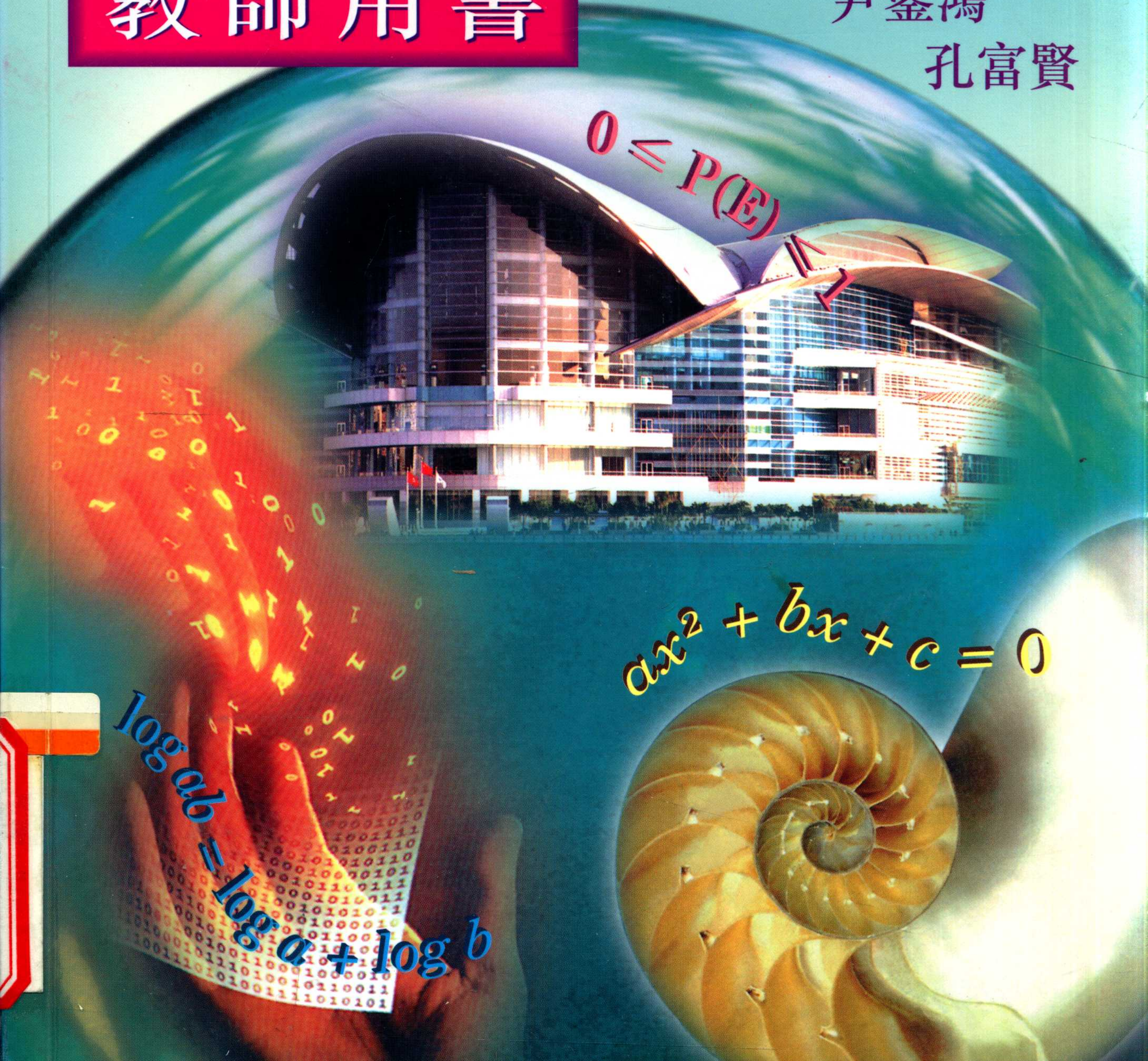
新編
活用數學

3A

教師用書

尹淼鴻
孔富賢



第1章

重點複習

1. 指數記數法

1A 冊 § 3.1 D

$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{共 } n \text{ 個 } a}$ 可寫成 a^n，讀作「a 的 n 次方」，

在 a^n 中，a 稱為底，n 稱為指數。

例如：$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 可寫成 2^5 。

2. a^m、a^n 的相乘和相除

1A 冊 § 3.4

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$，其中 m 和 n 都是自然數。

例如：$2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = \underline{\underline{2^5}}$

