

湖北省高职高专  
规划教材  
——应用数学系列

总主编  
朱永银



● 主编 刘学才 张汉萍

● 主审 夏俊炜

# 经济 应用数学

Jingji Yingyong Shuxue



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

东莞职业技术学院图书馆



A00156219

湖北省高职高专规划教材——应用数学系列

总主编 朱永银

# 经济应用数学

主 编 刘学才 张汉萍  
主 审 夏俊炜  
副主编 彭先萌 陈孝平 叶菊芳  
赵 玲 洪晓枝 胡方富  
袁 森



华中科技大学出版社

中国·武汉

## 内 容 简 介

《经济应用数学》是“湖北省高职高专规划教材——应用数学系列”之一。全书分为7章,内容包括函数、极限与连续,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用,多元函数微分学及其应用,行列式、矩阵与线性规划初步,概率初步,数理统计初步。附录中介绍了有关的简易积分表、常用分布表、正态分布数值表,有“\*”号的内容供选学或略讲。每节后配有练习题,每章后附有综合练习题,并在书后附有习题的参考答案。

本书是根据高职高专院校的培养目标,针对高职高专工科专业建设的需要及学生的实际状况编写的。本书力求从实际案例引入概念,略去烦琐的理论论述,注重数学思想与方法的培养,强调数学知识的应用,顺应了高职高专教育的改革与发展,内容精要,简明易懂,适合作为高等职业技术学院及相当层次学校的经济类各专业的数学教材。

67527

### 图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/刘学才 张汉萍 主编. —武汉:华中科技大学出版社,2010.9  
ISBN 978-7-5609-6502-4

I. 经… II. ①刘… ②张… III. 经济数学-高等学校:技术学校-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 160617 号

### 经济应用数学

刘学才 张汉萍 主编

策划编辑:徐正达

责任编辑:王汉江

封面设计:刘 卉

责任校对:祝 菲

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:13

字 数:277千字

版 次:2010年9月第1版第1次印刷

定 价:23.50元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究

## 前 言

为了推动我省高职高专数学课程教学改革,加强教材建设,湖北省数学学会高职高专数学研究会和华中科技大学出版社组织全省有较高学术水平和丰富教学经验的部分数学骨干教师经过近两年的努力,编写了《湖北省高职高专规划教材——应用数学系列》。本系列教材包括《工程应用数学》(上、下册)、《经济应用数学》、《计算机应用数学》等。在编写过程中,我们力求做到以应用为目的,以“必需,够用”为度,要求每章节尽量实行“案例(引例)驱动”,就是从实际问题出发,引出概念,并讲清概念,还注意到将数学建模思想渗透到教材中。本系列教材适合于在高中阶段学过极限理论、导数与导数应用知识的大学生使用。

本系列教材由朱永银教授担任总主编,负责总策划,拟订编写大纲,并对全书进行审稿、定稿、统稿。湖北职业技术学院夏俊炜副教授、咸宁职业技术学院副院长张业明副教授、武汉职业技术学院刘昌喜副教授担任主审,他们对系列教材提出了宝贵的意见,编者不胜感激。

《经济应用数学》由刘学才、张汉萍担任主编,夏俊炜担任主审,彭先萌、陈孝平、叶菊芳、赵玲、洪晓枝、胡方富、袁森担任副主编,参加编写的还有周文、孟喜艳、林敏、范光等。全书由刘学才、朱永银统稿。

本书有“\*”号的内容供选学,各学校可根据教学要求安排授课时。如果讲授全部内容,约需78学时;如果有“\*”号的内容不上,约需52学时。

武汉职业技术学院、咸宁职业技术学院、湖北职业技术学院、仙桃职业学院、湖北轻工职业技术学院、恩施职业技术学院、沙市职业大学、湖北财税职业学院、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、十堰职业技术学院、荆州职业技术学院、鄂东职业技术学院、襄樊职业技术学院、武汉职业技术学院轻工学院、湖北开放职业学院等院校对本系列教材的顺利出版发行给予了大力支持,本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果,在此一并致谢。

