高等学校“十二五”规划教材

# 概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

石琦 杨月梅 主编

化学工业出版社

高等学校“十二五”规划教材

# 概率论与数据统计

石　琦　杨月梅　主编

化学工业出版社

·北京·

本书介绍了概率论与数理统计的基本内容，并着重介绍了概率论与数理统计中主要内容的思想方法.内容包括随机事件及其概率、随机变量的分布、多维随机变量的分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计基本知识、参数估计、假设检验及回归分析的基本知识，共分为七章. 为了体现概率论与数理统计的应用性，我们在各章节中引入贴近实际的例题，旨在加深学生对概率统计内容和应用的了解，增强学生应用数学的能力. 同时每章后附有精选的综合练习供学生巩固知识. 书末附有答案及常用的一些统计分布表.

本书可作为高等院校经管类、工科、理科等非统计专业的概率论与数理统计课程教材，也可以作为具有一定微积分基础的读者在该课程上的入门参考书.

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计/石琦，杨月梅主编．—北京：化学工业出版社，2014.1

高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-18896-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①石…②杨… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 261668 号

责任编辑：宋林青　马　波　　文字编辑：王新辉
责任校对：顾淑云　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 12¼　字数 296 千字　2014 年 2 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www. cip. com. cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

**定　　价：25.00 元**

# 《概率论与数理统计》编者名单


**主　编**　石　琦　杨月梅

**副主编**　龙海波　王贵艳

**编　者**　（以姓名拼音为序）

丛瑞雪　刘　红　龙海波

石　琦　王贵艳　杨月梅

# 前　言

现代社会中，概率论与数理统计的应用随着科学技术的发展越来越广泛和深入．作为一种数学工具，概率论与数理统计在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面有着非常重要的作用．因此，我国高等院校的大多数专业的教学计划中，概率论与数理统计均列为必修课程．受课时限制，我们希望编写一本简明的《概率论与数理统计》教材．在编写过程中，我们遵循本学科的系统性与科学性，尽量做到内容少而精，充分体现素质教育，突出教学思想．理论的阐述由浅入深，例题的选择贴近实际．既注重概率统计的基础概念、基本理论和方法的阐述，又注重培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力．本书可作为高等院校经管类、工科、理科等非统计专业的概率论与数理统计课程教材，也可作为具有一定微积分基础的读者在该课程上的入门参考书．

本书由石琦、杨月梅担任主编，龙海波、王贵艳担任副主编．丛瑞雪和刘红也参与了本书的编写．各章节编写分工如下：石琦（第一章和第五章），杨月梅（第二章和第六章），龙海波（第四章和第七章的第一节），王贵艳（第三章的第一至七节和第七章的第三节），丛瑞雪（第三章的第八节），刘红（第七章的第二节）．石琦、杨月梅对初稿内容进行了修改和整理，最后由石琦统稿、定稿．

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏和不足之处，恳请广大读者批评指正．

编者

2013.10

# 目　录


**第一章　随机事件及其概率** ………………………………………… 1

第一节　随机事件 ………………………………………… 1

一、随机试验与随机事件 ………………………………………… 1

二、随机事件的关系与运算 ………………………………………… 4

习题 1-1 ………………………………………… 6

第二节　概率的定义 ………………………………………… 7

一、频率与概率 ………………………………………… 7

二、概率的公理化定义 ………………………………………… 8

三、概率的性质 ………………………………………… 9

习题 1-2 ………………………………………… 10

第三节　古典概型与几何概型 ………………………………………… 10

一、古典概型 ………………………………………… 10

二、几何概型 ………………………………………… 12

习题 1-3 ………………………………………… 13

第四节　条件概率 ………………………………………… 13

一、条件概率的概念 ………………………………………… 13

二、乘法公式 ………………………………………… 16

三、全概公式与贝叶斯公式 ………………………………………… 16

习题 1-4 ………………………………………… 18

第五节　事件的独立性 ………………………………………… 19

一、两个事件的独立性 ………………………………………… 19

二、有限个事件的独立性 ………………………………………… 20

三、伯努利概型 ………………………………………… 21

习题 1-5 ………………………………………… 23

综合练习一 ………………………………………… 24

**第二章　随机变量的分布** ………………………………………… 27

第一节　随机变量及其分布函数 ………………………………………… 27

一、随机变量 ………………………………………… 27

二、分布函数 ………………………………………… 28

习题 2-1 ………………………………………… 29

第二节　离散型随机变量 ………………………………………… 30

一、离散型随机变量的概率分布 ………………………………………… 30

二、几种常用的离散型分布 …… 31
习题 2-2 …… 35
第三节 连续型随机变量及其分布 …… 36
一、连续型随机变量 …… 36
二、几种常用的连续分布 …… 38
习题 2-3 …… 42
第四节 随机变量函数的分布 …… 43
一、离散型随机变量函数的分布 …… 43
二、连续型随机变量函数的分布 …… 44
习题 2-4 …… 45
第五节 随机变量的数字特征 …… 46
一、数学期望 …… 46
二、方差 …… 51
习题 2-5 …… 54
综合练习二 …… 55