(b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 m 和 n 都是自然數，且 $m > n$ 及 $a \neq 0$ 。

例如：$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = \underline{\underline{2}}$

3. 平方根

2A 冊 § 2.1

(a) 如果 $a^2 = n$，則 a 是 n 的平方根。

(b) 任何正數 n 都有兩個平方根，它們都可用根號「$\sqrt{\ }$」來表示，其中 $\sqrt{n}$ 表示 n 的正平方根，而 $-\sqrt{n}$ 則表示 n 的負平方根。

例如：9 的正平方根是 $\sqrt{9}$ (等於 3)，負平方根是 $-\sqrt{9}$ (等於 -3)。

1.1 正整數指數

TN 3 參閱下頁

我們已學過 $\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{共 } n \text{ 個 } a}$ 可寫成 a^n，讀作「a 的 n 次方」。

此外，a^n 亦可稱為「**a 的 n 次冪**」(***n th power of a***)。

◀「冪」的讀音是「覓」。

即 a 稱為 a 的 1 次冪，

◀ 習慣上我們會省去指數「1」而將 a^1 寫成 a。

a^2 稱為 a 的 2 次冪，

◀ a^2 又可讀作「a 的平方」。

a^3 稱為 a 的 3 次冪，

◀ a^3 又可讀作「a 的立方」。

⋮

我們稱 a、a^2、a^3 等為 **a 的冪** (***powers of a***)。

回想在中一時，我們學過以下兩條定律：

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$，其中 m 和 n 都是自然數。

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$，其中 m 和 n 都是自然數，且 $m > n$ 及 $a \neq 0$。

這些定律的證明如下：

證明 **(i)**

$$a^m \times a^n = (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{\text{共 } m \text{ 個 } a}) \times (\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{\text{共 } n \text{ 個 } a})$$

$$= \overbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a \times a \times a \times a}^{\text{共 } (m+n) \text{ 個 } a}$$

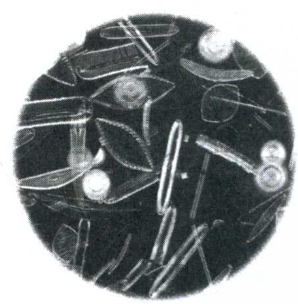
$$= \underline{\underline{a^{m+n}}}$$

趣味點滴

不少有趣的數據，都可以用正整數指數來表示。例如：

(a) 人體中約有 10^{14}（一百萬億）個細胞。

(b) 海洋的表面佈滿海藻單細胞植物（見下圖）。每個海藻細胞以分裂的方式來繁殖。經 1 次分裂後變成 2^1 個細胞，2 次便成 2^2 個，3 次成 2^3 個，…… 只須經 10 次分裂，便有 2^{10} 個（= 1 024 個），即超過 1 000 個了！



(ii) $$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a\times a\times a\times a\times\cdots\times a\times a}^{\text{共 } m \text{ 個 } a}}{\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a\times a}_{\text{共 } n \text{ 個 } a}}$$

$$= \overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{\text{共 } (m-n) \text{ 個 } a}$$

$$= \underline{\underline{a^{m-n}}}$$

老師篇 (屬上頁)

TN 3 事實上，$2^{96}\approx 8\times 10^{28}$，以數碼表示，可寫成 8 之後加上二十八個 0。

以下我們再探討多一些關於指數的性質。

課堂探討

在下列各題中，將一個含括號及指數的數式展開及化簡，成為一個不含括號並以指數表示的數式。

1. (a) $(4^3)^2 = (4\times4\times4)\times(4\times4\times4) = 4\times4\times4\times4\times4\times4$
$= 4^{\boxed{6}}$

(b) $(a^2)^3 = (a\times a)\times(a\times a)\times(a\times a) = a\times a\times a\times a\times a\times a$
$= a^{\boxed{6}}$

2. (a) $(5\times2)^3 = (5\times2)\times(5\times2)\times(5\times2) = 5\times5\times5\times\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{2}$
$= 5^3\times2^{\boxed{3}}$

(b) $(ab)^2 = (a\times b)\times(a\times b) = a\times a\times\boxed{b}\times\boxed{b}$
$= a^{\boxed{2}}b^{\boxed{2}}$

