SHUXUE

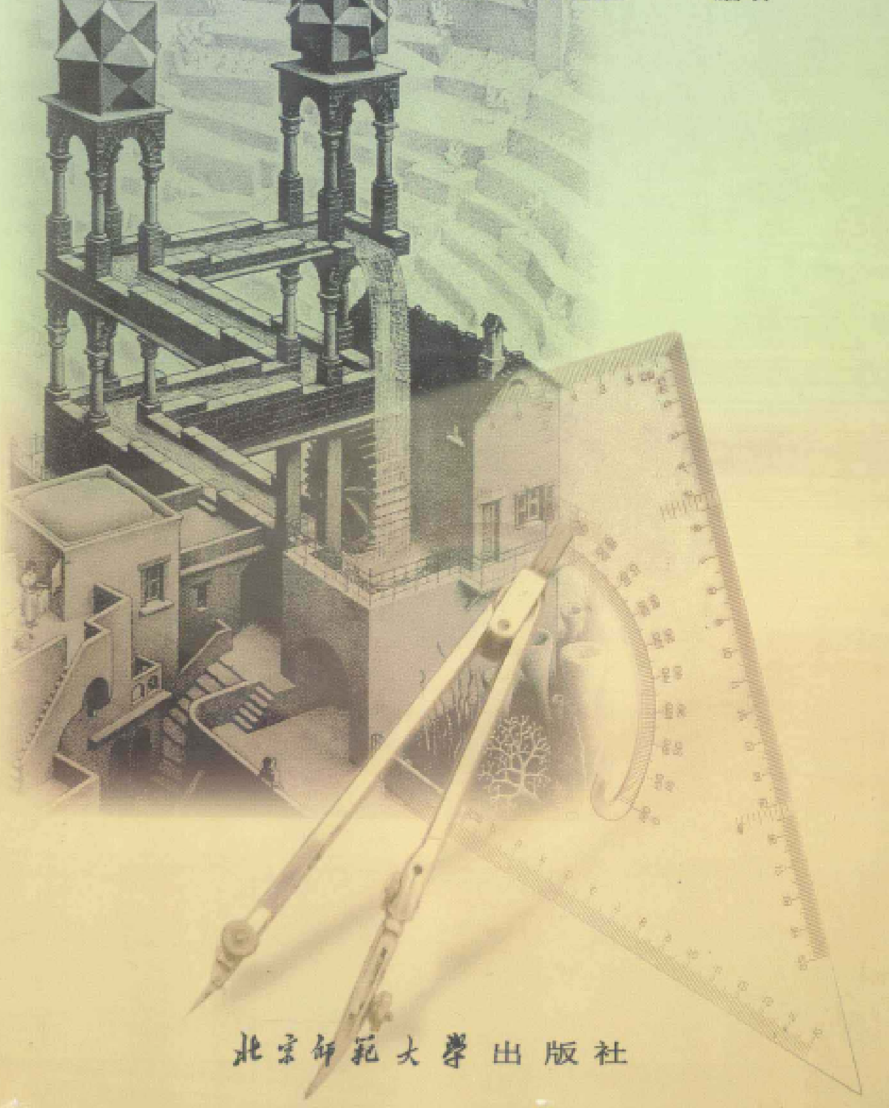
经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

全日制高级中学课本（选修Ⅱ）

数学

SHUXUE 第三册（理）

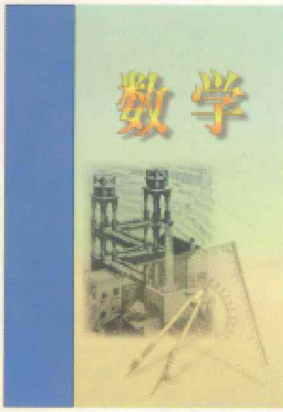
教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