**第三章 多维随机变量及其分布** …… 58
第一节 二维随机变量及其分布 …… 58
一、二维随机变量 …… 58
二、二维随机变量的分布函数 …… 58
三、二维随机变量边缘分布函数 …… 59
习题 3-1 …… 60
第二节 二维离散型随机变量的分布 …… 60
一、二维离散型随机变量的联合分布 …… 60
二、二维离散型随机变量的边缘分布 …… 61
习题 3-2 …… 63
第三节 二维连续型随机变量的分布 …… 63
一、二维连续型随机变量的联合分布 …… 63
二、二维连续型随机变量的边缘分布 …… 64
三、两个重要的二维连续型分布 …… 65
习题 3-3 …… 68
第四节 随机变量的独立性 …… 68
习题 3-4 …… 71
第五节 两个随机变量的函数的分布 …… 72
一、离散型随机变量的函数分布 …… 72
二、连续型随机变量的函数分布 …… 73
习题 3-5 …… 76
第六节 条件分布 …… 77
一、离散型随机变量的条件分布律 …… 77

二、连续型随机变量的条件分布律 …… 79
习题 3-6 …… 81
第七节 多维随机变量的数字特征 …… 81
一、二维随机变量函数的数学期望与方差 …… 81
二、二维随机变量的协方差与相关系数 …… 83
习题 3-7 …… 86
第八节 大数定律与中心极限定理 …… 86
一、大数定律 …… 86
二、中心极限定理 …… 88
习题 3-8 …… 90
综合练习三 …… 90

**第四章 数理统计的基本知识** …… 93
第一节 几个基本概念 …… 93
一、总体与个体 …… 93
二、样本 …… 94
三、经验分布函数 …… 96
四、统计量 …… 97
五、随机变量的分位数 …… 99
习题 4-1 …… 100
第二节 数理统计中几个常用分布 …… 101
一、$\chi^2$ 分布 …… 101
二、$t$ 分布 …… 102
三、$F$ 分布 …… 103
习题 4-2 …… 104
第三节 抽样分布定理 …… 105
一、正态总体的抽样分布 …… 105
二、单正态总体的抽样分布 …… 106
三、双正态总体的抽样分布 …… 106
四、一般总体抽样分布的极限分布 …… 107
习题 4-3 …… 107
综合练习四 …… 108

**第五章 参数估计** …… 110
第一节 参数的点估计 …… 110
一、矩估计法 …… 110
二、极大似然估计法 …… 112
习题 5-1 …… 114
第二节 点估计量的评价标准 …… 115

一、无偏性…… 115
二、有效性…… 116
三、相合性…… 117
习题 5-2 …… 117
第三节　区间估计…… 118
一、区间估计的基本概念…… 118
二、正态总体均值的置信区间…… 119
三、正态总体方差的置信区间…… 120
*四、两个正态总体均值差与方差比的置信区间 …… 121
习题 5-3 …… 123
综合练习五…… 123

**第六章　假设检验** …… 126
第一节　假设检验的基本概念…… 126
一、假设检验的基本思想…… 126
二、假设检验的基本概念…… 127
三、假设检验的一般步骤…… 129
习题 6-1 …… 129
第二节　一个正态总体的假设检验…… 130
一、总体均值 $\mu$ 的检验 …… 130
二、总体方差 $\sigma^2$ 的检验 …… 134
习题 6-2 …… 136
第三节　两个正态总体的假设检验…… 137
一、两个正态总体均值的假设检验…… 138
二、两个正态总体方差的假设检验…… 139
习题 6-3 …… 141
综合练习六…… 142

**第七章　回归分析初步** …… 146
第一节　一元线性回归模型…… 146
一、一元线性回归模型概述…… 146
二、最小二乘估计…… 147
三、最小二乘估计的性质…… 149
习题 7-1 …… 150
第二节　一元线性回归的显著性检验…… 150
一、离差平方和的分解…… 150
二、一元线性回归的显著性检验——$F$ 检验 …… 151
习题 7-2 …… 152
第三节　一元线性回归的预测…… 153

习题 7-3 …… 155
综合练习七 …… 155

习题参考答案 …… 157

附表 …… 168
附表 1　泊松分布概率值表 …… 168
附表 2　标准正态分布表 …… 171
附表 3　$t$ 分布表 …… 172
附表 4　$\chi^2$ 分布上侧分位数表 …… 173
附表 5　$F$ 分布上侧分位数表 …… 175

