

初级混合数学

新中學教科書

初級混合數學

第六冊

編者

歙縣 程廷熙

高安 傅種孫

校者

江寧 張鵬飛

無錫 華襄治

中華書局印行

新中學教科書

初級混合數學第六冊

目次

第拾章 二次聯立方程

(1-19 頁)

- | | |
|-----------|-----------|
| 1. 二次聯立方程 | 2. 圖象解法 |
| 3. 代數解法 | 4. 代入法 |
| 5. 消元法 | 6. 劈因數法第一 |
| 7. 劈因數第二 | 8. 消常數法 |
| 9. 易元法 | 10. 和差法 |
| 11. 施除法 | 12. 應用問題 |

第拾壹章 根式及根式方程

(20-35 頁)

- | | |
|------------|------------------------|
| 1. 根式 | 2. 根式之正負及符號 |
| 3. 根式之重要性質 | 5. 根式之加減—相似根式 |
| 4. 根式之變因 | 8. 根式除法 |
| 6. 同次根式 | 10. $a+b\sqrt{c}$ 之平方根 |
| 7. 根式乘法 | 12. 增根 |
| 9. 理母 | |
| 11. 根式方程 | |

第拾貳章 乘方及開方

(36—60 頁)

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. 獨項乘方 | 2. 獨項開方 |
| 3. 二項式及多項式之平方 | 4. 根爲二項之開平方 |
| 5. 根爲多項之開平方 | 6. 二項式之任何次乘方 |
| 7. 多項式之任何次乘方 | 8. 根爲二項之開立方 |
| 9. 根爲多項之開立方 | 10. 根爲一位數之開立方 |
| 11. 任何數之立方根 | 12. 不盡根 |
| 13. 分數開方 | 14. 高次方根 |

第拾叁章 無理數及量法

(61—76 頁)

- | | |
|-------------|--------------|
| 1. 亞幾默得公理 | 2. 倍量 |
| 3. 綫段量法 | 4. 無限位小數 |
| 5. 無限位小數之相等 | 6. 綫段比例理論之基礎 |
| 7. 量數 | 8. 加法 |
| 10. 乘法 | 11. 除法 |
| 13. 弧角比例 | 9. 減法 |
| | 12. 矩形之面積 |
| | 14. 弧角互度 |

第拾肆章 線段之計算

(77—97 頁)

- | | |
|-----------|-------------|
| 1. 基本定理 | 2. 平方根之線段表示 |
| 3. 代數式之作圖 | |

- | | |
|-------------|-----------------|
| 4. 代數分析法 | 5. 割線與切線 |
| 6. 弦 | 7. 線段之內分及外分 |
| 8. 射影 | |
| 9. 廣派達哥拉司定理 | 10. 三角形二邊之平方和及差 |
| 11. 三角形之高 | 12. 雜題 |

第拾伍章 面積

(80—121 頁)

- | | |
|-------------|--------------|
| 1. 割補 | 2. 面積 |
| 3. 等積 | 4. 矩形之面積 |
| 5. 面積與二次恒等式 | 6. 等積矩形 |
| 8. 梯形之面積 | 7. 平行四邊形之面積 |
| 9. 三角形之面積 | 10. 三角形面積及公式 |
| 11. 共角等積三角形 | 13. 多邊形之面積 |
| 12. 就積變形題 | 15. 派達哥拉氏定理 |
| 14. 相似形面積之比 | 17. 拘形限積題 |
| 16. 矩形變方 | |

第拾陸章 正多邊形 圓周長 圓面積

(122—144 頁)

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. 正多邊形 | 2. 圓內接正多邊形 |
| 3. 圓外切正多邊形 | 4. 正三角形, 正六邊形, 等 |
| 5. 正四邊形, 正八邊形, 等 | 6. 外內比 |
| 7. 正五邊形, 正十邊 | 8. 正十五邊形, 正三 |

