上海科技专著出版资金资助
上海交通大学学术出版基金资助

微分包含控制系统理论

The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions

韩正之 蔡秀珊 黄 俊 著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

本书出版由上海科技专著出版资金和上海交通大学学术出版基金资助

微分包含控制系统理论

The Theory for Control Systems Described by Differential Conclusions

韩正之　蔡秀珊　黄　俊　著

上海交通大學出版社

内容提要

本书是研究有限维微分包含控制系统的专著。全书分成两部分。第1部分介绍微分包含理论。第1章扼要介绍凸分析。第2章讨论微分包含。作者将当前微分包含系统主要研究成果,归纳成集合值映射、集合值映射的选择、微分包含系统解的存在性定理、微分包含系统解的定性分析、微分包含系统的稳定性和单调微分包含等六方面进行介绍。第3章到第5章是第二部分,研究微分包含控制系统。第3章研究凸过程,它可以看成线性系统在集合值映身中的一种合理推广。介绍了凸过程的主要性质,有限维凸过程的构造,凸过程的能控性和稳定性。第4章在介绍了凸包 Lyapunov 函数之后,研究了它在镇定、干扰抑制和饱和控制中的应用。第5章讨论鲁里叶型微分包含系统的镇定和观测,重点研究了 Leunberger 型观测器、线性观测器和自适应观测器的设计。

本书内容安排深入浅出,论证严谨,解释清晰,语言简洁,对每一节都设计了一些练习题以启发思考。本书可以作为数学专业和控制专业研究生的专业教材,也可以供工程技术人员进修之用。

图书在版编目(CIP)数据

微分包含控制系统理论/韩正之,蔡秀珊,黄俊著. —上海:上海交通大学出版社,2013
ISBN 978-7-313-10252-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①韩… ②蔡… ③黄… Ⅲ. 微分包含—控制系统—研究 Ⅳ. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第200089号

微分包含控制系统理论

著　　者:韩正之　蔡秀珊　黄　俊
出版发行:上海交通大学出版社
地　　址:上海市番禺路951号
邮政编码:200030
电　　话:021-64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:浙江云广印业有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:16.75
字　　数:366千字
版　　次:2013年11月第1版
印　　次:2013年11月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-10252-2/TP
定　　价:58.00

出版说明

科学技术是第一生产力。21世纪，科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略，上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于2000年设立“上海科技专著出版资金”，资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

前　言

至今为止的控制理论的历史，可以用它采用的数学模型来断代。

1788年，James Watt 完成了他关于蒸汽机的第三项发明：离心调速仪（centrifugal governer）。蒸汽机由此摆脱了输入蒸汽气压忽高忽低的困惑，使得输出的转速能够控制在一个基本恒定的状态。瓦特蒸汽机由此第三项发明而完全定型，走向广泛的应用，为第一次工业革命解决了能源问题。离心调速仪被认为近代科学史上第一个设计目标明确的反馈（当时还没有这个名词）控制装置，它的结构简单、工作原理也非常简单。这么简单的一个装置为什么能够有效地调节转速？其背后的机理自然而然地引起众多物理学家的兴趣，他们纷纷寻觅、上下求索，希望发现能够镇定对象的工作原理，其中包括了 James C. Maxwell。Maxwell 在19世纪中期曾经用微分方程来探讨离心调速仪的工作原理，但没有记载说明他有突破性的进展。

如果将由离心调速仪引起的对于控制器功能实现的研究称作控制理论的萌发阶段，那么这个阶段采用的数学模型是微分方程。萌发阶段最辉煌的成果是在19世纪后期关于微分方程的研究，必须提及的代表人物有法国数学家 Jules Henri Poincaré 和俄国物理学家 Aleksandr M. Lyapunov。前者对不动点进行了分类，创立了微分方程定性理论，为以后称做动力学系统理论的学科奠定了基础；后者则建立了完整的运动稳定性理论，定义了 Lyapunov 稳定性，提出了著名的 Lyapunov 方法和 Lyapunov 定理。

众所周知，稳定性理论一直是控制理论的基础。据此而论，控制理论在其萌发阶段已经很有成就了。然而，尽管稳定性理论是从实际控制系统出发研究的，尽管当时就被冠以“运动稳定性”这样的名衔，但是这些成就还是未能达到足以促成控制理论诞生的能级。究其原因一来是其中控制的作用不突出，二来在当时微分方程的光辉如日中天，表现在控制的萤火之光被完全遮掩了。只是有一点可以肯定，当时研究采用的模型是微分方程。