参考文献 …… 185

# 第一章 随机事件及其概率

概率论是研究随机现象规律性的一门学科，是近代最活跃的数学分支之一．概率论的理论和方法在金融、保险、经济管理、工农业、医学、地质学、空间技术、灾害预报甚至社会学领域中有着广泛的应用．本章将介绍随机事件和概率的基本概念以及重要公式，给出概率的一些应用．

## 第一节 随机事件

### 一、随机试验与随机事件

1. 随机现象

客观世界中存在着两类现象，一类是确定性现象，另一类是随机现象．

例如，“任意三角形的内角和是多少度”；“从装有10个白球的袋中摸出一个球是什么颜色”，很显然我们用不着去度量内角再计算其和，就能断定任意三角形的内角和必然是$180^{\circ}$；同样在从袋中摸球之前，就可以断定所摸到的球是白色．这类在给定条件下，某一结果一定会出现的现象，称为**确定性现象**．

但是，“随意投掷一枚硬币，落地时哪一面朝上”；“在冰上骑自行车是否会滑倒”；“袋中有两个白球，四个黑球，三个红球，随意摸出一个会是什么颜色”．这三个问题的答案不是唯一确定的，硬币落地时可能是“正面”（有币值的一面）向上，也可能是“反面”（无币值的一面）向上；在冰上骑车可能会滑倒，也可能不会滑倒；从袋中摸一个球，摸到的球可能是白色，可能是黑色，也可能是红色．这类在一定条件下，有多种可能的结果且无法预知哪一个结果将会出现的现象叫做**随机现象**．

对于随机现象进行一次或少数几次观察，其可能结果中出现哪一个是具有偶然性的；但是大量观察时，会发现所出现的结果具有一定的规律性．这是随机现象的两个显著特点．我们把依据大量观察得到的规律性称为统计规律性．本章的主要任务就是要发现并研究蕴含在随机现象里的规律性中的数量关系．

2. 随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似乎没有任何规律．然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明，随机现象也有其固有的规律性．要研究随机现象，找出随机现象的内在规律，就离不开大量的、重复性的随机试验，一次试验如果满足下列条件：

① 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

② 可观察性：试验的所有可能的结果是已知的，并且不只一个；

③ 不确定性：每次试验出现这些可能结果中的一个，但在一次试验前，不能肯定出现哪一个结果．

这样的试验叫做**一次随机试验（简称试验）**，记为$E$．随机试验是研究随机现象的手段，如上面例子中“掷一枚硬币，观察正反面出现的情况”；“观察在冰上骑自行车可否滑倒”；

从一个有白色球、黑色球、红色球的袋中摸一个观察其颜色都是随机试验.

下面再举几个随机试验的例子："为了解潮汐现象，每天同一时间测量同一河段的水位高低"；"为掌握假期的客运量，对每天乘车的人数进行统计"；"为了解男女婴儿出生比例，对某医院出生的婴儿性别进行观察"．这些试验都具备随机试验的三个特征.

历史上，研究随机现象统计规律性最著名的实验是抛掷硬币的试验．表 1-1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

**表 1-1-1　历史上抛投硬币试验的记录**

| 试验者 | 抛掷次数($n$) | 正面次数（$r_n$） | 正面频率（$r_n/n$） |
|---|---|---|---|
| De Morgan | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| Buffon | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| Pearson | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| Pearson | 24000 | 12012 | 0.5005 |

试验表明，虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知出现正面还是反面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为 0.5，且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于 0.5. 这说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量重复的试验可以看出，试验的结果是有规律可循的，这种规律是随机实验的结果自身所具有的特征.

3. 样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其试验的全部可能结果是在试验前就明确的；或者虽不能确切知道试验的全部可能结果，但可知道它不超过某个范围.

一般地，把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**，称所有样本点的全体为该试验的样本空间，记为 $S$(或 $\Omega$).

例如：① 将一枚硬币抛掷两次，观察正面 $H$、反面 $T$ 出现的情况，则其样本点有四个，即正正、正反、反正和反反，样本空间 $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

② 将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数，则样本空间 $S=\{0,1,2\}$.

③在一批灯泡中任意抽取一个测试其使用寿命，则样本点有无穷多个，且不可数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果，样本空间 $S=\{t:t\geqslant 0\}$.