- | | |
|-----------|-------------|
| 形,等 | 十邊形,等 |
| 9. 相似正多邊形 | 10. 圓周長 |
| 11. 圓面積 | 12. 弧長—扇形面積 |
| 13. 圓周率 | 一弓形面積 |

第拾柒章 形數兩科綱領

(145—151 頁)

- | | |
|---------|---------|
| 1. 數學綱要 | 2. 形學綱要 |
|---------|---------|

附錄一 特別高次方程

(152—162 頁)

- | | |
|----------------|----------|
| 1. 高次方程及其圖象解法 | 2. 綜合除法 |
| 4. 求 $f(x)$ 之值 | 3. 剩餘定理 |
| 6. 勞因數解法 | 5. 代數解法 |
| 8. 易元法 | 7. 因數定理 |
| | 9. 逆係數方程 |
| 10. 二項方程 | |

附錄二 等差級數及等比級數

(163—177 頁)

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. 級數 | 2. 等差級數 |
| 3. 第 n 項 | 4. n 項之總和 |
| 5. a, d, l, n, s 之互求 | 6. 等差中項 |
| 7. 等比級數 | 8. 第 n 項 |
| 9. n 項之總和 | 10. a, r, l, n, s 之互求 |
| 11. 等比中項 | 12. 無窮等比級數 |

新中學教科書

初級混合數學

第三年下

第拾章

二次聯立方程

§ 1. 二次聯立方程. 有聯立方程,其中未知數之最高乘幂爲二次者,謂之二次聯立方程(Simultaneous quadratic equations). 本章所述,爲二元二次聯立方程,如

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2-y=5 \\ x^2-xy+2y^2=88 \end{cases}$$

等是.

§ 2. 圖象解法. 以圖象解二次聯立方程,先將各方程之圖象分別繪出,繼察其交點坐標之值,即爲方程之根.

例 1. 解 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y^2+4x=17 \end{cases}$

解. 先繪 $2x+y=1$ 之圖象:

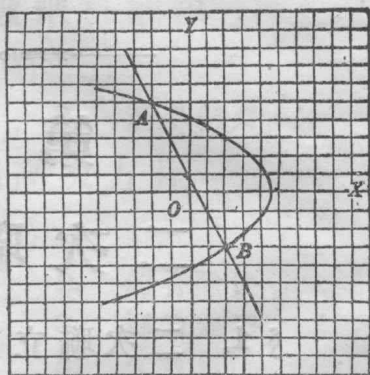
$$y=1-2x,$$

x	0	1
y	1	-1

次繪 $y^2 + 4x = 17$ 之圖象：

$$y = \pm \sqrt{17 - 4x},$$

x	0	1	2	3	4	...
y	± 4.1	± 3.6	± 3	± 2.2	± 1	...
x	-1	-2	-3	-4		
y	4.6	± 5	± 5.4	± 5.7		



由是察其交點 A, B 之坐標爲

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

即所求方程之根。

例 2. 解 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases}$

解. 先繪 $x^2 + y^2 = 25$ 之圖象：

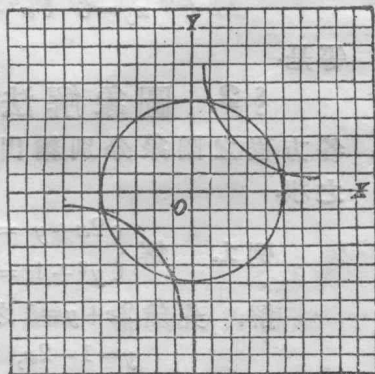
$$y = \pm \sqrt{25 - x^2}.$$

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	
y	± 5	± 4.9	± 4.6	± 4	± 3	

次繪 $xy = 6$ 之圖象：

$$y = \frac{6}{x}.$$

x	1	2	3	4	5	6	7	
y	6	3	2	1.5	1.2	1	.9	



x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	$\dots\dots$
y	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1	-0.9	$\dots\dots$