3. (a) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3\times3\times3\times3}{2\times2\times2\times2} = \frac{3^{\boxed{4}}}{2^{\boxed{4}}}$

(b) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \frac{a\times a\times a}{\boxed{b}\times\boxed{b}\times\boxed{b}} = \frac{a^{\boxed{3}}}{b^{\boxed{3}}}$

從課堂探討的第 1 題可得

$(a^m)^n = a^{mn}$，其中 m 和 n 都是正整數。

證明
$$(a^m)^n = \underbrace{\overbrace{(a\times a\times\cdots\times a)}^{\text{共 } m \text{ 個}}\times\overbrace{(a\times a\times\cdots\times a)}^{\text{共 } m \text{ 個}}\times\cdots\times\overbrace{(a\times a\times\cdots\times a)}^{\text{共 } m \text{ 個}}}_{\text{共 } n \text{ 組}}$$
$$= \overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{\text{共 } mn \text{ 個}}$$
$$= \underline{\underline{a^{mn}}}$$

◀ 每組有 m 個 a，因此 n 組共有 mn 個 a。

簡易例題 $(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = \underline{\underline{64}}$

從課堂探討的第 2 題可得

$(ab)^n = a^n b^n$，其中 n 是正整數。

證明
$$(ab)^n = \overbrace{(ab)\times(ab)\times\cdots\times(ab)}^{\text{共 } n \text{ 組}}$$
$$= \overbrace{(a\times a\times\cdots\times a)}^{\text{共 } n \text{ 個}}\times\overbrace{(b\times b\times\cdots\times b)}^{\text{共 } n \text{ 個}}$$
$$= \underline{\underline{a^n b^n}}$$

簡易例題 $(3t)^4 = 3^4t^4 = \underline{\underline{81t^4}}$

從課堂探討的第 3 題可得

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$，其中 n 是正整數及 $b \neq 0$。

證明
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\cdots\times\left(\frac{a}{b}\right)}^{\text{共 } n \text{ 組}}$$

老師篇 (屬下頁)

TN 4 雖然課堂探討的例子都是很簡易的，但仍要與同學仔細地討論，引導他們歸納出指數定律。老師應強調這些定律的意義，比要求同學強記它們更為重要，萬一同學忘記或不肯定這些定律時，仍然能夠導出這些公式。

TN 5 例一至例三是用來說明剛剛介紹過的指數定律。當討論這些例子時，老師宜指出每步所應用的是哪一條定律。

TN 6 指數定律可以推廣至多個指數的運算，例如：

(1) $a^m\times a^n\times a^p = a^{m+n+p}$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n}\div a^p = a^{m-n-p}$

(3) $(a^m b^n c^p)^k = a^{mk}b^{nk}c^{pk}$

因此，例一可以計算如下：

$\dfrac{a^3\times a^6}{a^4} = a^{3+6-4} = \underline{\underline{a^5}}$

$$= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{\text{共 } n \text{ 個}}}{\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{\text{共 } n \text{ 個}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a^n}{b^n}}}$$

簡易例題 $\left(\frac{y}{4}\right)^3 = \frac{y^3}{4^3} = \underline{\underline{\frac{y^3}{64}}}$

趣味點滴

在 1996 年時，中國的面積大約是 10^7 平方公里，人口大約是 12×10^8。

利用 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 這個定律，可以算出在中國每平方公里大約有 120 人。當時香港每平方公里大約有 6 000 人，和中國相比，香港的人口稠密得多了。

參閱上頁 TN 4
綜合上述所有關於指數的性質，我們得出下列指數定律 (*laws of indices*)：

當 m 和 n 是正整數時，

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$ 及 $m > n$)

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(ab)^n = a^n b^n$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

參閱上頁 TN 5
例一 化簡 $\frac{a^3 \times a^6}{a^4}$。

解

$\frac{a^3 \times a^6}{a^4} = \frac{a^{3+6}}{a^4}$ ◀ 應用指數定律 **(1)**。

$= \frac{a^9}{a^4}$

$= a^{9-4}$ ◀ 應用指數定律 **(2)**。

參閱上頁 TN 6

$= \underline{\underline{a^5}}$

例二 化簡 $\dfrac{(2a^2)^3}{a \times 2a^2}$。

TN 7 **解**

$$\begin{aligned}\frac{(2a^2)^3}{a \times 2a^2} &= \frac{2^3(a^2)^3}{2a^{1+2}} \\ &= \frac{2^{3-1}a^6}{a^3} \\ &= 2^2a^{6-3} \\ &= \underline{\underline{4a^3}}\end{aligned}$$