由于编者水平有限,本书难免存在疏漏之处,敬请广大读者不吝赐教,提出批评意见,以便再版时修改,使本系列教材日臻完善。

编 者

2010年7月

# 目 录

|                                 |                        |
|---------------------------------|------------------------|
| 第1章 函数、极限与连续 .....              | (1)                    |
| 1.1 函数 .....                    | (1)                    |
| 1.1.1 函数的概念(1)                  | 1.1.2 基本初等函数和初等函数(3)   |
| 练习 1.1 .....                    | (3)                    |
| 1.2 经济学中常用的函数 .....             | (4)                    |
| 1.2.1 需求函数与供给函数(4)              | 1.2.2 总成本函数(5)         |
| 1.2.3 总收益函数(5)                  | 1.2.4 利润函数(6)          |
| 练习 1.2 .....                    | (6)                    |
| 1.3 函数的极限 .....                 | (6)                    |
| 1.3.1 数列的极限(6)                  | 1.3.2 函数的极限(7)         |
| 1.3.3 无穷小量和无穷大量(9)              | 1.3.4 极限的运算 两个重要极限(10) |
| 练习 1.3 .....                    | (13)                   |
| 1.4 函数的连续性 .....                | (13)                   |
| 1.4.1 函数连续性的概念(13)              | 1.4.2 初等函数的连续性(15)     |
| 1.4.3 闭区间上连续函数的性质 .....         | (15)                   |
| 练习 1.4 .....                    | (16)                   |
| 综合练习 1 .....                    | (16)                   |
| 第2章 一元函数微分学及其应用 .....           | (18)                   |
| 2.1 导数的概念 .....                 | (18)                   |
| 2.1.1 概念的引入 (18)                | 2.1.2 导数的定义(19)        |
| 2.1.3 导数的几何意义(21)               | 2.1.4 可导性与连续性的关系(22)   |
| 2.1.5 高阶导数(22)                  |                        |
| 练习 2.1 .....                    | (23)                   |
| 2.2 求导法则 .....                  | (24)                   |
| 2.2.1 导数的四则运算(24)               | 2.2.2 反函数的求导(25)       |
| 2.2.3 复合函数的求导(26)               |                        |
| 练习 2.2 .....                    | (28)                   |
| 2.3 隐函数的导数、由参数方程所确定的函数的导数 ..... | (28)                   |
| 2.3.1 隐函数的导数(28)                | 2.3.2 参数方程的求导(30)      |
| 练习 2.3 .....                    | (31)                   |
| 2.4 中值定理与洛必达法则 .....            | (32)                   |
| 2.4.1 拉格朗日中值定理(32)              | 2.4.2 洛必达法则 (33)       |
| 练习 2.4 .....                    | (35)                   |
| 2.5 函数的单调性及其极值 .....            | (36)                   |
| 2.5.1 函数的单调性(36)                | 2.5.2 函数的极值及其求法(37)    |
| 练习 2.5 .....                    | (40)                   |

|                                |                       |
|--------------------------------|-----------------------|
| 2.6 函数的最大值和最小值 .....           | (40)                  |
| 练习 2.6 .....                   | (42)                  |
| 2.7 导数在经济中的应用 .....            | (43)                  |
| 2.7.1 边际分析(43)                 | 2.7.2 弹性分析(45)        |
| 练习 2.7 .....                   | (46)                  |
| 2.8 函数的微分 .....                | (46)                  |
| 2.8.1 微分的概念(46)                | 2.8.2 微分的几何意义(48)     |
| 2.8.3 微分的运算法则与公式(48)           | 2.8.4 微分的应用(49)       |
| 练习 2.8 .....                   | (50)                  |
| 综合练习 2 .....                   | (51)                  |
| <b>第 3 章 一元函数积分学及其应用</b> ..... | (53)                  |
| 3.1 定积分的概念与性质 .....            | (53)                  |
| 3.1.1 引例(53)                   | 3.1.2 定积分的定义(55)      |
| 3.1.3 定积分的几何意义(55)             | 3.1.4 定积分的性质(56)      |
| 练习 3.1 .....                   | (58)                  |
| 3.2 不定积分的概念与性质 .....           | (59)                  |
| 3.2.1 原函数与不定积分的概念(59)          | 3.2.2 基本积分公式(60)      |
| 3.2.3 不定积分的性质(61)              |                       |
| 练习 3.2 .....                   | (62)                  |
| 3.3 微积分的基本公式 .....             | (62)                  |
| 3.3.1 变上限积分(63)                | 3.3.2 牛顿-莱布尼兹公式(64)   |
| 练习 3.3 .....                   | (65)                  |
| 3.4 换元积分法 .....                | (65)                  |
| 3.4.1 第一类换元法(65)               | 3.4.2 第二类换元法(67)      |
| 练习 3.4 .....                   | (69)                  |
| 3.5 分部积分法 .....                | (70)                  |
| 练习 3.5 .....                   | (72)                  |
| 3.6 微分方程的基本概念 .....            | (72)                  |
| 3.6.1 微分方程的基本概念(72)            | 3.6.2 可分离变量的微分方程(73)  |
| 练习 3.6 .....                   | (75)                  |
| 3.7 一阶线性微分方程 .....             | (76)                  |
| 3.7.1 一阶齐次线性微分方程(76)           | 3.7.2 一阶非齐次线性微分方程(76) |
| 练习 3.7 .....                   | (78)                  |
| 3.8 定积分在几何上的应用 .....           | (78)                  |
| 3.8.1 微元分析法(78)                | 3.8.2 平面图形的面积(79)     |
| * 3.8.3 旋转体的体积(81)             |                       |
| 练习 3.8 .....                   | (83)                  |
| 3.9 定积分在经济中的应用举例 .....         | (83)                  |
| 3.9.1 已知边际函数求总函数(83)           |                       |

