WEIJIFEN
FANGFA

微积分方法

李亿民 著

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

微积分方法

李亿民　著

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

微积分方法 / 李亿民著. —青岛:中国海洋大学出版社,2013.12

ISBN 978-7-5670-0507-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李… Ⅲ.①微积分 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 289722 号

出版发行 中国海洋大学出版社
出 版 人 杨立敏
社　　址 青岛市香港东路 23 号　　**邮政编码** 266071
网　　址 http://www.ouc-press.com
电子信箱 dengzhike@sohu.com
订购电话 0532—82032573(传真)
责任编辑 邓志科　　**电　　话** 0532—85901040
印　　制 青岛双星华信印刷有限公司
版　　次 2013 年 12 月第 1 版
印　　次 2013 年 12 月第 1 次印刷
成品尺寸 185 mm×260 mm
印　　张 34
字　　数 780 千
定　　价 60.00 元

目　录

第一篇 一元函数的极限与连续性

现代科学的诸多分支，无论是从理论研究上还是从学科之间的相互渗透上，越来越依赖于微积分的应用，而极限是研究微积分的主要工具，可以说微积分就是一门极限理论，没有极限就没有微积分. 所以，欲在微积分方面有所收获、有所长进，首先必须具备扎实的极限功底. 如果有了过硬的极限本领，对将来连续、导数、微分、级数等领域的学习，不仅觉着顺理成章、得心应手，而且会处处欣赏到数学的天成之美.

§1.1 预备知识

一、常用的不等式与恒等式

常言道：工欲善其事，必先利其器. 很多人感觉数学难学，确实，由于数学结构的高度严谨性和多个概念之间的高度相关性，给数学的学习带来了诸多困扰. 爱美之心人皆有之，一旦认识到各个概念的本质，有了稳固的基础，数学的美感也会逐渐显现出来. 极限，就是揭示和刻画数量的一种无限接近程度的一个基础性概念，它大多是通过数量之间的不等式来衡量的，脑海中若随时能够反映出所需要的不等式，其实很多极限问题就会变得简单、有趣. 为了使整个微积分的研究和学习变得轻松、顺利，有必要介绍几个常见、常用的不等式，这也是学好极限的捷径.

1. 绝对值不等式 设 x,y 为任意实数，则有

$$|x|-|y|\leqslant ||x|-|y||\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|.$$

2. 三角不等式 设 x,y,z 为任意实数，则

$$|x-z|=|x-y+y-z|\leqslant |x-y|+|y-z|.$$

3. 设 x,y,z 为实数，$x<y<z$，则有

$$|y|<\max\{|x|,|z|\}.$$

4. 伯努利不等式 ① 若 $x>-1$，n 为正整数，则

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

该式等号成立 $\Leftrightarrow x=0$.

伯努利不等式 ② 设 $x>0$，$k\in(0,1)$，则 $(1+x)^k<1+kx$.

伯努利不等式 ③ $x>0$，$k>1$，则 $(1+x)^k>1+kx$.

5. 柯西—施瓦兹不等式 设 $x_i,y_i\in R$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

6. 平均值不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^+$，则

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

上述不等式中的三个式子分别称为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的调和平均值、几何平均值、算术平均值，等号成立的充要条件为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

7. 设 $x \in R$，则

$$e^x \geqslant 1+x,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x = 0$.

8. (1) 设 $x > -1$，则

$$\ln(1+x) \leqslant x,$$

其中等号成立 $\Leftrightarrow x = 0$.

(2) 设 $x > 0$，则

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

9. 设 n 为正整数，则有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2},$$

即数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$严格单调递增，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格单调递减.

10. 对任意实数 x, y，有

$$|\cos x - \cos y| \leqslant |x-y|, |\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|,$$

特别地，有

$$|\sin x| \leqslant |x|,$$

该式等号成立 $\Leftrightarrow x = 0$.