老師篇 TN 7
老師可著同學解釋 $a^2 \cdot a^3$ 與 $(a^2)^3$ 的分別。

◀ 應用指數定律 **(4)**：
$(2a^2)^3 = 2^3(a^2)^3$

◀ 應用指數定律 **(3)**：
$(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

例三 化簡 $(2a^2b^4)^3 \times \left(\dfrac{a}{b^5}\right)^2$。

解

$$\begin{aligned}(2a^2b^4)^3 \times \left(\frac{a}{b^5}\right)^2 &= 2^3(a^2)^3(b^4)^3 \times \frac{a^2}{(b^5)^2} \\ &= 8a^6b^{12} \times \frac{a^2}{b^{10}} \\ &= 8a^{6+2}b^{12-10} \\ &= \underline{\underline{8a^8b^2}}\end{aligned}$$

◀ 應用指數定律 **(4)**：
$(2a^2b^4)^3 = 2^3(a^2)^3(b^4)^3$
及指數定律 **(5)**：
$\left(\dfrac{a}{b^5}\right)^2 = \dfrac{a^2}{(b^5)^2}$

課堂練習

駕輕就熟

化簡下列各式。

答案

1. $a^3 \times a^4 \times a^5$ $\quad$ a^{12}
2. $\dfrac{(a^3)^2 \times a^2}{a^4}$ $\quad$ a^4
3. $5p^3q^2 \times (2p)^2 \times q$ $\quad$ $20p^5q^3$
4. $(2pq^3)^2 \times \left(\dfrac{p^2}{q}\right)^3$ $\quad$ $4p^8q^3$

習題 1A

(程度一)

化簡下列各式。 [第 1–10 題]

① **1.** $y^3 \times y^2$ $\quad y^5$

① **2.** $a^4 \times a^5$ $\quad a^9$

② **3.** $b^{10} \div b^5$ $\quad b^5$

② **4.** $c^{24} \div c^3$ $\quad c^{21}$

③ **5.** $(a^6)^4$ $\quad a^{24}$

③ **6.** $(k^8)^9$ $\quad k^{72}$

④ **7.** $a(ab)^2$ $\quad a^3b^2$

④ **8.** $(2c^2)^3$ $\quad 8c^6$

⑤ **9.** $b\left(\dfrac{a}{b}\right)^7$ $\quad \dfrac{a^7}{b^6}$

⑤ **10.** $u^3\left(\dfrac{3}{-u}\right)^2$ $\quad 9u$

(程度二)

化簡下列各式。 [第 11–18 題]

① **11.** $a^2 \times 2a^3 \times 5a$ $\quad 10a^6$

① **12.** $6c^3d^4 \times 7cd^2$ $\quad 42c^4d^6$

② **13.** $32m^{14} \div 8m^9$ $\quad 4m^5$

② **14.** $21r^{16}s^{11} \div 15s^7r^8$ $\quad \dfrac{7r^8s^4}{5}$

⑥ **15.** $(9a^3)^2$ $\quad 81a^6$

⑥ **16.** $(-3b^4c^5)^3$ $\quad -27b^{12}c^{15}$

⑥ **17.** $\left(\dfrac{2h}{k^2}\right)^4$ $\quad \dfrac{16h^4}{k^8}$

⑥ **18.** $\left(\dfrac{-c}{4ab^2}\right)^3$ $\quad -\dfrac{c^3}{64a^3b^6}$

化簡下列各式。 [第 19–24 題]

⑥ **19.** $\dfrac{b^7 \times b^2}{b^5}$ $\quad b^4$ ～例一

⑥ **20.** $\dfrac{h^5 \times 3k^4}{9k^2h^3}$ $\quad \dfrac{h^2k^2}{3}$

⑥ **21.** $\dfrac{(6n^3)^2}{4n \times n^4}$ $\quad 9n$ ～例二

⑥ **22.** $(cd^2)^{10} \times \left(\dfrac{d}{c^2}\right)^4$ ～例三 $\quad c^2d^{24}$

⑥ **23.** $3a^2 \times (-2a^3)^4 \div 4a^9$ $\quad 12a^5$

⑥ **24.** $\left(\dfrac{c}{d}\right)^6 \div \left(\dfrac{c}{2d^2}\right)^5$ $\quad 32cd^4$

1.2 零指數和負整數指數

回想：
我們在 **2B** 冊 § **9.3** 討論複利息時，已學過使用 x^y 鍵去計算一個數的冪。例如，在計算 3^4 時，按鍵次序為：

3 x^y 4 =
[81.]