• VI • 经济应用数学

3.9.2 由经济函数的边际,求经济函数在区间上的增量(85)

3.9.3 由经济函数的变化率,求经济函数在区间上的平均变化率(86)

3.9.4 由贴现率求总贴现值在时间区间上的增量(87)

练习 3.9 ..... (87)

综合练习 3 ..... (88)

\* 第 4 章 多元函数微分学及其应用 ..... (90)

4.1 空间直角坐标系 ..... (90)

4.1.1 空间直角坐标系(90)

4.1.2 空间两点间的距离(91)

4.1.3 二次曲面简介(91)

练习 4.1 ..... (93)

4.2 二元函数的极限与连续 ..... (93)

4.2.1 二元函数(93)

4.2.2 二元函数的几何意义(95)

4.2.3 二元函数的极限与连续(95)

练习 4.2 ..... (97)

4.3 偏导数 ..... (97)

4.3.1 偏导数(97)

4.3.2 高阶偏导数(99)

练习 4.3 ..... (100)

4.4 全微分 ..... (101)

4.4.1 全增量(101)

4.4.2 全微分(101)

练习 4.4 ..... (102)

4.5 偏导数的应用 ..... (102)

4.5.1 多元函数的极值(103)

4.5.2 条件极值、拉格朗日乘数法(105)

4.5.3 经济应用举例(106)

练习 4.5 ..... (108)

综合练习 4 ..... (109)

第 5 章 行列式、矩阵与线性规划初步 ..... (111)

5.1 行列式及其性质 ..... (111)

5.1.1 行列式的定义(111)

5.1.2 行列式的性质(113)

\* 5.1.3 克莱姆法则(116)

练习 5.1 ..... (118)

5.2 矩阵的概念和运算 ..... (118)

5.2.1 矩阵的概念(119)

5.2.2 矩阵的运算(120)

练习 5.2 ..... (124)

5.3 逆矩阵 ..... (125)

5.3.1 逆矩阵的概念(125)

5.3.2 初等行变换的概念(127)

5.3.3 用初等行变换求逆矩阵(127)

练习 5.3 ..... (128)

\* 5.4 线性方程组的解法 ..... (128)

5.4.1 矩阵的秩(128)

5.4.2 线性方程组的消元解法(130)