11. 设 $x \in R^+$，则有

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

设 n 为正整数，则

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

12. 任意 $x, y \in R$，有

$$x^2 + y^2 \geqslant 2|xy| \geqslant 2xy.$$

13. 若 $x \in (0,1)$，则

$$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4},$$

等号成立 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

14. 任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$，有

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x,$$

等号成立 $\Leftrightarrow x = 0$.

若 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，则

$$\sin x < x < \tan x.$$

而对任意 $x > 0$，有 $\sin x < x$.

15. 设 n 为正整数，则有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

16. 任意 $x \in R$，有 $x - 1 < [x] \leqslant x$，其中取整函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

17. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

18. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

19. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

20. 对任意 $x, y \in R$，有 $\max\{x, y\} = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{|x-y|}{2}$；$\min\{x, y\} = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{|x-y|}{2}$.

21. $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$.

上述不等式与恒等式，有些是中学学过的，有些会在以后的章节中陆续给出证明. 有些不等式与恒等式，其证明过程具有很强的启发性和示范性，它们本身也具有很强的应用价值，如函数与数列有界性的判别、极限的存在性、级数的敛散性、用迫敛性求极限、广义积分敛散性判定等等方面，若能适当地利用不等式与恒等式，常常会起到事半功倍的效果.

二、函数概念与特性

微积分的主题是函数，研究微积分离不开研究函数的性质. 大学学到的函数概念与中学基本一致，但是当人们接触到微积分，反倒觉着对“函数”无从下手，其主要原因在于对函数概念、性质的理解仅仅局限于字面上，对每一个性质缺乏“联想”，不知道在什么情况下会用到什么样的性质，往往把很关键的条件当做了“摆设”，熟视无睹. 在学习、研究微积分的过程中，只有养成一个好的、善于发现和利用函数特性的习惯，才能逐步形成破解数学命题的好的素养.

（一）函数概念

设 D 和 G 为非空实数集，若任意 $x \in D$，按照某确定的对应法则 f，存在唯一实数 $y \in G$ 与之对应，记作 $y = f(x)$，则称对应法则 f 为定义在集合 D 上的函数，D 称为函数 f 的定义域，集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\} \subset G$ 称为函数的值域，x 称为自变量，y 称为因变量.

关于函数定义，应重点做以下理解：

① 该定义中的对应关系为单值对应，而非一一对应.

② 函数的本质是集合之间确定的对应关系 f.

③ 两个函数相同的充要条件是两者之间具有相同的定义域、值域、对应法则，与自变量、因变量、对应法则的符号无关.

（二）函数的常用性质

1. 有界性　设 $y=f(x), x\in D$，若存在 $M\in R$，使得任意 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界，M 称为 $f(x)$ 的一个上界；若存在 $L\in R$，使得任意 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant L$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界，L 称为 $f(x)$ 的一个下界；若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

① 函数在 D 上有上(下) 界，则上(下) 界不唯一.

② 若 $f(x)$ 在 D 上有界，则在 $D'\subset D$ 上有界，若在 $D'\subset D$ 上无界，则在 D 上无界，即整体有界局部一定有界，局部无界整体一定无界. 这一性质在证明无界或有界时都很有用.

③ 函数 $f(x)$ 在 D 上无界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上无上界或无下界；函数 $f(x)$ 在 D 上有界 $\Leftrightarrow |f(x)|$ 在 D 上有界.

④ 有界量乘无穷小量为无穷小量；若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 在以后的应用上，有界性往往和极限与可积性联系起来.

2. 周期性　若存在常数 $T\neq 0$，使得任意 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的以 T 为周期的函数.

① 周期 T 不一定就是正数，但常常用的是最小正周期(如果有的话)；T 的整数倍仍为该函数的周期.

② 研究周期函数的解析性质，只需考察一个周期内的情形.

③ 应十分注意周期函数定积分的特点：n 个周期上的积分问题；一个周期上的积分与起点的无关性.

④ 周期函数未必在整个实数轴上有定义.

⑤ 必须明确周期函数的极限问题.

3. 奇偶性　设集合 $D\subset R$ 关于原点对称，若任意 $x\in R$，有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$)，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇) 函数.