责任编辑：王松浦　封面设计：李　强

全日制高级中学课本



● 数学　第一册（上）
● 数学　第一册（下）
● 数学　第二册（上）
● 数学　第二册（下）
● 数学　第三册（理）
● 数学　第三册（文）

ISBN 7-303-06110-X

9 787303 061105 >

京价（收）字［2001］417 号－151
全国价格举报电话：12358
ISBN 7-303-06110-X/G・4466
定价：8.65 元

经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过

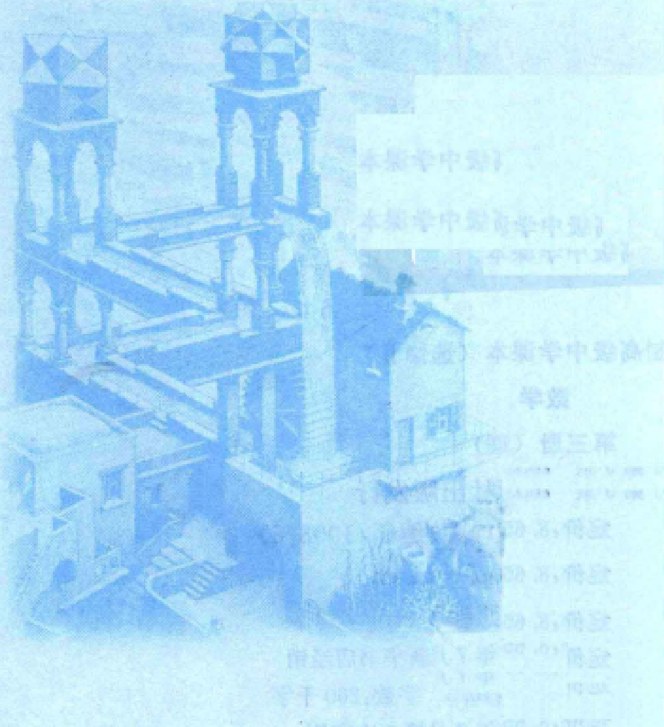
全日制高级中学课本（选修Ⅱ）

数学

第三册

（理）

教育部《中学数学实验教材》研究组 编著



北京师范大学出版社

北京

全日制高级中学课本（选修Ⅱ）
数学
第三册（理）
北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本：185mm×260mm　印张：10.5　字数：260 千字
2003 年 7 月第 3 版　2005 年 7 月第 5 次印刷
定价：8.65 元

前　　言

这套高中数学教材是在教育部基础教育司的组织领导下，于1980年初，根据美国加州大学伯克莱分校（UC，Berkeley）数学系项武义教授的设想和初纲，由本教材实验研究组广泛听取了专家和中学数学界有丰富经验的教研员、教师的意见，集体讨论、分工编写而成的，并从1982年开始，在全国近20个省、市、自治区进行了十多年的实验教学。在吸取各地使用教材的宝贵经验的基础上，前后经过三次调整修订，于1993年正式出版，并被原国家教委推荐为全国高中数学教学和中学数学教师进修的参考书。

这套教材还特别于1989～1992年进行了一轮有组织、有计划的严格实验教学，完善和充实了有益于中学生学好基础、提高能力的内容和训练，使教材更具有特色。经过三年教学，实验班进行了单独命题的高考，取得了优良成绩，同时也为这套教材的修订及教学参考书的编写提供了丰富的经验和资料。

这套教材的重新修订是总结十多年的教学实验经验和实验研究成果，根据教育部最新颁发的“全日制普通高级中学数学教学大纲”的精神，为适应我国当前高中数学教学改革的新形势和新要求而进行的。全套教材经教育部中小学教材审定委员会2003年审查通过。从2000年开始，这套教材一直在全国部分省、市学校使用，效果良好。

本教材的指导思想是：精简实用，返璞归真，顺理成章，深入浅出，注重实践能力和创新精神的培养。

精简实用——科学地体现了理论与实践的正确关系。由实践到理论就是由繁到简；精而简的理论才能以简驭繁。

返璞归真——着重于学习基础数学的本质，而不拘泥于抽象的形式。

顺理成章——从历史发展顺序和认识的规律出发，自然地处理教材。力求顺理成章，注意提前渗透后面的重要概念和思想，为后面的学习预先做准备，使学习能比较顺利。同时，兼顾分析、综合、推理三种方法，以便真正掌握数学的精神实质和思想方法，培养思考能力。

深入浅出——只有学习到应有的深度才能浅出，其要点在于用易于接受的形式去掌握枢纽性的理论。

这套教材的教学目的、教学内容的确定和安排、教学中应注意的几个问题、教学测试和评估均与部颁大纲保持一致；教学内容和教学目标均源于大纲，包含了大纲中的必修与选修Ⅰ、Ⅱ的所有内容。教材中带“*”号的部分是有特色的内容，供教学中结合实际、灵活掌握选学；教材中的阅读材料为“弹性”内容，供学有余力的学生阅读自学。

这套教材在修订中，特别注意了以下事项：

1. 保持了本教材的特色。

(1) 数学知识结构的整体性、系统性较强。

(2) 重视数学上的通性、通法；在知识的展开上突出基本数学思想和数学方法，注重说理；体现知识教学和能力培养的统一。

(3) 尽力体现和渗透现代数学观点，使教材的科学性和发展性达到较高水平。

2. 增加了应用题、研究性课题和实习作业，尽力重视个性品质、科学态度、创新精神的培养和辩证唯物主义的教育。

3. 删减了原有的超纲内容，降低了难度，着眼于代数、几何、分析、概率与统计4个基础学科，选其精要基础的内容；但编排体系上，采取与部颁大纲基本一致的不分学科、统一处理、穿插安排的系统。