|                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| * 5.4.3 线性方程组解的情况的判定(131) |                          |
| 练习 5.4 .....              | (133)                    |
| * 5.5 线性规划的概念及图解法 .....   | (134)                    |
| 5.5.1 线性规划的数学模型(134)      | 5.5.2 线性规划的图解法(137)      |
| 练习 5.5 .....              | (139)                    |
| * 5.6 单纯形法 .....          | (140)                    |
| 5.6.1 线性规划问题的标准形式(140)    | 5.6.2 线性规划的单纯形法(142)     |
| 练习 5.6 .....              | (144)                    |
| 综合练习 5 .....              | (145)                    |
| <b>第 6 章 概率初步</b> .....   | (147)                    |
| 6.1 随机事件 .....            | (147)                    |
| 6.1.1 随机现象与随机试验(147)      | 6.1.2 事件的关系与运算(148)      |
| 练习 6.1 .....              | (149)                    |
| 6.2 事件的概率与古典概型 .....      | (150)                    |
| 6.2.1 概率的概念(150)          | 6.2.2 概率的性质(151)         |
| 6.2.3 古典概型(151)           |                          |
| 练习 6.2 .....              | (153)                    |
| 6.3 概率的基本公式 .....         | (153)                    |
| 6.3.1 加法公式(153)           | 6.3.2 条件概率与乘法公式(154)     |
| 6.3.3 全概率公式(156)          | 6.3.4 贝叶斯公式(157)         |
| 6.3.5 事件的独立性(157)         | 6.3.6 伯努利概型(158)         |
| 练习 6.3 .....              | (158)                    |
| * 6.4 随机变量及其分布 .....      | (159)                    |
| 6.4.1 随机变量的概念(159)        | 6.4.2 离散型随机变量的概率分布(159)  |
| 6.4.3 连续型随机变量及其概率密度(161)  | 6.4.4 随机变量的分布函数(162)     |
| 练习 6.4 .....              | (165)                    |
| * 6.5 随机变量的数字特征 .....     | (165)                    |
| 6.5.1 离散型随机变量的数学期望(165)   | 6.5.2 连续型随机变量的数学期望(166)  |
| 6.5.3 数学期望的性质(167)        | 6.5.4 随机变量的方差(167)       |
| 6.5.5 方差的性质(168)          |                          |
| 练习 6.5 .....              | (168)                    |
| 综合练习 6 .....              | (168)                    |
| <b>第 7 章 数理统计初步</b> ..... | (170)                    |
| 7.1 简单随机样本 .....          | (170)                    |
| 7.1.1 总体与个体(170)          | 7.1.2 样本与简单随机样本(170)     |
| 7.1.3 样本分布及其数字特征(171)     |                          |
| 练习 7.1 .....              | (173)                    |
| * 7.2 参数估计 .....          | (173)                    |
| 7.2.1 样本均值与样本方差(173)      | 7.2.2 总体均值与总体方差的点估计(174) |

• VII • 经济应用数学

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 练习 7.2 .....         | (175) |
| * 7.3 一元线性回归分析 ..... | (175) |
| 练习 7.3 .....         | (178) |
| 综合练习 7 .....         | (179) |
| 附录 .....             | (180) |
| 附录 A 简易积分表 .....     | (180) |
| 附录 B 常用分布表 .....     | (187) |
| 附录 C 正态分布数值表 .....   | (188) |
| 习题参考答案 .....         | (189) |

# 第1章 函数、极限与连续

函数是微积分研究的对象,极限是研究微积分的基本方法.本章我们将在复习函数知识的基础上,学习极限的概念,讨论极限的性质和运算法则及连续函数的概念与性质等.

## 1.1 函数

### 1.1.1 函数的概念

#### 1. 函数

引例1 圆的面积  $A$  与圆的半径  $r$  有关系式

$$A = \pi r^2, \quad \text{①}$$

其中,  $\pi$  在圆的面积计算中是不变的,这样的量称为常量.  $A$  和  $r$  都是变量. 在式①中的  $r$  取值范围是  $r > 0$ , 对每一个  $r$  通过式①都有唯一的  $A$  与之对应.

引例2 某手表厂生产一只手表的可变成本为 25 元,每天的固定成本为 3000 元,每天的总成本  $y$ (元)与总产量  $x$ (只)有关系式

$$y = 3000 + 25x. \quad \text{②}$$

在式②中  $x$  的取值范围是  $x > 0$ , 对每一个  $x$  通过式②都有唯一的  $y$  与之对应.

上述两例,抛开各自的具体含义,可以抽象出函数的一般概念.

**定义1** 设  $x, y$  是同一过程中的两个变量,若当  $x$  取其变化范围  $D$  内的任一值时,通过某种对应规则  $f$ ,总有唯一确定变量  $y$  的值与之对应,则称  $y$  是  $x$  的函数,记为  $y = f(x)$ . 称变量  $x$  是自变量,变量  $y$  是因变量. 表示对应法则的  $f$  是函数的符号,集合  $D$  是函数的定义域.