① 应明确掌握奇(偶) 函数定义域、图象的特点.

② 若函数 $f(x)$ 在 D 上既是奇函数又是偶函数，则 $f(x)\equiv 0, x\in D$；若函数 $f(x)$ 为奇函数且在点 $x=0$ 有定义，则 $f(0)=0$.

③ 可导奇函数的导函数为偶函数，可导偶函数的导函数为奇函数；连续奇函数的原函数全为偶函数，连续偶函数的原函数只有一个是奇函数(过原点的那个).

④ 函数奇偶性在定积分中具有独特的应用，往往用来简化定积分的计算.

⑤ 奇函数 ± 奇函数 = 奇函数；偶函数 ± 偶函数 = 偶函数；奇函数 × 奇函数 = 偶函数；偶函数 × 偶函数 = 偶函数；偶函数 × 奇函数 = 奇函数.

4. 单调性　设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，任意 $x_1, x_2\in D, x_1<x_2$，有 $f(x_1)\underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 D 上单调递增(递减).

① 整体单调则局部单调，但局部单调整体未必单调；有界闭区间上的单调函数，其间断

点必为第一类间断点，但开区间上的单调函数，其间断点也可能为第二类间断点.

② 函数的单调性常常和函数的极值、最值和可积性联系在一起.

③ 若函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调，则 $f(x)$ 在 D 上具有反函数，但具有反函数未必严格单调；$f(x)$ 在 D 上具有反函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上一一对应.

④$f(x)$ 在 D 上单调递增(递减)$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, (x_1 - x_2)\cdot(f(x_1) - f(x_2)) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} 0$. 该性质在证明特定的积分不等式时比较有效.

⑤ 判断函数 $f(x)$ 在 D 上单调性的常用方法：考察 $f(x_2) - f(x_1)$ 的符号；考察商 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}$；考察$(f(x_1) - f(x_2))\cdot(x_1 - x_2)$ 在 D 上是否变号；在区间上考察一阶导数的符号.

5. 基本初等函数与初等函数　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为初等函数；由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

分段函数未必就不是初等函数，如 $f(x) = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$，虽为分段函数，但 $f(x) = \sqrt{x^2}$，它是初等函数.

关于函数的其他性质，如连续性、可积性、可微性等，在以后各章节中陆续展开.

三、典型例题解析

只有准确把握微积分中的有关概念及其概念之间的有机联系，通过模仿一定量的典型命题的计算与推理，才能够逐步掌握破解新的数学命题的方法，这是学好数学的必要手段.

例 1　设 $x_i, y_i \in R, i = 1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

证明　**方法一**　因为 $x_i, y_i \in R$，对任意 $t \in R$ 有

$$(x_i + t y_i)^2 \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

于是，对于任意实数 t，有

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + t y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)t^2 \geqslant 0,$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = 0$，则 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$，原命题显然成立；若 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 > 0$，则 $f(t)$ 是关于 t 的二次三项式，因为对任意 $t \in R$，有 $f(t) \geqslant 0$，故判别式 $\Delta \leqslant 0$，从而

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0,$$

整理，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

【评注】该证明方法具有较强的适用性，如证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x、(E(XY))^2 \leqslant E(X^2)\cdot E(Y^2)$$

等一些不等式或条件极值转化为非条件极值的问题中都有出色的应用.

方法二 由于 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 或 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ 时,命题显然成立,故只需证明在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>0,\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2>0$ 下命题成立即可.

因为 $1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2,1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2$,所以

$$\begin{aligned}2&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}\right)^2+\left(\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)^2\right]\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(2\cdot\frac{|x_iy_i|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}\right)\\&=\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}},\end{aligned}$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}$,

于是 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)$.

方法三 由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{j=1}^{n}y_j^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\cdot\sum_{j=1}^{n}x_jy_j\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i^2y_j^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_ix_jy_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant0\end{aligned}$$

不等式显然成立.

【评注】如此改换记法,在将定积分的乘积转换为二重积分时常常用到.