到了20世纪的30年代，控制理论终于有了自己的标志性成就：Nyquist 稳定判据和 Bode 图。这些成果是采用频率特性表述的，Nyquist 稳定判据是用开环的频率特性来判别闭环系统稳定性的，而 Bode 图提供了一种由频率特性来近似求取传递函数和进行系统设计的简便而有效的技术。从1938年开始，Bode 图的发明者 Herdrik W. Bode 和 Norbert Wiener（以后成为控制论的创始人）致力于雷达自动跟踪和火炮自动瞄准技术研究，前者研究控制系统的工程设计，后者研究系统中的信号处理。他们的成功为二次大战中盟军的空防能力带来革命性的突破，法西斯的空中优势遭受到致命打击，一定程度促成了胜利的早日到来。由于战争的需要，这项技术一度保密，一旦大战结束，控制理论，或者用当时的称呼伺服原理，作为一项新技术脱颖而出就势在必然了。后人将在20世纪30到50年代建立的控制理论称为经典控制理论，并称之为“白纸加铅笔”的理论，它采用的数学模型是传递函数，或者等价地，是频率特性。

相对于萌芽阶段的理论，经典控制理论最大的特点，或者说扬名立万的根本原因是它贴近工程，具有可算性。凡是参加过控制系统设计的人都会有体会，根据物理、化学或者其他学科的定理或定律，给对象建立一个可用的微分方程模型是非常困难的工作，即使像电动机这样简单的对象。然而用传递函数作为数学模型，只要一个信号发生器和一台示波器就可以通过Lissajous图形获得对象的增益特性和相位特性，然后应用Bode图就能近似地获得它的传递函数；进一步还可以应用Bode图对对象进行补偿，改善性能指标、达到预定要求。整个过程只要用“白纸加铅笔”，非常匹配工程师们的口味，便捷性和有效性使得控制理论立即成为工程界的前沿理论，风靡一时也不足为怪了。

时代的步伐带动人们不断高攀的欲望，在新发明带来的一阵燥热之后，冷静下来紧接着的就是不满及对新发明的企盼。这就是科学发明的动力。以传递函数为模型的经典控制理论在处理单输入单输出系统时显得游刃有余，但一旦面对多个输入或者多个输出的系统时，输入输出间的耦合和牵制使得基于Bode图的分析和设计方法捉襟见肘、力不从心。也有人试图将传递函数推广成传递函数矩阵，但是，总因为模型和方法的局限，无功而返。到了20世纪60年代，控制理论的突破终于等来了。后来被称为现代控制理论之父的Rudolph E. Kalman又想起了微分方程。在1960年召开的首届IFAC世界大会上，Kalman定义了控制系统的状态，提出用状态空间模型(一阶微分方程组)来描述控制系统，并应用状态空间模型建立了能控性和能观性的概念。Kalman的创造并没有立即得到认可，直到1962年他应用能观性提出了Kalman滤波算法，并在航天工程中得到成功的应用，人们才对状态空间法刮目相看，并将状态空间法和先前提出的极大值原理一起称为现代控制理论。1982年，Kalman访问中国，当有人问及Kalman滤波和Wiener滤波的区别时，Kalman反问道：“为什么苏联人先成功发射载人飞船，但却是美国人先登月？”在数秒钟的停顿之后，他诙谐地、而又不无得意地说：“因为当时的苏联人还不懂Kalman滤波！”可以用来佐证Kalman说法的事实是，至今我们在处理“嫦娥”和“神舟”发回的信息时，主要还是应用Kalman滤波技术。

可以毫不犹豫地断言采用状态空间描述是现代控制理论区别于经典控制理论的根本特征。采用状态空间描述使得多变量系统可以与单变量系统完全一样地处理，彻底突破了经典控制理论系统分析和设计方法的局限。能够应用状态空间模型进行控制系统设计，很大程度上得益于计算机技术的发展，应用计算机来求一个微分方程的数值解恰如探囊取物。现代控制理论顺天应时，借助现代计算能力使得控制系统设计从“白纸加铅笔”中解放出来。由于状态比输出包含更多的系统运行的信息，因而针对状态的设计手段更丰富，效果更突出。还不到20世纪末，以状态空间法为基础的计算机控制已经几乎完全取代了传统的控制技术。