例1 设  $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ , 求  $f(0), f(2), f(x-1)$ .

解  $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2, \quad f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0,$   
 $f(x-1) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = x^2 - 5x + 6.$

例2 确定下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{x+3}; \quad (2) f(x) = \sqrt{4-x^2}.$$

解 (1) 当  $x = -3$  时,  $f(x)$  的分母为零,无意义,因此函数的定义域为除  $x = -3$  之外的全体实数,即  $D = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ .

(2) 要使函数有意义,必须要满足被开方式  $4 - x^2 \geq 0$ , 解此不等式得

$$-2 \leq x \leq 2,$$

因此函数的定义域是  $D = [-2, 2]$ .

## 2. 分段函数

**引例 3** 某厂生产产品 1000 t, 定价 120 元/t. 若销售量不超过 700 t, 按原定价出售; 若销售量超过 700 t, 超过部分按原价的 8.5 折优惠出售. 于是销售收入  $R$  与销售量  $x$  的关系式为

$$R(x) = \begin{cases} 120x, & 0 \leq x \leq 700, \\ 120 \times 700 + 120 \times 0.85(x - 700), & 700 < x \leq 1000, \end{cases}$$

即 
$$R(x) = \begin{cases} 120x, & 0 \leq x \leq 700, \\ 102x + 12600, & 700 < x \leq 1000. \end{cases}$$

自变量在定义域内不同区间上对应不同关系式的函数, 称为分段函数.

对于分段函数, 要注意以下几点:

- (1) 分段函数是定义域上的一个函数, 而不是几个函数;
- (2) 分段函数的定义域是各段取值集合的并集;
- (3) 求函数值时, 要根据自变量所在的范围选用相应的解析式.

**例 3** 设函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq -1, \\ 2x+1, & -1 < x \leq 1, \\ 4-x, & x > 1, \end{cases}$  求  $f(-1), f(0), f(2)$ .

**解** 因为  $-1 \in (-\infty, -1]$ , 所以  $f(-1) = -(-1)^2 = -1$ . 而  $0 \in (-1, 1]$ , 因此  $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$ . 同理,  $2 \in (1, +\infty)$ , 得  $f(2) = 4 - 2 = 2$ .

## 3. 函数的性质

### 1) 函数的奇偶性

若函数  $y = f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 且对于任意的  $x \in D$  都有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数; 若  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

例如:  $f(x) = x^2$  是偶函数,  $f(x) = x^3$  是奇函数,  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

### 2) 函数的单调性

设  $x_1, x_2$  为函数  $y = f(x)$  在定义区间  $(a, b)$  内任意两点, 且  $x_1 < x_2$ , 则有以下结论:

- (1) 若  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调增加;
- (2) 若  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调减少.

本书中, 单调增加与单调减少分别简称为递增与递减. 递增和递减函数统称为单调函数.

### 3) 函数的周期性

函数  $y = f(x), x \in D$ , 若存在一个非零常数  $T$ , 对于任意  $x \in D$ , 有  $f(x+T) =$

$f(x)$ 成立,则称  $y=f(x)$  为周期函数,称  $T$  为  $f(x)$  的一个周期.

#### 4) 函数的有界性

设函数  $f(x)$  在非空数集  $D$  上有定义,若存在正数  $M$ ,使得对任一  $x \in D$ ,都有  $|f(x)| \leq M$ ,则称  $f(x)$  在非空数集  $D$  上是有界函数,否则,称  $f(x)$  在  $D$  内是无界函数.

例如,函数  $y=\sin x, y=\cos x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内都是有界函数.

### 1.1.2 基本初等函数和初等函数

#### 1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

- (1) 常数函数  $y=C$  ( $C$  为常数).
- (2) 幂函数  $y=x^a$  ( $a$  为实数).
- (3) 指数函数  $y=a^x$  ( $a>0$ , 且  $a \neq 1, a$  为常数), 当  $a=e$  时, 有  $y=e^x$ .
- (4) 对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0$ , 且  $a \neq 1, a$  为常数), 当  $a=e$  时, 有  $y=\ln x$ .
- (5) 三角函数  $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ .
- (6) 反三角函数  $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ .

#### 2. 复合函数

**定义 2** 设函数  $y=f(u)$  是  $u$  的函数,  $u=\varphi(x)$  是  $x$  的函数, 如果由  $x$  所确定的  $u$  使得  $y$  有意义, 则  $y=f[\varphi(x)]$  称为复合函数, 称  $u$  为中间变量, 称  $u=\varphi(x)$  为里层函数, 称  $y=f(u)$  为外层函数.

**例 4** 设  $y=\ln u, u=x^2+1$ , 试将  $y$  表示成  $x$  的函数.

**解** 将  $u=x^2+1$  代入  $y=\ln u$ , 可得复合函数  $y=\ln(x^2+1)$ .

**例 5** 函数  $y=\sin e^{x^2}$  是由哪些基本初等函数复合而成的?

**解**  $y=\sin e^{x^2}$  是由函数  $y=\sin u, u=e^v, v=x^2$  复合而成的复合函数.

#### 3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合运算而得到的并且可以由一个式子表示的函数称为初等函数.

例如,  $y=\sqrt{x^2+5}, y=\sin 3x, y=x^2 \ln x - 2$  等都是初等函数.

## 练 习 1.1

#### 1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+3};$$

$$(2) y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2-1};$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(4) y = \frac{x+4}{x^2-3x+2}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1, \\ x^2 + 2, & 1 < x < 2, \\ x + 1, & 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

(1) 求  $f(x)$  的定义域; (2) 求  $f(1), f(2), f(3)$ .

3. 判断下列函数是奇函数、偶函数还是非奇非偶函数.

(1)  $y = x \sin x$ ; (2)  $y = \frac{|x|}{x}$ ; (3)  $y = x^3 + 1$ .

4. 判断下列函数的单调性.

(1)  $y = 9 - x^2$ ; (2)  $y = e^{-x}$ .

5. 指出下列复合函数的复合过程.

(1)  $y = \sin 3x$ ; (2)  $y = \cos^2(x+1)$ ; (3)  $y = \ln(x+1)$ ; (4)  $y = 2^{\sin x}$ .

6. 某运输公司规定每吨货物的运费为:当运输里程不超过 100 km 时,每千米运费为 10 元;若超过 100 km 时,其超过部分按每千米运费为 8 元.试写出每吨货物运费  $y$ (元)与运输里程  $x$ (km) 的函数关系,并求出运输里程为 160 km 时的运费.

## 1.2 经济学中常用的函数

经济分析中,常用数学方法解决实际问题,这需要找出经济变量间的函数关系,建立数学模型,然后用数学知识分析这些经济函数的特性.下面介绍几种常用的经济函数.

### 1.2.1 需求函数与供给函数

#### 1. 需求函数

某一商品的市场需求量  $Q$  是指在一定的价格水平下,消费者愿意而且有支付能力购买的商品量.影响商品需求的因素很多, $Q$  与该商品的价格  $P$  密切相关,通常,降低商品价格可使需求量增加,提高商品价格会使需求量减少.如果把价格以外的其他因素都看做常量,需求量  $Q$  可以看成是价格  $P$  的函数,称为需求函数,记作

$$Q = Q(P).$$

#### 2. 供给函数

某一商品的市场供给量  $S$  也受商品价格  $P$  的制约,商品供应量随商品价格上涨而增加;反之,价格下降会使供应量减少.商品供应量  $S$  是价格  $P$  的函数,称为供给函数,记为

$$S = S(P).$$

需求函数与供给函数可以帮助我们分析市场规律,使某一商品的市场需求量与供应量相等的价格  $\bar{P}$ ,称为均衡价格, $\bar{Q}$  就是均衡数量.当市场价格  $P$  高于均衡价格  $\bar{P}$  时,供应量增加而需求量减少,产生供大于求的现象使价格  $P$  下降;当市场价格  $P$  低于均衡价格  $\bar{P}$  时,供应量减少而需求量增加,产生供不应求的现象,从而又使得价

格  $P$  上升, 实现市场价格的调节.