方法四 由于任意 $\alpha,\beta\in R$,关于 α,β 的二次型

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\alpha+y_i\beta)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\alpha^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\alpha\beta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\beta^2\geqslant0,$$

即上述关于 α,β 的二次型为非负定的,于是所对应的矩阵为非负定的,从而其系数行列式

$$\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\end{vmatrix}\geqslant0,$$

于是有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)$.

例 2 (1) 设 $x>0,k\in(0,1)$，则 $(1+x)^k<1+kx$；

(2) 设 $x>0,k>1$，则 $(1+x)^k>1+kx$.

证明 (1) **方法一** 做函数 $f(x)=1+kx-(1+x)^k,x\in(0,1)$，有

$$f(0)=0,f'(x)=k-k(1+x)^{k-1}>0,x\in(0,1),$$

所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上严格单调递增，于是，若 $x>0,k\in(0,1)$，有 $(1+x)^k<1+kx$.

方法二 令 $f(x)=(1+x)^k,x\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(1,1+x)$，使得

$$(1+x)^k-1=(1+x)^k-1^k=f(x)-f(0)=x\cdot k\cdot\xi^{k-1}<kx,$$

即 $(1+x)^k<1+kx$.

方法三 $f(x)=(1+x)^k,x\in(0,1)$，则 $f(0)=1,f'(0)=k,f''(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2}$，由泰勒中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)=(1+x)^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=1+kx+\frac{k(k-1)(1+\xi)^{k-2}}{2!}x^2<1+kx.$$

方法四 $f(x)=(1+x)^k,x\in[0,1)$，则有

$$f(0)=1,f'(0)=k,f''(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2}<0,$$

所以函数 $f(x)=(1+x)^k$ 在 $[0,1)$ 上严格上凸，其图象在过点 $(0,1)$ 的切线的下方，而过点 $(0,1)$ 的切线方程为 $y=1+kx$，所以，$(1+x)^k<1+kx,x\in(0,1)$.

(2) 以上的四种方法均可使用(略).

方法五 由(1) 的结果知，对于任意的 $u>0,k>1$，有 $(1+u)^{\frac{1}{k}}<1+\frac{1}{k}u$，于是，对任意 $u>0,k>1$，有 $\left(1+\frac{1}{k}u\right)^k>1+u$，令 $u=kx$，得 $(1+x)^k>1+kx$.

【评注】这两个不等式就是常常用到的伯努利不等式. 对这种常见不等式，其证明方法本身就具有代表性，应予以掌握；若一个命题有若干部分，证明了一部分之后，剩余的部分应想办法转换为已证明的结论.

例 3 设 $x>0,y>0$，求证：$x^y+y^x>1$.

证明：若正数 x,y 中有一个大于或等于 1，结论显然成立；以下只证明 $x,y\in(0,1)$ 的情形. 由例 3 中的伯努利不等式，有

$$x^y=\frac{1}{(\frac{1}{x})^y}=\frac{1}{(1+\frac{1-x}{x})^y}>\frac{1}{1+y\cdot\frac{1-x}{x}}=\frac{x}{x+y-xy}>\frac{x}{x+y},$$

同理可证 $y^x>\frac{y}{x+y}$，以上两式相加即可.

例 4 **证明**：对任意正整数 n，有不等式 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明 这里只证不等式 $\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，另一部分证明请自己完成.

方法一 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2\times1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，即 $n=1$ 时命题成立. 设 $n=k$ 时不等式成

立,即$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k)}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$,则对于 $n=k+1$,有

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k+1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k+2)}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2k-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2k)}\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\times\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2k+1}\times\sqrt{2k+3}}{2k+2}\times\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{2k+2}\times\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

$$<\frac{\sqrt{4k^2+8k+4}}{2k+2}\times\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}},$$

即不等式在 $n=k+1$ 时仍成立,由数学归纳法知,对任意正整数 n,不等式成立.