这套教材包括必修两册共四本，选修一册共两本。其主要内容分别是：

第一册（上）　集合与逻辑初步；不等式；函数。

第一册（下）　指数函数与对数函数；三角函数；数列。

第二册（上）　平面向量；直线和圆的方程；圆锥曲线方程。

第二册（下）　立体几何；排列、组合及二项式定理；概率。

第三册（理）　概率与统计；极限与连续；导数；复数。

第三册（文）　统计；导数。

第一、二册是供高中一、二年级必修使用，第三册是供高中三年级选修使用。其中，第三册（理）的内容是大纲中的选修Ⅱ，供高三理、工方向的学生使用；第三册（文）的内容是大纲中的选修Ⅰ，供高三文、实方向的学生使用。

参加修订编写的有丁尔陞、李建才、高存明、罗声雄、邱万作、万庆炎、叶尧城等同志。参加本册修订编写的还有王松浦、程旷。

热忱地欢迎大家使用这套教材，希望提出意见与建议，为提高我国数学基础教育水平共同努力。

教育部《中学数学实验教材》研究组

2003. 3

目　录

第一章

概率与统计

现实生活中存在着大量的随机现象.为了研究其规律,往往收集大量的数据,并对数据予以整理与分析,对所观察的现象做出推断与预测,为决策和行动提供科学的建议.这是统计学的基本任务.

用什么方法收集、整理与分析数据?怎样由样本的频率分布估计总体的概率分布?为什么样本的特征可以近似地反映总体的特征?这是我们关心的重点问题.

本章首先引进随机变量概念,把随机现象的结果数量化,借用函数观念来研究随机现象,建立常见的随机现象的概率分布模型,为统计提供必要的理论依据,然后介绍收集整理数据的一般方法,再用样本来估计总体.使同学们初步学会用概率统计的方法解决一些简单的实际问题.

§1 随机变量

1.1 随 机 变 量

先考察一些实际例子:

例 1 抛掷一枚硬币,有两种试验结果,或者说有两个基本事件:“正面向上”,“正面向下”.记 ω_1 =“正面向

上”，ω_2＝“正面向下”，并记 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

现在问：一次试验中“正面向上”的次数 X 是多少？我们可以立即回答：“正面向上”的次数不是 0 就是 1. 当“正面向上”时，$X=1$；当“正面向下”时，$X=0$. X 是一个随试验结果的变化而取不同值的变量，记为 $X(\omega)$. 于是，

$$X(\omega)=\begin{cases}1, \text{当 } \omega=\omega_1 \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } \omega=\omega_2 \text{ 时}.\end{cases}$$

这样，$X(\omega)$ 是 Ω 上的一个实值函数，Ω 中的每一个事件都有确定的概率，因此 $X(\omega)$ 取值也有确定的概率，这里 $P\{X(\omega)=0\}=P\{X(\omega)=1\}=\frac{1}{2}$. $X(\omega)$ 的取值是随机的. 只有当 ω_1 发生时，X 才能取值 1；只有当 ω_2 发生时，X 才能取值 0. 因此，我们称它为随机变量.

例 2 抛掷三枚硬币，考察有几枚正面向上. 设

$X(\omega)$＝“掷三枚硬币出现正面向上的个数”，$\omega\in\Omega$.

这里 Ω 包含 8 个基本事件（或元素），我们用 1 表示正面向上，0 表示正面向下，这 8 个基本事件可表示为

$\omega_0=(0\ 0\ 0)$，$\omega_1=(0\ 0\ 1)$，$\omega_2=(0\ 1\ 0)$，$\omega_3=(0\ 1\ 1)$，

$\omega_4=(1\ 0\ 0)$，$\omega_5=(1\ 0\ 1)$，$\omega_6=(1\ 1\ 0)$，$\omega_7=(1\ 1\ 1)$.

于是，我们可以把 $X(\omega)$ 更具体地表示出来：

$$X(\omega)=\begin{cases}0, & \text{当 } \omega=\omega_0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } \omega=\omega_1,\omega_2,\omega_4 \text{ 时}, \\ 2, & \text{当 } \omega=\omega_3,\omega_5,\omega_6 \text{ 时}, \\ 3, & \text{当 } \omega=\omega_7 \text{ 时}.\end{cases}$$

$X(\omega)$ 随 ω 取 0，1，2，3 四个不同的值，$X(\omega)$ 取每一个值，都是一个随机事件，都有一定的概率. 例如，$X(\omega)=2$ 表示事件“掷三枚硬币出现两枚正面向上”，这个事件包含三个元素，即 $\omega_3,\omega_5,\omega_6$，它的概率为 $\frac{3}{8}$. 因此，$X(\omega)$ 也是一个随机变量.