20世纪70年代以后，不止一次地听到新一代的控制理论诞生的宣言，一会儿是“大系统理论”，一会儿是“智能控制理论”，尽管喧嚣一时，尽管这些领域的理论和实践也都在不断推进，但是要说是新一代的控制理论，却从来没有得到普遍的认同。但是有一点是可以肯定的，那些标榜新一代理论诞生的一个主要依据就是更新了数学模型，由此进一步见证了模型对于理论发展的重要意义。

可能是受到 Kurt Godel 不完备定理的冲击，或者 Werner Heisenberg 测不准原理的影响，到了 20 世纪后期，“不确定”三个字同时出现在不同领域的一流科学家的桌面上。随着控制范围越来越广和控制精度越来越高，控制系统设计对过于依赖精确模型的做法日益不满，控制系统的不确定性也因而受到前所未有的关注。鲁棒控制、自适应控制应运而生，可是杯水车薪，还是不能大范围地解决问题。无数事实证明：对于同批生产的同样系统施加同样的输入，产生输出不尽相同，而且还完全不知道产生这些差别的原因，因此根本无从建立模型，也就无从着手实施控制来消除差别。有时候，尽管这种差别不大，但是却会导致完全不同的后果，甚至严重地影响实现预定性能的要求。21 世纪初，在这种背景下控制系统的微分包含描述便红火起来了。

动态系统一般用$\dot{x}=f(x,u)$来描述，其中的 $f(x,u)$是一个确定的函数。如果系统存在莫名其妙的不确定性，即对于一个确定的输入 $u=u(t)$和确定的初始状态 $x(t_0)=x_0$，系统的状态 $x(t)$不再是一个时间 t 的确定函数，也就是说 $f(x,u)$不再是一个函数，而是一个集合值映射，即 $F(x,u)=\{f_1(x,u),f_2(x,u),\cdots,f_p(x,u)\}$（为了区别函数，用 $F(x,u)$表示集合值映射）。相应地，系统的模型就要改写成$\dot{x}\in F(x,u)$。$\dot{x}\in F(x,u)$就是微分包含，是一种新的模型。人们不禁猜想，研究的模型换成微分包含是不是意味着新一代控制理论的诞生？回答：“不知道。”因为尽管目前还未见端倪，但是要否定也为时过早。

应用微分包含来描述控制系统一方面由于实际需要，另一方面也是由于微分包含理论的发展。国内没有看到考察微分包含历史的研究和报道。根据 J-P Aubin 和 A. Cellina 在 *Differential Inclusions—Set-Valued Maps and Viability Theory*[1]一书中的介绍，微分包含的雏形最早出现是 20 世纪 30 年代。50 年代以后获得了数学界广泛垂青，因而硕果累累。上述由 J-P Aubin 和 A. Cellina 撰写的著作于 1984 年由 Springer-Verlag 在德国出版，该书几乎囊括了 80 年代之前获得的所有重要结论，被认为是至今为止微分包含理论的经典。该书主要讲述 Hilbert 空间上的微分包含理论。秦松喜将其中上半部分编译由厦门大学出版社出版。G. V. Smirnov 在 2002 年出版了 *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*[2]，这是第一本讲述有限维空间上微分包含的专著，是研究微分包含的控制理论不可不读的经典。

从 20 世纪 70 年代起，控制理论就涉足微分包含，掐指算来也有 40 年历史了。控制理论采用微分包含模型的研究主要有三个阶段：70 年代起，主要工作是将极大值原理推广到微分包含，尽管有所建树，但是不能算有实质性的突破。从 20 世纪后期起，对微分包含系统的能控性有较多的研究，但是对于微分包含系统，能控性在系统设计中的作用还很不清楚，因此其结论没有受到足够的重视。进入 21 世纪，出现了对线性多胞体系统的控制和对 Luré 型微分包含系统的观测方面的研究。这些工作是真正可以算做控制系统设计的内容，就此而言，这些成果给微分包含控制理论带来了突破性进展。但作者们还不认为可以算是新一代的控制理论，还有待于应用领域的检验。自本世纪初作者们就以极大的热情关注着微分包含控制理论的进展，并做了一些有益的研究。作者们从自身的研究过程中深切体会国内这个领域资料的缺乏，于是萌发写一本专著的愿望，并花了约 5 年的时间完成本书的初稿。