方法二 由于

$$\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2$$

$$=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)}{2^2\times4^2\times6^2\times\cdots\times(2n)^2}\times\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\frac{(2n-1)\times(2n+1)}{(2n)^2}\times\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1},$$

两边同时开方即可.

方法三 因为$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$

$$<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{2n+1},$$

知$\left[\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right]^2<\frac{1}{2n+1}$,开方得$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

方法四

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}<\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{\sqrt{1\times3}\times\sqrt{3\times5}\times\sqrt{5\times7}\times\cdots\times\sqrt{(2n-1)\times(2n+1)}}$$

$$=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}\times\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

例 5 求证:对任意 $a,b\in R^+$,

(1) 当 $p>1$ 时,有 $a^p+b^p<(a+b)^p$;

(2) 当 $0<p<1$ 时,有 $a^p+b^p>(a+b)^p$.

证明:(1) **方法一** 设 $p=1+t$,则 $t>0$ 时,有

$$(a+b)^p=(a+b)^{1+t}=(a+b)\cdot(a+b)^t=a\cdot(a+b)^t+b\cdot(a+b)^t$$

$$>a\cdot a^t+b\cdot b^t=a^{1+t}+b^{1+t}=a^p+b^p.$$

【评注】这种方法的目的是将 $p>1$ 的矛盾转移到 $t>0$ 上.这是典型的初等数学方法,但在微积分的学习和研究中往往起到很好的效果.

方法二 令 $f(x)=(a+x)^p-a^p-x^p,x>0$,由 $f(0)=0,f'(x)>0$,命题得证.

方法三 不妨设 $0<a<b$,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(b,a+b)$,使得

$$(a+b)^p-b^p=a\cdot p\xi^{p-1}>a\cdot pb^{p-1}>a\cdot pa^{p-1}=pa^p>a^p,$$

命题成立.

(2) 与(1) 的三种方法类似(略).

方法四　由 $0 < p < 1$,知$\frac{1}{p} > 1$,再由(1) 的结果,有

$$a + b = (a^p)^{\frac{1}{p}} + (b^p)^{\frac{1}{p}} < (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}},$$

两边同时 p 次方,得 $a^p + b^p > (a+b)^p$.

例 6　求证:(1) 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$严格单调递增;(2) 数列$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$严格单调递减;(3)$(1+\frac{1}{n})^n < 4, n = 1,2,\cdots$.

证明:(1) **方法一**　由算术平均值与几何平均值的关系,有

$$1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = \frac{(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\cdots+(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}(\text{共 } n \text{ 个}(1+\frac{1}{n}))$$

$$> \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})\times(1+\frac{1}{n})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})\times 1} = \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n},$$

两边同时 $n+1$ 次方,得$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^n$,即$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$严格单调递增.

方法二　为证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$严格单调递增,只需证明$(1+\frac{1}{x})^x$在$x > 0$时严格单调递增或 $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x})^x = x\ln(1+\frac{1}{x})$ 在 $x > 0$ 时严格单调递增. 由拉格朗日中值定理,有

$$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} = \ln(1+\frac{1}{x}) - \ln 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\theta\cdot\frac{1}{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\theta+x} - \frac{1}{1+x} > 0,$$

其中 $\theta \in (0,1)$. 从而命题成立.

【评注】方法二同时也证明了不等式$\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x})$.

(2) **方法一**　为证$(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$,只需证

$$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} > 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},\text{或}\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} < \frac{n+1}{n+2},$$

事实上,$\sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} = \sqrt[n+2]{(\frac{n}{n+1})^{n+1}\times 1} = \sqrt[n+2]{\frac{n}{n+1}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times 1}(\frac{n}{n+1}\text{ 共 } n+1 \text{ 项}) < \frac{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$,命题得证.

方法二　其证明与(1) 的方法二类似(略).

(3) 由(2) 知,对任意自然数 n,有$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leqslant (1+\frac{1}{1})^{1+1} = 4$.

【评注】由此,可以证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$与$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$均收敛并将极限记为 e.