此二圖象交點之坐標爲

$$\begin{cases} x=4.7 \\ y=1.2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1.2 \\ y=4.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4.7 \\ y=-1.2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1.2 \\ y=-4.7 \end{cases}$$

即所求方程之根

習題 I

以圖象解以下聯立方程：

1. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x^2+9y^2=144 \end{cases}$

§ 3. 代數解法。二元二次聯立方程，有能應用代數上二次方程解法以解之者，有不能者，如

$$\begin{cases} 8x^2-y=5 \dots\dots\dots (1) \\ x^2-xy+2y^2=88 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

由(1)得 $y=8x^2-5$,

代入(2),得 $x^2-x(8x^2-5)+2(8x^2-5)^2=88$,

即 $128x^4-8x^3-159x^2+5x-38=0$.

此爲四次方程，二次方程之解法，不足以馭之，茲不具論。

不獨此也，二元二次聯立方程如上述之可解者，亦無一定之公法，當視其形式如何以定之。今就習見者分節述之於下。

§ 4. 代入法. 一方程爲一次者.

例. 解 $\begin{cases} 6x-y=4 \dots\dots\dots(1) \\ 5x^2-8xy+y^2-7x+5y=-4 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

解. 由(1)得 $y=6x-4 \dots\dots\dots(3)$

代入(2),得 $5x^2-8x(6x-4)+(6x-4)^2-7x+5(6x-4)=-4,$

整理之, $x^2-x=0,$

劈因數, $x(x-1)=0,$

$\therefore x=0$ 或 $x-1=0,$

$\therefore x=0$ 或 $1,$

代入(3),得 $y=-4$ 或 $2,$

故所求之根爲二組,即

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

核算: (i) 以 0 代 x , 以 -4 代 y ,

代入(1) $6 \times 0 - 4 = -4$ } 合;

代入(2) $0 - 0 + 16 - 0 - 20 = -4$ }

(ii) 以 1 代 x , 以 2 代 y ,

代入(1) $6 - 2 = 4$ } 合.

代入(2) $5 - 16 + 4 - 7 + 10 = -4$ }

習題 II

解以下聯立方程,並核算之:—

1. $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x^2-2xy=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+2y^2=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-3y=2 \\ xy+y^2=20 \end{cases}$

$$5. \begin{cases} x+4y=14 \\ y^2-2y+4x=11 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x-y=5 \\ 8x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 5(x^2-y^2)=4(x^2+y^2) \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4x-5y=1 \\ 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{10} = x-y \\ \frac{7xy}{15} - \frac{2x}{3} = 2y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x^2+2xy+\frac{y^2}{4}+\frac{5}{12}(4x+y)=41 \\ x-\frac{y}{4}=1 \end{cases}$$

§ 5. 消元法. 有若干二次聯立方程,可應用一次聯立方程之消元法以解之者,參考第四冊第十三章 § 14.

$$\text{例. 解} \begin{cases} x+xy=35 & (1) \\ y+xy=32 & (2) \end{cases}$$

解. 消去 xy 項:

$$(1)-(2), \quad x-y=3,$$

$$\text{即} \quad x=y+3.$$

$$\text{代入(2),得} \quad y+y(y+3)=32,$$

$$\text{即} \quad y^2+4y-32=0,$$

$$\text{劈因數,} \quad (y-4)(y+8)=0,$$

$$\therefore y-4=0 \text{ 或 } y+8=0,$$

$$\therefore y=4 \text{ 或 } -8,$$

$$x=7 \text{ 或 } -5.$$

故所求之根爲(7, 4), (-5, -8).

