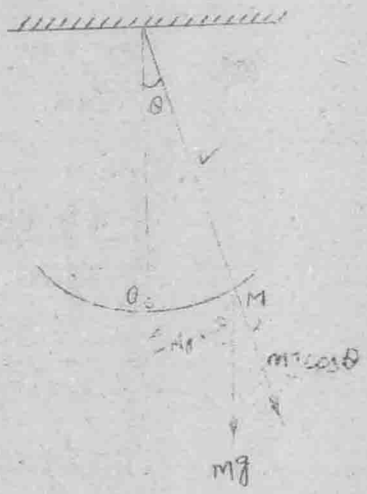
当 $t>0$ $\frac{dx}{dt}=\frac{d(t^{\frac{3}{2}})}{dt}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$ 而 $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore x(t)=\begin{cases}0 & 当\ t\le 0\\ t^{3/2} & t>0\end{cases}$$ 满足 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$

用 $x(t)\equiv 0$ 代入原方程显然成立

$\therefore x(t)\equiv 0$ 是 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 的解.

12. 导出单摆的运动方程



解：取圆弧的最低点为坐标原点，而以 S 表示动点M到O点的弧长，并规定"左负右正"。

若阻力忽略不计，并设运动开始时摆是处于铅直线上，点M的最大偏离时的弧长为 S.

$$\therefore\ m\frac{d^2S}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

又 $\because\ \theta=\frac{S}{l}$

$$\therefore\begin{cases}\frac{d^2S}{dt^2}=-g\sin\frac{S}{l}\\ S(0)=0\quad S'(t)\Big|_{S=S_0}=0\end{cases}$$

— §2

1. $\frac{dx}{dt}=\frac{x(1-t^2)}{t(1+t^2)}$

解：$\frac{dx}{x}=\frac{(1+t^2)-2t^2}{t(1+t^2)}dt$ $\quad\therefore \ln|x|=\int\frac{2dt}{t(1+t^2)}-\int\frac{dt}{t}$

$= 2\ln|\sin(\mathrm{arcctg}\, t)| - \ln|t| + C_1$

$= 2\ln\left|\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right| - \ln|t| + C_1$

$= \ln\left|\frac{t}{1+t^2}\right| + C_1$

$\therefore\ x = C\frac{t}{1+t^2}$

2、$\sec^2 t\cdot \mathrm{tg}\, x\, dt + \sec^2 x\cdot \mathrm{tg}\, t\, dx = 0$

解：$\frac{\sec^2 x\, dx}{\mathrm{tg}\, x} = -\frac{\sec^2 t\, dt}{\mathrm{tg}\, t}$

$$\int\frac{d\,\mathrm{tg}\, t}{\mathrm{tg}\, x} = -\int\frac{d\,\mathrm{tg}\, t}{\mathrm{tg}\, t} + C_1$$

$\therefore\ \ln|\mathrm{tg}\, x| = -\ln|\mathrm{tg}\, t| + C_1$

$\therefore\ \mathrm{tg}\, x = C\,\mathrm{tg}\, t$

3．$\frac{dx}{dt} = \sin x$

解：$\frac{dx}{\sin x} = dt$ $\qquad\therefore \int\frac{dx}{\sin x} = \int dt + C_1$

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int\frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C_2$$

$\therefore\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} = Ce^{t}$

4、$t(x^2-1)\,dt + x(t^2-1)\,dx = 0$

解：$\frac{x\,dx}{x^2-1} = -\frac{t\,dt}{t^2-1}$

$\therefore \ln|x^2-1| = -\ln|t^2-1| + 2C_1$

$\therefore (x^2-1)(t^2-1) = C \qquad (t \neq \pm 1)$

5. $\sqrt{1-x^2}\,dt + \sqrt{1-t^2}\,dx = 0$

解：$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$\therefore \arcsin x + \arcsin t = C$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2$