一般地，可作如下定义：

定义 设 Ω 为基本空间，对于任给的 $\omega\in\Omega$，都有惟

一确定的实数 X 与之对应，则称 X 为**随机变量**. 通常记作 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$.

从对前面例题的分析及随机变量的定义中可以看到，随机变量是定义在基本空间 Ω 上的一个实值函数（Ω 中的元素不一定是实数）. 随机变量随试验的结果而取不同的值，由于试验的各个结果的出现有一定的概率，因此随机变量的取值也有一定的概率.

引入随机变量的概念后，随机事件就可以通过随机变量的取值来表示. 随机变量取某值或某指定范围的值就是一个随机事件. 例如，在例 2 中，"至少两枚正面向上"这一事件可表为 $\{2\leqslant X(\omega)\leqslant 3\}$ 或 $\{X(\omega)=2\}\cup\{X(\omega)=3\}$. 这样，就可以把对随机事件及其概率的研究转化为对随机变量及其取值概率的研究. 以前，我们只是孤立地研究随机试验的一个或几个事件，现在通过随机变量，可将试验的各个事件联系起来，从而可以从整体上研究随机现象.

例 3 设某射手每次射中目标的概率是 0.9. 如果该射手射击了 5 次，记

$$X(\omega)=\text{“射击 5 次击中目标的次数”},$$

则 $X(\omega)$ 是一个随机变量. 如果记"击中"为 1，"不击中"为 0，那么 Ω 的元素是由 5 个 0 或 1 组成的数组所构成，共有 2^5 个元素.

$X(\omega)$ 的取值范围是 $\{0,1,2,\cdots,5\}$. $X(\omega)$ 每取一个值或取某范围内的值，都是一个随机事件，都有确定的概率. 例如，"击中目标的次数为 3"这一事件可表为 $\{X(\omega)=3\}$. 而射击 5 次，可看做是 5 次独立重复试验，"击中"的概率为 0.9，"未击中"的概率为 0.1，从而 $P\{X(\omega)=3\}=C_5^3(0.9)^3(0.1)^2=0.072\ 9$. 事件"至少击中 1 次"可表为 $\{X(\omega)\geqslant 1\}$，"击中目标不超过 3 次"可表为 $\{X(\omega)\leqslant 3\}$. 它们的概率也可用事件的加法公式相应地求出.

例 4 设盒中有 5 个球（2 白 3 黑），从中任取 3 个，则

$$X(\omega)=\text{“抽得的白球数”}$$

是一个随机变量，Ω 是 5 个球中任取 3 个的所有组合，共有 C_5^3 个元素. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2\}$. $\{X(\omega)=0\}$，$\{X(\omega)\leqslant 1\}$，$\{X(\omega)=2\}$都是随机事件.

随机变量有多种类型. 如果随机变量一切可能的取值可以一一列举出来，则称之为**离散型随机变量**. 前面所举的例子都属于离散型. 离散型随机变量的取值范围可以是有限个值，也可以是一个无穷数列.

例 5 某射手每次射击击中目标的概率为 0.8. 现在连续射击同一目标，直到击中为止，则

$$X(\omega)=\text{“击中目标所需射击的次数”}$$

是一个随机变量，X 可取自然数 1,2,3,…因而是一个离散型随机变量.

除了离散型的随机变量外，还有一种非离散型的随机变量也是常见的.

例 6 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，如果某人到达该车站的时刻是随机的，那么，他的等车时间 $X(\omega)$ 是一个随机变量. 但他等车的时间 X 可以是 0～5 分范围内的任一时刻，而时间区间$[0,5]$是一连续区间，其值不能一一列举，因此，$X(\omega)$不是离散型随机变量.

例 7 从某生产线上用同一工艺生产出来的灯泡的寿命是有差异的，灯泡的质量在生产过程中受诸多随机因素的影响，因此灯泡的寿命也是一个随机变量. 设 T 表示灯泡的寿命，则 T 的取值范围为$[0,+\infty)$. T 的值不能一一列举，因此 T 也不是离散型随机变量.

像上述两例中所提及的随机变量类型在现实世界和生产实践中也是大量出现的，它们同属于所谓的**连续型随机变量**[1]，其主要特点是：它们的所有可能值充满一连续区间，其值落入任一子区间都有相应的概率.