例 7 设 n 为正整数,求证 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

证明:方法一 由 $(1+\frac{1}{n})^n$ 严格单调递增收敛于 e,对于任意正整数 n,有 $(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}$,同理,有 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}>\mathrm{e}$,取对数,得 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$,这也是常常使用的不等式. 由不等式 $\ln(1+n)-\ln n=\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$,得到

$$\ln 2-\ln 1<\frac{1}{1},$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

n 个式子相加,得 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

不等式的另一部分类似可证(略).

方法二 思路:由于 $\ln x$ 的导数为 x 的分式形式,所以联想到定积分,然后拆项.

$$\begin{aligned}\ln(1+n)&=\ln(1+n)-\ln 1=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&<\int_1^2\frac{1}{1}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

方法三 考虑数学归纳法. 显然 $n=1$ 时,有 $\ln(1+1)=\ln 2<1$,若对 n 有不等式 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 成立,则对 $n+1$,有

$$\begin{aligned}\ln(1+n+1)&=\ln(1+n)+\ln(1+n+1)-\ln(1+n)=\ln(1+n)+\ln(1+\frac{1}{n+1})\\&<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\ln(1+\frac{1}{n+1})<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

于是不等式成立. 不等式的另一部分,同理可证(略).

【评注】在用归纳法的证明过程中,用到了重要不等式 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$,常常加以练习和运用,这些不等式就会成为我们得心应手的好工具.

例 8 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+\varphi(x), x\geqslant 0\\-\sin x+\frac{1}{2}\varphi(x), x<0\end{cases}$,其中 $\varphi(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 1\\-1, x<1\end{cases}$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 分析:最好先将 x 分两部分考虑,即 $x\geqslant 0$ 和 $x<0$,又由于 $\varphi(x)$ 在 $x<1$ 和 $x\geqslant 1$ 取值不同,所以应将实数轴分为 $x<0, 0\leqslant x<1, x\geqslant 1$ 三部分. 由此,不难得到

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+1, x\geqslant 1\\ \sin x-1, 0\leqslant x<1\\ -\sin x-\dfrac{1}{2}, x<0\end{cases}.$$

例 9　设 $f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=x+1, x\neq 0,1$，求函数 $f(x)$.

解　令 $u=\dfrac{x-1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{1-u}$，代入原式，有 $f(\dfrac{1}{1-u})+f(u)=\dfrac{2-u}{1-u}$，再将 u 换为 x，则有 $f(\dfrac{1}{1-x})+f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}$. 再令 $x=\dfrac{1}{1-v}$，则$\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{v-1}{v}$，则上式为 $f(\dfrac{v-1}{v})+f(\dfrac{1}{1-v})=\dfrac{2v-1}{v}$，再将 v 换为 x，得 $f(\dfrac{x-1}{x})+f(\dfrac{1}{1-x})=\dfrac{2x-1}{x}$，从而有

$$\begin{cases}f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=x+1,\\ f(\dfrac{1}{1-x})+f(x)=\dfrac{2-x}{1-x},\\ f(\dfrac{x-1}{x})+f(\dfrac{1}{1-x})=\dfrac{2x-1}{x},\end{cases}$$

消掉 $f(\dfrac{x-1}{x})$ 和 $f(\dfrac{1}{1-x})$，得 $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}, x\neq 0,1$.

【评注】将 $f(x)+f(\dfrac{x-1}{x})=x+1$ 转换为 $f(\dfrac{1}{1-x})+f(x)=\dfrac{2-x}{1-x}$ 之后，产生了两个新的量 $f(\dfrac{x-1}{x})$、$f(\dfrac{1}{1-x})$，为了将它们消掉，应考虑变换$\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{v-1}{v}$，即 $x=\dfrac{1}{1-v}$.

例 10　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有界，且 $f(x)-\dfrac{1}{3}f(\dfrac{x}{3})=x^2$，求 $f(x)$.

解　思路：如果像上一个例题那样，将 x 的位置直接换成$\dfrac{x}{3}$，两式的新变量消不掉，为此应无限次地做替换，借助于“有界性”，通过极限将“尾巴”处理掉.