本书的安排如下:第 1 章介绍一些基础知识。微分包含理论可以看成是泛函分析和微分方程理论的有机结合,因此选择将泛函分析的基础知识作为阐述的起点,在这一章介绍凸分析作为全书的基础。鉴于国内控制界对这部分内容可能不很熟悉,对部分重要的结论稍加证明和分析。第 2 章是微分包含基础理论,集中介绍有限维空间上的微分包含。先介绍集合值映射,讲述集合值映射的定义、性质、微分和选择,其中选择是集合值映射特有的课题;随后介绍微分包含解的存在性、稳定性和其他的定性性质,其中包括 Fillipov 对不连续微分方程的讨论;最后研究单调微分包含。可以说,这一章归纳了有限维微分包含的主要性质,而且对几乎所有的结论都给出了比较详细的证明,对于那些在 Hilbert 空间也成立的结论都做了说明。第 3 章介绍凸过程。凸过程可以看成是线性映射在集合值映射下的一种推广,也是最具有有限维线性微分包含特色的内容,其中关于凸过程的结构分析可以认为是矩阵 Jordan 标准型的推广,有关能控性的讨论可以作为研究微分包含控制系统能控性的基础,有关稳定性的讨论可以认为是 Lyapunov 方法在微分包含系统中的应用。第 4 章和第 5 章论述两类微分包含控制系统。这两类系统可以看成是线性控制系统在集合值映射场合的自然推广。第 4 章讲述线性多胞体系统的控制,主要介绍凸包 Lyapunov 函数的性质和应用,这部分的基础是 Hu 和她的同事们在本世纪初提出的。第 5 章介绍 Luré 型微分包含系统,这类微分包含的集合值运算只出现在非线性环节中,主要研究内容是镇定和观测器设计。

本书由韩正之和他指导的博士生蔡秀珊和黄俊合作完成。蔡秀珊博士毕业后在浙江师范大学工作,黄俊博士毕业后到苏州大学工作。书中第 4 章和第 5 章中包含了他们在博士生期间和毕业后的一部分研究成果。全书由韩正之执笔,经蔡秀珊和黄俊修改后,最终由韩正之定稿。有几个出版社都希望出版本书,作者最后选择了在上海交通大学学术出版基金资助下,由上海交通大学出版社出版。本书的出版还得到上海科技专著资金的资助,本书的研究工作得到了国家自然科学基金几个项目的支持。我的研究生章伟、刘磊坡、张俊峰、沈少捷、王培全等在学期间参加了课题研究,提供了有益的建议,在此一并表示感谢。

由于本书涉及的内容较新,作者们的理解可能会存在片面,恳请读者指教。与作者联系可以通过出版社或者作者们的电子邮件信箱。

韩正之　zzhan@sjtu. edu. cn

蔡秀珊　xiushan@zjnu. cn

黄　俊　cauchyhot@163. com

韩正之

2013 年 4 月 6 日

符 号 说 明

总用大写斜体的英文字母 $A,B,C,M,P,Q,\cdots$ 和大写正体的希腊字母 $\mathrm{A},\mathrm{B},\Phi,\Gamma,\Lambda,\Omega,\cdots$ 等表示集合、映射等数学对象，即如果一个映射用 A 表示，那么这个字母是大写的希腊字母，读音为 alpha。

总用小写斜体的英文字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 和小写斜体的希腊字母 $\alpha,\beta,\varepsilon,\phi,\gamma,\omega,\cdots$ 等表示数或者向量。

如果没有特别的说明，本书采用其他记号意义如下。

$\square$：表示定义、定理、推论或者注释的结束

$\varnothing$：空集

$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$：分别表示自然数集、整数集、实数集和复数集

$\mathfrak{R}$：闭的实数数集，即集合 $[-\infty,\infty]$

$\mathbb{R}(\geqslant 0)$，$\mathbb{R}(>0)$：非负实数集和正实数集

$\mathbb{R}^n$：n 维实数空间，总认为它是线性赋范空间

$\|x\|_\alpha(x\in\mathbb{R}^n)$：$\mathbb{R}^n$ 中向量 x 的 α 范数，其中 $\alpha\geqslant 1$，即 $\|x\|_\alpha=(x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，$x=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)^{\mathrm{T}}$