**例 1** 已知某商品的需求函数为  $Q=60-\frac{4}{3}P$ , 供给函数  $S=-4+4P$ , 求该商品的市场均衡价格和均衡数量.

**解** 由供需平衡条件  $Q=S$ , 得

$$60-\frac{4}{3}P=-4+4P.$$

解之得,  $P=12$ , 即均衡价格为  $\bar{P}=12$ , 此时均衡数量  $\bar{Q}=44$ .

### 1.2.2 总成本函数

总成本  $C$  是指生产特定产量的产品所需要的费用总额, 它包括固定成本和可变成本.

固定成本  $C_1$  与产量  $Q$  无关, 如厂房、设备等; 可变成本  $C_2$  随产量  $Q$  的增加而增加, 如原材料、能源等, 即  $C=C_1+C_2$ .

在经济分析中, 常用到平均成本这个概念, 即生产  $Q$  个单位产品时, 单位产品的成本, 记作

$$\bar{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}.$$

**例 2** 生产某种商品的总成本(元)是  $C(Q)=1000+6Q$ , 求生产 200 个该产品时的总成本和平均成本.

**解** 产量为 200 个时的总成本为

$$C(200)=(1000+6\times 200) \text{ 元}=2200 \text{ 元}.$$

产量为 200 个时的平均成本为

$$\bar{C}(200)=\frac{C(200)}{200}=11 \text{ 元}.$$

### 1.2.3 总收益函数

总收益  $R$  是销售一定数量产品所得的全部收入. 如果产品的单位售价为  $P$ , 销售量为  $Q$ , 则总收益函数为  $R(Q)=PQ$ .

**例 3** 设某商品的价格函数是  $P=100-\frac{1}{8}Q$ , 求该商品的收益函数, 并求销售 80 件商品时的总收益和平均收益.

**解** 收益函数为

$$R(Q)=PQ=\left(100-\frac{1}{8}Q\right)Q=100Q-\frac{1}{8}Q^2,$$

平均收益为

$$\bar{R}(Q)=\frac{R(Q)}{Q}=P=100-\frac{1}{8}Q.$$

销售 80 件商品时的总收益和平均收益分别为

$$R(80) = 100 \times 80 - \frac{1}{8} \times 80^2 = 7200, \quad \bar{R}(80) = 100 - \frac{1}{8} \times 80 = 90.$$

### 1.2.4 利润函数

总利润  $L$  等于总收益  $R$  与总成本  $C$  的差, 即

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q).$$

**例 4** 某工厂生产某产品的总成本  $C$  是产量  $Q$  的函数  $C(Q) = Q^2 + 8Q + 90$  (元), 如果每件产品的销售价格为 500 元, 试写出利润函数及生产 100 件时的利润.

**解** (1) 该产品的收益函数为

$$R(Q) = 500Q,$$

利润函数为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q) = 492Q - 90 - Q^2.$$

(2) 生产 100 件时的利润为

$$L(100) = (492 \times 100 - 90 - 100^2) \text{ 元} = 39110 \text{ 元}.$$

## 练习 1.2

1. 某超市鸡蛋的售价为每千克 6 元时, 每天的销售量为 300 kg. 若价格上涨 0.1 元/kg, 每天的销售量减少 20 kg, 求鸡蛋的线性需求函数.

2. 设某商品代理商每月向商场供应量  $S$  是价格  $P$  的线性函数. 当价格为 200 元时, 每月提供 500 件, 当价格为 250 元时, 每月多提供 100 件, 试求供给函数.

3. 某水泥厂生产水泥, 年产量  $x(t)$ , 其固定成本为 830 万元, 每生产 1 t 水泥, 可变成本均匀地增加 80 元, 试将总成本和平均单位成本表示成产量  $x$  的函数.

4. 设某产品的价格与需求的关系为  $P = 250 - 0.3Q$ , 总成本函数  $C(Q) = 100Q + 1800$ , 试写出该产品的收益函数和利润函数.

## 1.3 函数的极限

### 1.3.1 数列的极限

**引例 1** 我国春秋战国时期的哲学家庄子所著《庄子》记载着“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭.”

庄子纯朴的哲学思想说明了一个极限问题. 我们把长度为 1 个单位的木棒每天截去一半后剩余部分按第一天、第二天、第  $n$  天……的顺序排列出来, 就组成如下的无穷数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

当数列的项数无限增大时, 对应的截去后所剩量  $\frac{1}{2^n}$  就越来越少, 并无限地接近于

0,但又永远不等于0.