依次将 $f(x)-\dfrac{1}{3}f(\dfrac{x}{3})=x^2$ 中的 x 换成$\dfrac{x}{3}$，得

$$f(x)-\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})=x^2,$$

$$\frac{1}{3}f(\frac{x}{3})-\frac{1}{3^2}f(\frac{x}{3^2})=\frac{x^2}{3^3}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3}),$$

$$\frac{1}{3^2}f(\frac{x}{3^2})-\frac{1}{3^3}f(\frac{x}{3^3})=\frac{x^2}{3^6}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^2,$$

$$\frac{1}{3^3}f(\frac{x}{3^3})-\frac{1}{3^4}f(\frac{x}{3^4})=\frac{x^2}{3^9}=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^3$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{3^{n-1}}f(\frac{x}{3^{n-1}})-\frac{1}{3^n}f(\frac{x}{3^n})=x^2\cdot(\frac{1}{3^3})^{n-1},$$

各式相加，得

$$f(x)-\frac{1}{3^n}f(\frac{x}{3^n})=x^2[1+(\frac{1}{3^3})+(\frac{1}{3^3})^2+\cdots+(\frac{1}{3^3})^{n-1}],$$

考虑到 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有界,上式两端关于 n 取极限,得 $f(x)=\dfrac{27x^2}{26}$.

例 11 设 $x,y\in R,x^3+\arctan x=y^3+\arctan y$,求证:$\sin\cos x^{66}=\sin\cos y^{66}$.

证明 思路:由于无法解出 x,y 的关系,只要证明 $x=y$ 即可.

方法一 令 $f(t)=t^3+\arctan t,t\in R$,则 $f'(t)=3t^2+\dfrac{1}{1+t^2}>0,t\in R$,所以 $f(t)$ 在 R 上严格单调递增,又因为 $f(x)=f(y)$,所以 $x=y$,从而 $\sin\cos x^{66}=\sin\cos y^{66}$.

方法二 若 $x\neq y$,则 $x-y\neq 0$,由于 $x^3+\arctan x=y^3+\arctan y$,所以存在 ξ 介于 x,y 之间,使得

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3=\arctan y-\arctan x=\frac{y-x}{1+\xi^2},$$

于是得 $x^2+xy+y^2=(x+\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{3}{4}y^2<0$,矛盾!从而 $x=y$,$\sin\cos x^{66}=\sin\cos y^{66}$.

例 12 设 $f(x)$ 在 R^+ 上有定义,$a,b\in R^+$. 求证:

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 严格单调递减,则有 $f(a+b)<f(a)+f(b)$;

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 严格单调递增,则有 $f(a+b)>f(a)+f(b)$;

(3) 若 $p>1$,则有 $(a+b)^p>a^p+b^p$;

(4) 若 $0<p<1$,则有 $(a+b)^p<a^p+b^p$.

解 (1) 由 $\dfrac{f(x)}{x}$ 严格单调递减,故 $\dfrac{f(a+b)}{a+b}<\dfrac{f(a)}{a}$,从而 $af(a+b)<(a+b)f(a)$,同理得 $bf(a+b)<(a+b)f(b)$,两式相加,得 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.

(2) 该不等式的证明与(1) 类似(略).

(3) 考察函数 $f(x)=x^p,x>0$. 由于 $p>1$,所以 $\dfrac{f(x)}{x}=x^{p-1}$ 在 $x>0$ 时严格单调递增,由(2) 的结果,知 $f(a+b)>f(a)+f(b)$,即 $(a+b)^p>a^p+b^p$.

(4) 与(3) 的方法类似(略).

例 13 求证:对任意 $a,b\in R$,有

(1) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$;(2) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|}$.