上标 T：向量或矩阵的转置

$\mathscr{P}A$：集合 A 的幂集

A'：集合 A 的导集

A^{c}：集合 A 的补集

$\mathrm{int}\,A$：集合 A 的内点所成集合

$\mathrm{re\,int}\,A$：集合 A 的相对内点所成集合

$\mathrm{cl}\,A$：集合 A 的闭包

$\mathrm{bd}\,A$：集合 A 的边界

$\mathrm{re\,bd}\,A$：集合 A 的相对边界

$\mathrm{co}\,A$，$\overline{\mathrm{co}}\,A$：集合 A 的凸包和闭凸包，即

$$\mathrm{co}\,A=\left\{x;x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,a_i\in A,\lambda_i\in\mathbb{R}(\geqslant 0),\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,n\in N\right\},\overline{\mathrm{co}}\,A=\mathrm{cl\,co}\,A$$

$\mathrm{car}\,A$：集合 A 的承载子空间

$\sup\{x;x\in A\}$：集合 A 的上确界

$\inf\{x;x\in A\}$：集合 A 的下确界

$\pi(x,A)$：向量 x 在集合 A 上的投影，即 $\pi(x,A)=\{y;d(x,y)=d(x,A)\}$

K^*：锥 K 的共轭锥

$A\times B$：集合 A 和 B 的 Cartesian 积

$\operatorname{dom} M$：关系、映射 M 等的有效定义域

$\operatorname{rag} M$：关系、映射 M 等的值域

X^*：线性赋范空间 X 的共轭空间

$\mathscr{L}(X,Y)$：线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的线性有界算子组成的空间

$A^{\perp}$：集合 A 的正交补子空间

$m(A)$：集合 A 的最小范元

$\dim H$：子空间 H 的维数

X/T：线性空间 X 关于子空间 T 的商空间

$M\oplus N$：子空间 M 和 N 的直和

$d(x,y)$：向量、点 x 和 y 之间的距离

$\langle x,y\rangle$：向量 x 和 y 的内积

$\|y\|_X$：向量 y 在线性赋范空间 X 中的范数

$\lambda\uparrow 0,\lambda\downarrow 0$：变量 λ 单调上升、单调下降到 0

$\operatorname{epi} f$：函数 f 的上行图

$\operatorname{lev}(f\leqslant a),\operatorname{lev}(f<a)$：分别表示 f 不大于 a、小于 a 的层集

$\arg\min f(x)$：使得 $f(x)$ 取到极小值的那些 x 组成的集合

$\operatorname*{res}_{s_0} g(s)$：函数 $g(s)$ 在 s_0 处的留数

$\operatorname{gra} F$：集合值映射 F 的图像，即 $\operatorname{gra} F=\{(x,y),y\in F(x)\}$

$\operatorname{conx}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$：向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的凸组合

$N(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的法向量

$T(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的切锥

$T_+(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的正切锥

$T_-(x,A)$：集合 A 在向量 x 处的伴随切锥

$D^+f(x_0)(\upsilon)$：函数 $f(x)$ 在 x_0 处沿着向量 υ 的 Dini 上导数

$D^-f(x_0)(\upsilon)$：函数 $f(x)$ 在 x_0 处沿着向量 υ 的 Dini 下导数

$S_{[0,T]}(F,x_0)$：微分包含 $\dot{x}\in F(x)$ 满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的、存在于时间区间 $[0,T]$ 上的解集

$S_{[0,T]}(F,C)$：微分包含 $\dot{x}\in F(x)$ 初值在集合 C 内的、存在于时间区间 $[0,T]$ 上的解集

$R_{[0,T]}(F,x_0)$：微分包含 $\dot{x}\in F(x)$ 满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的、存在于时间区间 $[0,T]$ 上的解在 T 时刻的可达集

P_T：T-能控集

A^*：凸过程 A 的伴随过程

(C,A,B)：线性系统$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$

$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$：线性系统$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$的系统矩阵