**定义1** 设有数列 $\{y_n\}$ ,若当 $n$ 无限增大(记作 $n \rightarrow \infty$ )时,一般项 $y_n$ 无限接近于一个确定的常数 $A$ ,则称 $A$ 为数列 $\{y_n\}$ 的极限.记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad \text{或} \quad y_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列有极限,就说数列是收敛的;如果数列无极限,就说数列是发散的.

引例1的数列极限记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

**例1** 判断数列 $\{y_n\}$ 的极限的敛散性,若收敛,并求出极限.

$$(1) y_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$(2) y_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n} : 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots, 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, \dots;$$

$$(3) y_n = 3 : 3, 3, 3, \dots, 3, \dots;$$

$$(4) y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} : 0, 1, 0, 1, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{2}, \dots;$$

$$(5) y_n = 2n : 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots.$$

**解** 由上述数列在 $n$ 无限增大时的变化趋势,可以看出:数列(1)、(2)无限接近于常数1;数列(3)无限接近于常数3;数列(4)不趋近于一个确定的常数,没有极限;数列(5)随着 $n$ 无限增大时, $y_n$ 也是无限增大,并不接近于某个确定的常数,故数列(5)没有极限.

数列(1)、(2)、(3)的极限分别为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \right] = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3.$$

由数列极限得,  $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$  ( $C$ 为常数).

### 1.3.2 函数的极限

数列是自变量取正整数 $n$ 的函数 $y = f(n)$ ,数列的极限是函数极限的一种特殊类型,下面讨论定义于实数集上的函数 $y = f(x)$ 的极限.

#### 1. $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限

在数列的极限中,记号 $n \rightarrow \infty$ 的意义是指数列的项数 $n$ 无限增大,而函数的自变量 $x \rightarrow \infty$ 是指 $x$ 的绝对值无限增大,它包括以下两种情况:

(1)  $x$ 取正值,无限增大,记作 $x \rightarrow +\infty$ ;

(2)  $x$ 取负值,其绝对值无限增大,记为 $x \rightarrow -\infty$ .

**引例2(水温的变化趋势)** 将一盆开水放在一室温恒为 $26^\circ\text{C}$ 的房间里,水温 $T$ 将逐渐降低,随着时间 $t$ 的推移,水温会越来越接近于室温 $26^\circ\text{C}$ ,即 $t \rightarrow +\infty$ 时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} T = 26^\circ\text{C}$ .

**定义 2** 如果当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $y=f(x)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

如果当  $x \rightarrow +\infty$  时, 函数  $y=f(x)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称当  $x \rightarrow +\infty$  时, 函数  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty).$$

如果当  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $y=f(x)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称当  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty).$$

**定理 1**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

**例 2** 讨论函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  的变化趋势.

**解** 由图 1-1 可知, 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 函数  $f(x)$  无限接近于常数 0; 当  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $f(x)$  无限接近于常数 0. 所以,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

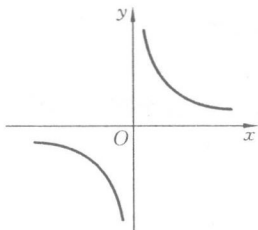


图 1-1

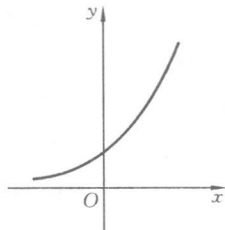


图 1-2

**例 3** 讨论函数  $y=e^x$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  的极限.

**解** 由图 1-2 可知,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . 而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$  不存在, 所以当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  的极限不存在.

## 2. $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限

**引例 3** 函数  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$  在  $x=1$  时没有定义, 当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  无限接近于 2, 如图 1-3 所示.

**定义 3** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  附近 (点  $x_0$  可除外) 有定义, 当  $x$  趋于点  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无限接近于一个确定的常数  $A$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0).$$

如果当  $x$  从小于  $x_0$  的方向趋于点  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无

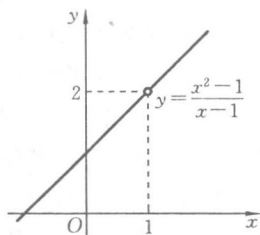


图 1-3