证明 (1) **方法一** $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}=\dfrac{1+|a+b|-1}{1+|a+b|}=1-\dfrac{1}{1+|a+b|}$

$$\leqslant 1-\frac{1}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}=\frac{|a|+|b|+|a|\cdot|b|}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}\leqslant\frac{|a|+|b|+2|a|\cdot|b|}{1+|a|+|b|+|a|\cdot|b|}$$

$$=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)\cdot(1+|b|)}=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

方法二 考虑函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x},x\geqslant 0$,则 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时单调递增,因

为 $|a+b| \leqslant |a|+|b|$，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

【评注】方法二的证明过程比方法一要简捷得多，方法一的证明过程总是要瞻前顾后，而方法二，巧妙地利用了函数的单调性，证明过程相当平顺、自然.

例 14　设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增，则 $f(x)$ 在 R 上严格单调递增. 若条件改为"$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增"，结论还成立吗？

证明　因 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(0)=0$. 因 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增，所以当 $x>0$ 时，有 $f(x)>0$.

任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$，以下证明 $f(x_1) < f(x_2)$.

(1) 若 $0 < x_1 < x_2$，由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增，所以有 $f(x_1) < f(x_2)$.

(2) 若 $x_1 < x_2 \leqslant 0$，则 $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$，所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$，即 $-f(x_1) > -f(x_2)$，从而 $f(x_1) < f(x_2)$.

(3) 若 $x_1 < 0, x_2 \geqslant 0$，则 $f(-x_1) > 0$，即 $-f(x_1) > 0$ 从而 $f(x_1) < 0 \leqslant f(x_2)$. 综上，知 $f(x)$ 在 R 上严格单调递增.

若条件改为"$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增"，结论不成立，如函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1, x<0 \\ 0, x=0 \\ x-1, x>0 \end{cases},$$

虽然为 R 上的奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增，但在 R 上并不严格单调递增.

例 15　设 $f(x)$ 在 R 上有定义，且 $f(f(x)) \equiv x$，

(1) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递增，这种函数有几个？

(2) 若 $f(x)$ 在 R 上单调递减，这种函数有几个？

解　(1) 只有一个 $f(x) \equiv x$. 先证明 $f(x)$ 在 R 上严格单调递增. 事实上，对任意 $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$，因为 $f(f(x_1)) = x_1, f(f(x_2)) = x_2$，所以 $f(f(x_1)) < f(f(x_2))$，考虑到 $f(x)$ 在 R 上单调递增，所以 $f(x_1) < f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 R 上严格单调递增.

为了证明 $f(x) \equiv x$，用反证法. 若存在 $\xi \in R$，使得 $f(\xi) \neq \xi$，分两种情况讨论：

① 若 $f(\xi) < \xi$，则 $f(f(\xi)) < f(\xi)$，即 $\xi < f(\xi)$，矛盾！

② 若 $f(\xi) > \xi$，则 $f(f(\xi)) > f(\xi)$，即 $\xi > f(\xi)$，矛盾！

综上，只有 $f(x) \equiv x$ 满足 $f(f(x)) \equiv x$.

(2) 只有一个 $f(x) \equiv -x$. 其证明方法与(1)类似(略).

例 16　求证：函数 $f(x)$ 在集合 D 上严格单调 $\Leftrightarrow$ 任意 $x_1, x_2, x_3 \in D, x_1 < x_2 < x_3$，有 $f(x_3) - f(x_2)$ 与 $f(x_2) - f(x_1)$ 同号.

证明　($\Rightarrow$) 不妨设 $f(x)$ 在集合 D 上严格单调递增，则任意 $x_1, x_2, x_3 \in D, x_1 < x_2 < x_3$ 有 $f(x_3) - f(x_2) > 0, f(x_2) - f(x_1) > 0$，即 $f(x_3) - f(x_2)$ 与 $f(x_2) - f(x_1)$ 同号.

($\Leftarrow$) 任意 $x_1, x_2, x_3 \in D, x_1 < x_2 < x_3$，不妨设 $f(x_3) - f(x_2) > 0, f(x_2) - f(x_1) > 0$，则 $f(x_3) > f(x_2), f(x_2) > f(x_1)$，即 $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$，故 $f(x)$ 在集合 D 上严格单调.