解：$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \int dt$

$\therefore \operatorname{arctg} x = t + C \qquad (t + C \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

7. $\dfrac{dx}{dt} = ax^2 + bx + C$ 其中a、b、c为常数

解：$\dfrac{dx}{ax^2+bx+C} = dt$

$\therefore \int \dfrac{dx}{ax^2+bx+C} = t + D$

甲. $a \neq 0$. ① 二次三项式无实根

$\because ax^2+bx+C = a[(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2]$

令 $x + \dfrac{b}{2a} = u$，$dx = du$. 记 $\dfrac{c}{a} - (\dfrac{b}{2a})^2 = E^2$

$\therefore \int \dfrac{dx}{ax^2+bx+C} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{du}{u^2+E^2} = \dfrac{1}{aE}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{E}$

$= \dfrac{1}{a\sqrt{\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2}}$

$= \dfrac{\operatorname{sign} a}{\sqrt{ac - \frac{b^2}{4}}} \operatorname{arctg} \dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$

② 二次三项式有两個不同实根

$$\because\ ax^2+bx+c=\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right)^{-1}\int\left(\frac{1}{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}-\frac{1}{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\right)dx$$

$$=\frac{a}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C_1$$

② 二次三项式有重根 $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=-\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}$

乙. $a=0$, $b\neq0$. 通积分为 $\ln|bx+c|=bt+C_1$

丙. $a=b=0$. 通积分为 $x=ct+C_1$

8. $(x^4-2t^3x)dt+(t^4-2tx^3)dx=0$

解: $\frac{dx}{dt}=\frac{x(x^3-2t^3)}{t(t^3-2x^3)}$ 令 $x=ut$

则 $u+\frac{du}{dt}\cdot t=u\frac{u^3-2}{1-2u^3}$

$\therefore\ \int\frac{1-2u^3}{u+u^4}du=\ln|t|+C_1$

而 $\int\frac{1-2u^3}{u+u^4}du=\int\frac{du}{u}-\int\frac{3u^2}{1+u^3}du=\ln\left|\frac{u}{1+u^3}\right|$

$\therefore$ 通积分为 $\ln\left|\frac{xt^2}{x^3+t^3}\right|=\ln|t|+C_1$

$\therefore\ \frac{xt}{x^3+t^3}=C$

9. $(3x-7t+7)dt+(7x-3t+3)dx=0$

解: 令 $y=t-1$, 化为

$(3x-7y)dy+(7x-3y)dx=0$

$$3(xdy-ydx)+7(xdx-ydy)=0$$

$$3\ \frac{xdy-ydx}{x^2-y^2}+\frac{7}{2}\ \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=0$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|+\frac{7}{2}\ln|x^2-y^2|=c$$

$$(x+t-1)^{10}(x-t+1)^4=C_1$$

$$\therefore (x+t-1)^5(x-t+1)^2=C$$

10. $x^2+t^2\frac{dx}{dt}=tx\frac{dx}{dt}$

解： $x^2+(t^2-tx)\frac{dx}{dt}=0$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{tx-t^2}{x^2}=\underline{\frac{t}{x}-\frac{t^2}{x^2}}$$

令 $\boxed{u=\frac{t}{x}}$. $\quad u+x\frac{du}{dx}=u-u^2$

$$\therefore -\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \ln|x|=\frac{1}{u}+C_1$$

故 $\ln|x|=\frac{x}{t}+C_1$

11、 $(t+2x+1)\frac{dx}{dt}=2t+4x+3$

解： $\frac{dx}{dt}=\frac{2t+4x+3}{t+2x+1}=\frac{2(t+2x+1)+1}{t+2x+1}$

令 $t+2x+1=z$. $\quad$ 则 $\frac{dz}{dt}=1+2\frac{dx}{dt}$

$$\therefore \frac{dz}{dt}=1+2\cdot\frac{2z+1}{z}=\frac{z+4z+2}{z}=\frac{5z+2}{z}$$