$S(x,A)$：集合 A 的支撑函数

$\mu(x,A)$：集合 A 的 Minkovsky 函数

$\delta(x,A)$：集合 A 的指示函数

$\partial f(x_0)$：函数 $f(x)$ 在 x_0 的次微分

目 录

第 1 章

凸集和凸函数

本章先概要叙述泛函分析的一些基本内容，主要是线性赋范空间和内积空间的一些结论。然后转入凸分析。依次介绍凸集、凸函数和半连续函数。这些知识对于第 2 章讲述集合值映射是必须的。

1.1 线性赋范空间

本节介绍一些泛函分析基础知识。可以方便读者的阅读，也可以统一本书采用的记号和定义，同时介绍以后会用到的结论，方便引用。

1.1.1 集合和映射

本书中，一般用大写英文字母 $A,B,\cdots,X,Y$ 表示集合，小写的字母 $a,b,\cdots,x,y$ 表示集合的元素。为了显示集合更多的信息，会采用一些复合记号，例如用 $C([a,b],\mathbb{R})$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续实函数组成的集合。不过，每当引入这种记号的时候，都会对其含义给出解释。

有两个集合需要特别提及，一个叫做空集，记为 $\varnothing$；一个叫做全集，记成 Ω，它表示当前考察的最大的集合，其他集合都是它的子集。一个集合称为单元素集，如果它只有一个元素。

A,B 是两个集合，$A\cup B, A\cap B, A\backslash B$ 和 A^c 分别表示它们的并集、交集、差集和 A 的补集。A 的一切子集组成的集合称为 A 的**幂集**，用 $\mathscr{P}A$ 表示。$A\times B$ 表示 A 和 B 的 **Cartesian 积**，即 $A\times B=\{(a,b);a\in A,b\in B\}$，其中记号 (a,b) 表示一个有序对。集合的并、交和补之间存在 de Morgan 公式

$$\bigcup A^c=\left(\bigcap A\right)^c;\ \bigcap A^c=\left(\bigcup A\right)^c。$$

本书中最常用的集合是数集。用 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{N}$ 表示正整数集和自然数集[①]。用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{C}$ 表示复数集，但是本书很少用到复数集。$\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$ 分别表示正实数集和负实数集，有时也将它们写成 $\mathbb{R}(>0)$ 和 $\mathbb{R}(<0)$，相应地用 $\mathbb{R}(\geqslant 0)$ 表示非负实数集。在下面的讨论中，常常会将实数集扩展成闭集，即**闭实数集**，用 $\mathfrak{R}$ 表示，$\mathfrak{R}=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$，用 $\mathbb{R}(\infty)$ 和 $\mathbb{R}(-\infty)$ 分别表示 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 和 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$。在 $\mathfrak{R}$ 上可以进行加减乘除等算术运算，但是为了使得运算结果是唯一确定的，就像在常规运算中不能让分母为 0 一样，在集合 $\mathfrak{R}$ 上不允许极限运算中所谓的“不定型”运算，例如 $\infty-\infty$，$0\cdot\infty$ 等等。$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的实数空间，它就是 $\overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n次}$。在本书中，$\mathbb{R}^n$ 总是作为线性空间来处理的。

从 A 到 B 的一个**关系**是 $A\times B$ 的一个子集 M。例如 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，则 $M=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2)(a_3,b_1),(a_4,b_1)\}$ 便是从 A 到 B 的一个关系。定义

$$\operatorname{dom} M=\{a;a\in A,\exists b\in B,b\neq\pm\infty,使得(a,b)\in M\}$$

和

$$\operatorname{rag} M=\{b;b\in B,\exists a\in A,使得(a,b)\in M\},$$

分别为关系 M 的定义域和值域。如果 $a\in\operatorname{dom} M$，$M(a)=\{b;b\in B,(a,b)\in M\}$ 称为是 a 的像集。如果 $b\in\operatorname{rag} M$，$M^{-1}(b)=\{a;a\in A,(a,b)\in M\}$ 称为是 b 的原像集。$M(a)$ 和 $M^{-1}(b)$ 未必只含一个元素。例如在前面的例子中，$M(a_1)=\{b_1,b_2\}$，$M^{-1}(b_1)=\{a_1,a_3,a_4\}$。像集和原像集的概念可以推广到集合，例如 $S_1\subset\operatorname{dom} M$，则可以定义 $M(S_1)$，又如 $S_2\subset\operatorname{rag} M$，则可以定义 $M^{-1}(S_2)$。

① 本书定义自然数集为 $\{0,1,2,3,\cdots\}$。