課堂探討

(a) 利用計算機，求下列各數的值。

	答案
(i) 2^0	1
(ii) 25^0	1
(iii) $(-6)^0$	1
(iv) $(0.8)^0$	1

(b) 以上各題的答案都等於甚麼？ 1

從以上課堂探討，我們可得知用計算機求任何非零的數的「0 次方」，結果都是一樣。事實上，零指數的定義是：

如果 $a \neq 0$，則

$$\boxed{a^0 = 1}$$

以上定義可將指數定律推廣，使它除了可應用在正整數指數外，還可適用於零指數。

趣味點滴

我們用來量度傳送電子訊號所需時間的單位是納秒 (*nanosecond*)，1 納秒等於 10^{-9} 秒 (10 億分之 1 秒)。這個時間比「一剎那間」所形容的時間要短得多呢！原來，「剎那」一詞出自佛典，1 秒中便有 75 剎那，由此可以算出，就算是一剎那間，也超過千萬納秒。 TN 8

老師篇 TN 8

根據佛典《俱舍論》，一日一夜共有 6 480 000 剎那，所以 1 秒共有 75 剎那。不過，日常所用的「剎那」，只是形容極短暫的時間，並不是一個精確的時間度量。

接著我們進一步去考慮一個數的負整數次方，即 a^{-n} 的意義。為了要令指數定律亦可適用於負整數指數，a^{-n} 的定義必須使以下的數式成立：

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)}$$

即 $a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$

◀ 即指數定律 **(1)** 仍成立。

因此，我們這樣定義負整數指數：

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

◀ 要符合 $a^n \cdot a^{-n} = 1$，則 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。

TN 9 事實上，根據這個定義，指數定律亦可推廣至負整數指數。

例四 不使用計算機，求下列各式的值，並以分數表示答案。

(a) $6^{-2} \times 8^0$ **(b)** $3^{-1} \div 3^2$ **(c)** $8^{-3} \div 4^{-4}$

解

(a)
$$\begin{aligned} 6^{-2} \times 8^0 &= \frac{1}{6^2} \times 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{36}}} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3^{-1} \div 3^2 &= 3^{-1-2} \\ &= 3^{-3} \\ &= \frac{1}{3^3} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{27}}} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 8^{-3} \div 4^{-4} &= (2^3)^{-3} \div (2^2)^{-4} \\ &= 2^{-9} \div 2^{-8} \\ &= 2^{-9-(-8)} \\ &= 2^{-1} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

◀ 將 8 和 4 都表示成 2 的冪。

老師篇 TN 9
老師可著同學驗證其它指數定律，例如
(1) 對於 $a^m \div a^n = a^{m-n}$，可取 $m = 2$ 及 $n = 3$；
(2) 對於 $(a^m)^n = a^{mn}$，分別取 $m = 2$ 及 $n = -1$ 等等。

例五 化簡下列各式，並以正指數表示答案。

(a) $(8a^{-4})\left(\dfrac{2}{a^2}\right)^{-3}$

(b) $\dfrac{(a^{-2}b)^3}{a^3b^{-2}}$

解

(a)
$$\begin{aligned}(8a^{-4})\left(\frac{2}{a^2}\right)^{-3} &= (2^3a^{-4})(2a^{-2})^{-3} \\ &= 2^3\cdot a^{-4}\cdot 2^{-3}(a^{-2})^{-3} \\ &= 2^3\cdot 2^{-3}\cdot a^{-4}a^6 \\ &= 2^{3-3}\cdot a^{-4+6} \\ &= 2^0\cdot a^2 \\ &= \underline{\underline{a^2}}\end{aligned}$$

◀ $\dfrac{1}{a^2} = a^{-2}$

◀ $(a^{-2})^{-3} = a^{(-2)\times(-3)} = a^6$

◀ $2^0 = 1$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{(a^{-2}b)^3}{a^3b^{-2}} &= \frac{(a^{-2})^3b^3}{a^3b^{-2}} \\ &= \frac{a^{-6}b^3}{a^3b^{-2}} \\ &= a^{-6-3}b^{3-(-2)} \\ &= a^{-9}b^5 \\ &= \underline{\underline{\frac{b^5}{a^9}}}\end{aligned}$$