故 $\frac{z\,dz}{5z+2}=dt$

$$\therefore z-\frac{2}{5}\ln|5z+2|=5t+C_1$$

$$\therefore \frac{5}{2}(t+2x+1)-\ln|5(t+2x+1)+2|=\frac{25}{2}t+\frac{5}{2}C_1$$

即 $5x-10t-\ln|5t+10x+7|=C$

12. $\dfrac{dz}{dt}=a_1+b_1\dfrac{\lambda z+c}{z+c_1}$ 其中 a、b_1、c_1、c、λ 是常数.

解：$\dfrac{(z+c_1)\,dz}{a_1z+a_1c_1+\lambda b_1z+b_1c}=dt$

$$\int\frac{z+c_1}{Az+B}\,dz=t+C_0 \quad \left(\text{其中}\ \begin{array}{l}A=a_1+\lambda b_1\\ B=a_1c_1+b_1c\end{array}\right)$$

设 $A\neq 0$

$$\int\frac{z+\frac{B}{A}+(c_1-\frac{B}{A})}{A(z+\frac{B}{A})}\,dz=\frac{z}{A}+\frac{c_1-\frac{B}{A}}{A}\ln\left|z+\frac{B}{A}\right|$$

$$\therefore z+\left(c_1-\frac{B}{A}\right)\ln\left|z+\frac{B}{A}\right|-At=C$$

当 $A=0$ 時

$$z^2+2c_1z-2Bt=C$$

13. $\dfrac{di}{dt}=\dfrac{R}{L}i+\dfrac{E_0}{L}\sin\omega t$. 其中 R. L. E_0. ω 是常数.

解：$i=e^{\int\frac{R}{L}dt}\left(C+\int\frac{E_0}{L}\sin\omega t\cdot e^{-\int\frac{R}{L}dt}dt\right)$

$$=e^{\frac{R}{L}t}\left(C+\int\frac{E_0}{L}\sin\omega t\, e^{-t\frac{R}{L}}dt\right)$$

$$=e^{\frac{R}{L}t}\left(C+\frac{E_0}{L}\cdot\frac{e^{-\frac{R}{L}t}(-\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{(-\frac{R}{L})^2+\omega^2}\right)$$

$$=Ce^{\frac{R}{L}t}-\frac{E_0}{(L\omega)^2+R^2}(R\sin\omega t+L\omega\cos\omega t)$$

14. $\cos t\,\dfrac{dx}{dt}=x\sin t+\sin^2 t$

解: $\dfrac{dx}{dt}=x\,tg\,t+\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$

$$\therefore\ x=e^{\int tg\,t\,dt}\left(c+\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}e^{-\int tg\,dt}dt\right)$$

$$=e^{-\ln|\cos t|}\left(c+\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}e^{\ln|\cos t|}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\cos t}\left(c+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

或另解: $\cos t\,dx-x\sin t\,dt=\sin^2 t\,dt$

$$d(x\sin t)=d\left(\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}\sin 2t\right)$$

$$\therefore\ x\cos t=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+c$$

15. $\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{x}{t}=-\dfrac{1}{t^3}x^2$

解: 令 $u=\dfrac{x}{t}$.　　$\therefore\ t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{t}u^2$

即 $\dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{dt}{t^2}$

$$-\frac{1}{u}=\frac{1}{t}+c$$

$$\therefore\ x=-\frac{t^2}{1+ct}\qquad (t\neq 0)$$

16. $\dfrac{dx}{dt}\left(x^3+\dfrac{t}{x}\right)=1$

解: $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x^4+t}{x}$

令 $u=\dfrac{t}{x}$.　　$\therefore\ x\dfrac{du}{dx}=x^3$

$du=x^2dx$　　$u=\dfrac{x^3}{3}+c$　　$\therefore\ \dfrac{x^4}{3}-t+cx=0$