習題 III

解以下聯立方程：

$$1. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 4x^2 - 9y^2 = 36 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ 4x^2 - 9y^2 = 36 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{x^2}{3} - \frac{xy}{4} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ 9x^2 + 16y = 20 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 21 \\ x + y^2 = 11 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} xy + x + y + 4 = 0 \\ 3xy + x + y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} 3x^2 + 5x - 8y = 36 \\ 2x^2 - 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} 2x^2 - xy + 5y^2 = 10(x+y) \\ x^2 + 4xy + 3y = 14(x+y) \end{cases}$$

§ 6. 劈因數法第一. 有一方程可以劈爲一次因數者.

$$\text{例. 解} \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 30 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ xy = 6 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

解. (1) 可以劈因數爲

$$(x+x-5)(x+y+6)=0,$$

故

$$x+y-5=0 \dots\dots\dots(3)$$

或

$$x+y+6=0 \dots\dots\dots(4)$$

於是得以下之二組聯立方程：

$$(i) \quad \begin{cases} x+y-5=0 & (3) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$$

及 (ii) $\begin{cases} x+y+6=0 & (4) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$

因(3)與(4)之根,皆為(1)之根,是以此二組聯立方程之根,即原題之根也。故欲解(1)(2),即分別解(i)(ii)可矣。

(i)(ii)之解法,與上節同。

(i) 由(3)得 $y=5-x,$

代入(2),得 $x(5-x)=6,$

即 $x^2-5x+6=0,$

勞因數, $(x-2)(x-3)=0,$

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } 3,$$

$$y=3 \text{ 或 } 2.$$

(ii) 由(4)得 $y=-x-6.$

代入(2),得 $x(-x-6)=6,$

即 $x^2+6x+6=0,$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(-6 \pm \sqrt{36-24})$$

$$= -3 \pm \sqrt{3},$$

$$y = -3 \mp \sqrt{3}.$$

此聯立方程之根為以下四組:

$$(2, 3), (3, 2), (-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3}),$$

及 $(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}).$

習題 IV

1. 試繪圖象以驗上例:

(i) 繪(1)(2)二方程之圖象,

(ii) 繪(3)(2)及(4)(2)之圖象.

解 2-8 各聯立方程:

$$2. \begin{cases} y^2 - 3xy = 0 \\ 2x^2 + 5y^2 = 48 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 - 3xy = 0 \\ 5x^2 + 3y^2 = 9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 27 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x^2 - 7xy + 6y^2 = 0 \\ 3x^2 - 5y^2 = 28 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x^2 = 9y^2 \\ 4x^2 + y^2 = 8(x+y) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5x = 5 \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$$

§ 7. 劈因數法第二. 二方程經變化後得一
方程可劈為一次因數者.

$$\text{例 1. 解 } \begin{cases} x^2 + x + y^2 = 15 \dots\dots\dots (1) \\ 2xy + y = 15 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解. (1)(2)相加,得

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 30,$$

$$\text{即 } (x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0,$$

$$\text{劈因數, } (x+y-5)(x+y+6) = 0,$$

$$\therefore x+y-5=0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{或 } x+y+6=0 \dots\dots\dots (4)$$

以此二方程各與(1)或(2)聯立而解之:

$$(i) \begin{cases} x+y-5=0 \dots\dots\dots (3) \\ 2xy+y=15 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$x=5-y.$$

代入(2),得 $2y(5-y)+y=15,$
 即 $2y^2-11y+15=0,$
 即 $(2y-5)(y-3)=0,$
 $\therefore 2y-5=0$ 或 $y-3=0,$
 $\therefore y=\frac{5}{2}$ 或 $3,$
 $x=\frac{5}{2}$ 或 $2.$

(ii) $\begin{cases} x+y+6=0 \dots\dots\dots (4) \\ 2xy+y=15 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

$x=-y-6,$
 代入(2),得 $2y(-y-6)+y=15,$
 即 $2y^2+11y+15=0,$
 即 $(2y+5)(y+3)=0,$
 $2y+5=0$ 或 $y+3=0,$
 $\therefore y=-\frac{5}{2}$ 或 $-3,$
 $\therefore x=-\frac{7}{2}$ 或 $-3.$