課堂練習

不使用計算機，求下列各式的值。 **[第 1–6 題]**
(答案以整數或分數表示。)

1. $\left(\dfrac{3}{17}\right)^0 =$ $\underline{\quad 1 \quad}$

2. $10^{-2} =$ $\underline{\quad \dfrac{1}{100} \quad}$

3. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} =$ $\underline{\quad 16 \quad}$

4. $(6^{-1}\times 3)^{-2} =$ $\underline{\quad 4 \quad}$

5. $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^0(2^{-3}) =$ $\underline{\quad \dfrac{1}{8} \quad}$

6. $\left(\dfrac{3^{-2}}{9}\right)^{-1} =$ $\underline{\quad 81 \quad}$

化簡下列各式。 [第 7–8 題]
(答案以正指數表示。)

7. $(a^3b^{-2})^{-3} = \underline{\dfrac{b^6}{a^9}}$ 8. $(a^{-2}b)^2 \times \left(\dfrac{a}{b^{-2}}\right)^4 = \underline{b^{10}}$

習題 1B

(程度一) 穩紮根基

求下列各式的值，並以整數或分數表示答案。 [第 1–5 題]

① 1. 7^0 1 ① 2. $(-1\,997)^0$ 1 ① 3. 5^{-2} $\dfrac{1}{25}$

① 4. $6^{-3}\times 6^2$ $\dfrac{1}{6}$ ① 5. $4^2 \div 4^{-1}$ 64

化簡下列各式，並以正指數表示答案。 [第 6–10 題]

② 6. $x^4 \times x^{-5}$ $\dfrac{1}{x}$ ② 7. $y^2 \div y^5$ $\dfrac{1}{y^3}$ ② 8. $(a^{-2})^{-3}$ a^6

② 9. $(ab)^{-3}$ $\dfrac{1}{a^3b^3}$ ② 10. $\left(\dfrac{c^0}{d}\right)^{-1}$ d

(程度二) 循序漸進

求下列各式的值，並以整數或分數表示答案。 [第 11–15 題]

① 11. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$ 32 ① 12. $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^0 \times 10^{-2}$ ~例四 (a) $\dfrac{1}{100}$

① 13. $4^0 \div \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-2}$ $\dfrac{25}{36}$ ① 14. $49^{-2} \div 7^{-3}$ $\dfrac{1}{7}$ ~例四 (c)

① 15. $2^{-5} \div 4^{-4} \times 8^{-3}$ $\dfrac{1}{64}$

化簡下列各式，並以正指數表示答案。 [第 16–22 題]

② 16. $(a^2b^{-1})^{-1}$ $\dfrac{b}{a^2}$ ② 17. $(h^{-3}k^4)^{-2}$ $\dfrac{h^6}{k^8}$

② 18. $\left(\dfrac{c^{-2}}{d^5}\right)^{-4}$ c^8d^{20} ② 19. $\left(-\dfrac{r^0}{s^{-7}}\right)^2$ s^{14}

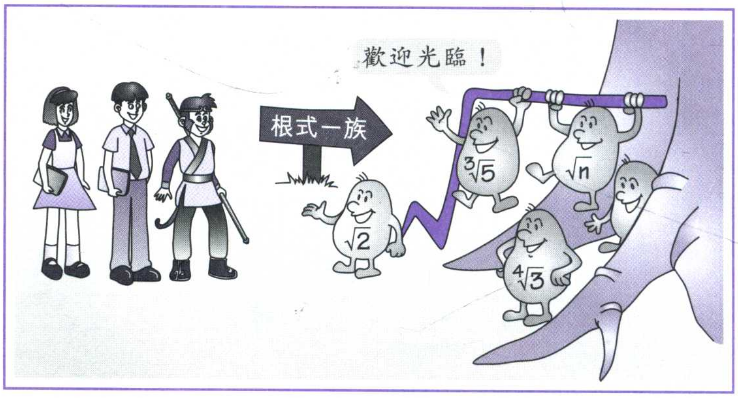
②**20.** $(9x^{-6})\left(\dfrac{3}{x^{-4}}\right)^{-2}$ ～例五 **(a)** $\dfrac{1}{x^{14}}$