本章我们重点学习的是离散型随机变量.

[1] 连续型随机变量的定义及其概率计算涉及微积分学等知识，故本书不给出严格定义.

练 习

1. 同时掷两枚硬币，令

$$X(\omega)=\text{“正面向上的硬币个数”}.$$

试写出 Ω 及 $X(\omega)$ 的表达式.

2. 在一个 5 人科技活动小组中，有 3 男 2 女，从中任选 2 人，用 $X(\omega)$ 表示所选 2 人中女生的人数. (1) 请具体地写出 $X(\omega)$ 的表达式；(2) 求 X 取值为 0，1，2 的概率.

3. 从 1，2，3，4，5 中，任取三个数字，X 表示所取三个数中最大者. (1) 试写出 X 的表达式；(2) 求 X 取 3，4，5 的概率.

1.2 离散型随机变量的分布列

设离散型随机变量 $X(\omega)$ 所有可能的取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 并设 $X(\omega)$ 取值 x_i 的概率为 p_i，即

$$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

则称数列 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\}$ 为 $X(\omega)$ 的**分布列**. 分布列反映了随机变量的概率分布.

分布列是一个数列，它可以是有限的，也可以是无限的，依 X 的可能取值的个数而定.

离散型随机变量的分布列也可以用表格表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

还可以表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots \end{pmatrix}.$$

例 8 在 5 人组成的课外活动小组中，有 3 男 2 女，

从中任选 2 人参加学校某项活动. 设 X 为所选 2 人中女生的人数,试写出 X 的分布列.

解 X 的取值有三种可能:0,1,2.

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0.3,$$

3男

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}=0.6,$$

2女

2.

$$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}=0.1.$$

X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

例 9 从 1,2,3,4,5 五个数中任取三个,以 X 表示取出的三数中之最大者,求 X 的分布列.

解 首先,确定 X 的可能取值,然后,求出取这些值的概率. X 的可能取值是 3,4,5. 容易看出:

$$P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=0.1,$$

$$P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3,$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6.$$

X 的分布列为

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

由上述二例看出,分布列各项之和

$$p_1+p_2+p_3+\cdots=1.$$

这是因为

$$\Omega=(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup(X=x_3)\cup\cdots$$

是一个必然事件,而且上式等号右端各项彼此互斥,故

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P[(X=x_1)\cup(X=x_2)\cup(X=x_3)\cup\cdots] \\ &= P(X=x_1)+P(X=x_2)+P(X=x_3)+\cdots \\ &= p_1+p_2+p_3+\cdots \end{aligned}$$

例 10　一篮球运动员连续投篮，直到投中为止. 假设他投篮命中率为$\frac{3}{4}$，试求：(1)所需投篮次数 X 的分布列；(2) X 取偶数的概率.

解　(1) X 的可能取值是 1,2,3,…事件$\{X=k\}$表示前 $k-1$ 次均未投中，而恰在第 k 次投中. 投中概率为$\frac{3}{4}$，则投不中概率为$\frac{1}{4}$. 由独立试验乘法公式，可得

$$P(X=k)=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4^k},k=1,2,3,\cdots$$

所求分布列为$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & \frac{3}{4^3} & \cdots & \frac{3}{4^k} & \cdots\end{bmatrix}$

$$(2)P(X=\text{偶数})=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{4^{2k}}$$

$$=3\times\left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}}-1\right)=\frac{1}{5}.$$ ❶

❶ 公式 $\sum_{n=0}^{\infty}p^n=\frac{1}{1-p}$ $(0<p<1)$ 将在下一章证明.

一般地，设事件 A 在单次试验中发生的概率为 p，在独立重复试验中，若记 $X=$"A 首次发生时的试验次数"，则$\{X=k\}$是事件"A 前 $k-1$ 次试验未发生，第 k 次试验发生". 由此，X 的分布列为

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,3,\cdots;q=1-p.$$

这是一个等比数列，我们称 X 服从**几何分布**.

例 11　甲、乙两围棋手对弈一盘棋，胜得 1 分，负得 0 分，无平局. 设甲对乙的胜率为 0.6，求甲得分数 X 的分布列.

解　X 只能取 0,1 两个值，X 取 0 的概率是 $1-0.6$，X 取 1 的概率是 0.6，则 X 的分布列为

X	0	1
p	0.4	0.6

一般地，如果随机变量 X 只可能取 0,1 两个值，且 $P(X=1)=p,0<p<1$，则 X 的分布列为

$$P(X=0)=1-p,\ P(X=1)=p,$$