故所求之根爲 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}), (2, 3), (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}), (-3, -3).$

例 2. 解 $\begin{cases} x^2-5xy+y^2+5=0 \dots\dots\dots (1) \\ xy-x-y+1=0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

解 以 7 乘 (2) 而與 (1) 相加,得

$x^2+2xy+y^2-7(x+y)+12=0,$
 即 $(x+y-3)(x+y-4)=0,$
 $\therefore x+y-3=0 \dots\dots\dots (3)$
 或 $x+y-4=0 \dots\dots\dots (4)$

再各與(1)或(2)聯立而解之:

$$(i) \quad \begin{cases} x+y-3=0 & (3) \\ xy-x-y+1=0 & (2) \end{cases}$$

$$y=3-x,$$

代入(2),得

$$x^2-3x+2=0,$$

劈因數,

$$(x-1)(x-2)=0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } 2,$$

$$y=2 \text{ 或 } 1.$$

$$(ii) \quad \begin{cases} x+y-4=0 & (4) \\ xy-x-y+1=0 & (2) \end{cases}$$

$$y=4-x,$$

代入(2),得

$$x^2-4x+3=0.$$

劈因數,

$$(x-1)(x-3)=0.$$

$$x-1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$x=1 \text{ 或 } 3,$$

$$y=3 \text{ 或 } 1.$$

故所求之根爲(1,2), (2,1), (1,3), (3,1).

習題 V

1. 試繪圖象以驗例 2:

(i) 繪(1)(2)二方程之圖象,

(ii) 繪 3)(2) 及 (4)(2) 之圖象.

解 2-13 各聯立方程:

$$2. \quad \begin{cases} x^2+xy=77 \\ xy+y^2=44 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x^2+xy=55 \\ y^2+xy=66 \end{cases}$$

- | | |
|---|--|
| 4. $\begin{cases} x^2 - xy = 45 \\ xy - y^2 = -36 \end{cases}$ | 5. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 39 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 43 \end{cases}$ |
| 6. $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = -2 \\ x^2 + 9xy + y^2 = 34 \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$ |
| 8. $\begin{cases} r^2 + s^2 = 5 \\ rs + r + s = 5 \end{cases}$ | 9. $\begin{cases} t^2 + u^2 + t + u = 8 \\ tu = 2 \end{cases}$ |
| 10. $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12 = x + y \\ xy + 8 = 2(x + y) \end{cases}$ |
| 12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 103 \\ x + y = xy - 79 \end{cases}$ | 13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 57 + xy \\ x + y = xy - 41 \end{cases}$ |

§ 8. 消常數法. 含未知數各項均爲二次者.

例. 解 $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44 & \dots\dots\dots (1) \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

解. 以 4 乘 (1), 得

$$4x^2 + 4xy + 8y^2 = 176 \quad \dots\dots\dots (3)$$

以 11 乘 (2), 得

$$22x^2 - 11xy + 11y^2 = 176 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(4) - (3),

$$18x^2 - 15xy + 3y^2 = 0,$$

即

$$6x^2 - 5xy + y^2 = 0,$$

劈因數,

$$(2x - y)(3x - y) = 0.$$

$$\therefore 2x - y = 0 \text{ 或 } 3x - y = 0.$$

$$(i) \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 44 \end{cases}$$

$$\therefore y = 2x,$$

$$\therefore x^2 + 2x^2 + 8x^2 = 44,$$

$$\therefore x^2 = 4,$$

$$\therefore x = \pm 2,$$

$$y = \pm 4.$$

$$(ii) \quad \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 44 \end{cases}$$

$$\therefore y = 3x,$$

$$\therefore x^2 + 3x^2 + 18x^2 = 44,$$

$$\therefore x^2 = 2,$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{2},$$

$$y = \pm 3\sqrt{2}.$$