②**21.** $\dfrac{(h^{-3}k)^2}{k^{-5}h^6}$ $\dfrac{k^7}{h^{12}}$ ～例五 **(b)**

②**22.** $\left(\dfrac{a^4b^9}{a^{-7}b^{-8}}\right)^0\dfrac{(2a^{-1}b)^{-2}}{(8b^{-5})^{-1}}$ $\dfrac{2a^2}{b^7}$

1.3 根式與分數指數

A. 根式



我們在中二時已經學過

若 $x^2 = a$，則 x 是 a 的平方根 (*square root*)。 ◀ 平方根亦稱為二次方根。

同樣，若 $x^3 = a$，則 x 是 a 的立方根 (*cube root*)； ◀ 立方根亦稱為三次方根。

若 $x^4 = a$，則 x 是 a 的四次方根 (*fourth root*)。

例如：**(1)** $5^2 = 25$ 及 $(-5)^2 = 25$ $\therefore$ 5 和 -5 都是 25 的平方根。

(2) $2^3 = 8$ $\therefore$ 2 是 8 的立方根。

$(-2)^3 = -8$ $\therefore$ -2 是 -8 的立方根。

(3) $3^4 = 81$ 及 $(-3)^4 = 81$ $\therefore$ 3 和 -3 都是 81 的四次方根。

TN 10 一般來說，若 $x^n = a$，其中 n 是正整數，則 x 稱為 a 的 **n 次方根（*n th root*）**。

老師篇

TN 10 雖然 $2^{-3} = \frac{1}{8}$，但我們不能說 2 是 $\frac{1}{8}$ 的 -3 次方根，因為 n 必須是正整數。

TN 11 寫根式時要留心不要把 $\sqrt[4]{81}$ 寫成 $4\sqrt{81}$，因為 $4\sqrt{81}$ 表示 $4 \times \sqrt{81}$。

情況 1 當 n 是偶數及 $a > 0$ 時：

a 有兩個 n 次方根，它們是符號相反的數。我們用**根式（*radical*）** $\sqrt[n]{a}$ 來表示 a 的正 n 次方根而 $-\sqrt[n]{a}$ 表示 a 的負 n 次方根。

TN 11 例如：81 的 4 次方根可寫成 $\sqrt[4]{81}$ 及 $-\sqrt[4]{81}$，其中 $\sqrt[4]{81} = 3$ 而 $-\sqrt[4]{81} = -3$。

情況 2 當 n 是偶數及 $a < 0$ 時：

由於任何數的偶數次方都不可能是負數，即 $a \not< 0$，所以 a 的 n 次方根在此情況下並不存在，即負數沒有偶數次方根。

◀ 例如 $2^2 = 4$，$(-3)^4 = 81$，等。

情況 3 當 n 是奇數時：

a 只有一個 n 次方根，並可用根式 $\sqrt[n]{a}$ 來表示。

TN 12 例如：27 的 3 次方根可寫成 $\sqrt[3]{27}$；-27 的 3 次方根可寫成 $\sqrt[3]{-27}$，其中 $\sqrt[3]{27} = 3$ 而 $\sqrt[3]{-27} = -3$。

老師篇 TN 12

下表列出一個數 a 的 n 次方根的數目及特性：

	a 是正數	a 是負數
n 是偶數	有 2 個 n 次方根，它們的數值相同，但正負號相反。	沒有 n 次方根。
n 是奇數	只有一個正的 n 次方根。	只有一個負的 n 次方根。

簡易例題

1. 求 $\sqrt[3]{125}$ 的值。

解

$\because\ 125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{125} = \underline{\underline{5}}$

◀
$$\begin{array}{r|l} 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

2. 求 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 的值。

解

$\because\ \frac{16}{81} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$\therefore\ \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

課堂練習

駕輕就熟

(在本練習中，不得使用計算機。)

求下列各數的值。

1. $\sqrt{144}=$ 12

2. $\sqrt{\dfrac{9}{16}}=$ $\dfrac{3}{4}$

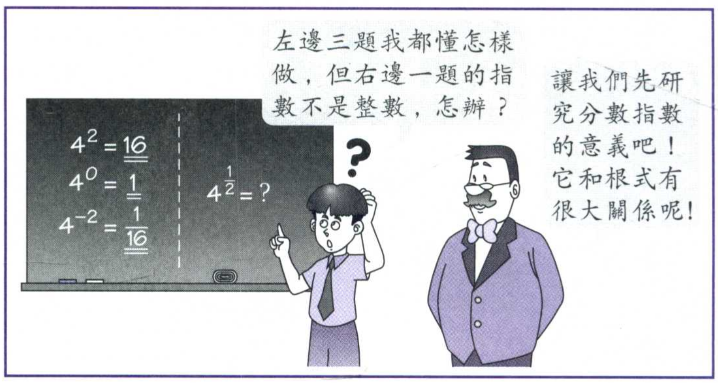
3. $\sqrt[3]{-64}=$ -4

4. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=$ $\dfrac{2}{3}$

5. $\sqrt[4]{256}=$ 4

6. $\sqrt{\dfrac{3}{147}}=$ $\dfrac{1}{7}$

B. 分數指數



我們在 § 1.1 所學的指數定律，原本只適用於正整數指數，在 § 1.2 中已推廣至零指數及負整數指數。事實上，指數定律更可以推廣至分數指數，即是說當指數為分數時，指數定律亦會成立。

首先讓我們從指數定律 $(a^m)^n=a^{mn}$ 去探究 $a^{\frac{1}{n}}$ 的意義：　◀ n 是正整數。

由於 $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}=a$，根據根式的定義，可得 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$；

由於 $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3=a^{\frac{1}{3}\times 3}=a$，根據根式的定義，可得 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$；

一般來說，對於正整數 n，

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a^1 = a$$

因此，根據根式的定義，$a^{\frac{1}{n}}$ 可定義如下：

TN 13

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

老師篇 TN 13

由於 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 而 $\sqrt[n]{a}$ 的意思是 a 的 n 次方根，所以老師可提醒同學：a 的 n 次方根可以用 $a^{\frac{1}{n}}$ 或 $\sqrt[n]{a}$ 來表示。

◀ 利用「$x^n = a$ 則 $x = \sqrt[n]{a}$」這事實，並取 $x = a^{\frac{1}{n}}$。

簡易例題

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

2. $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \underline{\underline{3}}$

3. $27^{-\frac{1}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 3^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

老師篇 TN 14

當 $a < 0$ 時，n 必須是正奇數；當 $a > 0$ 時，n 可以是任何正整數。

跟著，我們將進一步探究 $a^{\frac{m}{n}}$ 的意義：

◀ m、n 是整數，且 $n > 0$。

由於 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，在等號左右兩邊各取 m 次方，可得

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

即 $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ ....(i)

此外，$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .... (ii)

綜合 (i) 和 (ii)，$a^{\frac{m}{n}}$ 可定義如下：

TN 14

TN 15

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

老師篇 TN 15

在計算 $a^{\frac{m}{n}}$ 的值時，若未將指數 $\frac{m}{n}$ 化成最簡形式，我們便應先將它化簡，然後才利用公式計算該數式的值。

例如：

計算 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 的值時，我們先將 $\frac{2}{6}$ 化簡成 $\frac{1}{3}$，然後計算 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的值，得正確答案 -2；否則，若以 $\sqrt[6]{(-8)^2}$ 計算，便會得錯誤的答案 2。

簡易例題 求 $64^{\frac{2}{3}}$ 的值。

解 $64^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = \underline{\underline{16}}$

◀ $64^{\frac{2}{3}}$ 亦可寫作 $\sqrt[3]{64^2}$，其中 $\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{4\,096}$，但 4 096 的立方根不易求得。

另解

$64^{\frac{2}{3}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} = 2^{6\times\frac{2}{3}} = 2^4 = \underline{\underline{16}}$

◀ 用這個方法，便無須使用根式。

例六 化簡下列各式，並以正指數表示答案。

(a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

(b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3b^{-3}}}$

解

(a)
$$\begin{aligned}\sqrt{a\sqrt{a}} &= \sqrt{a\times a^{\frac{1}{2}}}\\ &= \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}}\\ &= \sqrt{a^{\frac{3}{2}}}\\ &= \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= a^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}\\ &= \underline{\underline{a^{\frac{3}{4}}}}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3b^{-3}}} &= \frac{a^{\frac{5}{4}}\times b^{\frac{3}{2}}}{(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{a^{\frac{5}{4}}\times b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}\\ &= a^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}\\ &= a^{-\frac{1}{4}}b^3\\ &= \frac{b^3}{a^{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

◀ $(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}} = a^{3\times\frac{1}{2}}b^{-3\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$