④ 观察某交换台在一天内收到的呼唤次数，其样本点有可数无穷多个，样本空间可简记为 $S=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

⑤ 调查城市居民(以户为单位)烟、酒的年支出，结果可以用$(x,y)$表示，$x,y$ 分别是烟、酒年支出的元数，这时，样本空间由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成．另外，也可以按某种标准把支出分为高、中、低三档，这时，样本点有(高，高)，（高，中)，…，(低，低)等 9 种，样本空间就由这 9 个样本点构成.

由以上例子可见，样本空间的元素是由试验目的所确定的.

4. 随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征．在概率论中，把具有某一可观察特征的随机试验的结果称为事件．事件可分为以下三类.

(1) 随机事件

指在试验中可能发生也可能不发生的事件．随机事件通常用字母 $A$、$B$、$C$ 等表示.

例如，掷一颗质地均匀的骰子，它一共可以有六种不同的结果，即分别掷到的点数是 1,2,3,4,5 和 6，我们用相应的数字代表每一个结果，并将这六个结果组成的集合即概率空间记为 $\Omega$：

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

那么，在此例里 $\Omega$ 中有六个基本点，“而掷到奇数点”就是掷到 1,3,5 点，我们可用 $\Omega$ 的子集 $\{1,3,5\}$ 来代表，记为“掷到奇数点”$=\{1,3,5\}$．类似地，“掷到偶数点”$=\{2,4,6\}$，“掷到 2 点”$=\{2\}$，“掷到 6 点”$=\{6\}$，“掷到大于 3 的点”$=\{4,5,6\}$．所有这些都是掷一颗质地均匀的骰子这个随机试验出现的各种事件，通常我们称每一个这种事件为一个随机事件（简称事件），用大写的英文字母 $A$、$B$、$C$ 等表示．

（2）必然事件

指在每次试验中都必然发生的事件．通常用 $S$（或 $\Omega$）表示．样本空间 $\Omega$ 作为它自己的一个子集是一个特殊的事件，无论试验结果是什么，它总是一定会发生的，所以，我们又称样本空间 $\Omega$ 为必然事件．例如，在上述试验中，“点数小于 7”是一个必然事件．

（3）不可能事件

指在任何一次试验中都不可能发生的事件．用空集符号 $\varnothing$ 表示．因为无论出现什么试验结果，它都不会在空集中，即不可能事件一定不会发生．例如，在上述试验中，“点数大于 8”是一个不可能事件．

显然，必然事件和不可能事件都是确定性事件，今后为研究问题方便，把必然事件和不可能事件都当成特殊的随机事件，并将随机事件简称为事件．

**【例 1-1-1】** 从标有号码 $1,2,3,\cdots,10$ 的 10 套题签中抽取一套进行考试（题签用后放回），每次抽得题签的标号可能是 $1,2,3,\cdots,10$ 中的某一个数，即

试验：从装有标号为 1 至 10 的试题签中抽取一个题签．

可能结果：抽到标号 1 至 10 号的某一套题签．

于是，“抽得 4 号题签”为一个随机事件，“抽得标号小于 3 的题签”也是一个随机事件．

样本空间：$\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$．

**【例 1-1-2】** 在适宜的条件下，播种代号分别为 $a$、$b$ 的两粒玉米种子，观察出苗情况，则可能结果为：“$a$、$b$ 都出苗”——记为 $A_1$，“$a$ 出 $b$ 不出”——记为 $A_2$，“$a$ 不出 $b$ 出”——记为 $A_3$，“$a$、$b$ 都不出”——记为 $A_4$，共四种情况，即

试验：观察记录两粒种子的出苗情况．

可能结果：$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$．

样本空间：$\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$．

此例中至少有一粒出苗$=\{A_1,A_2,A_3\}$，仅有一粒出苗$=\{A_2,A_3\}$，没有一粒出苗$=\{A_4\}$等均为随机事件．

5. 事件的集合表示

样本空间 $S$ 是随机试验的所有可能结果（样本点）的集合，每一个样本点是该集合的一个元素．一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以，一个事件是对应于 $S$ 中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 $S$ 的一个子集合．于是，任何一个事件都可以用 $S$ 的某个子集来表示．

例如，在掷一颗质地均匀的骰子的试验中，$A=$“掷到奇数点”就可以用 $A=\{1,3,5\}$

来表示.

一般地，在一个随机试验得到结果后，如果事件 $A$（$A$ 是 $\Omega$ 的子集）中包含这个结果，我们就称在这次随机试验中事件 $A$ 发生了，否则事件 $A$ 没有发生.

从数学的角度看，与试验有关的每一件“事情”均可描述成样本空间 $\Omega$ 的一个子集，反之亦然. 在一次试验中，倘若我们得到一个结果 $a\in\Omega$，那么，如果 $a\in A$，则我们就称事件 $A$ 发生了，否则就说事件 $A$ 没有发生.

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**；含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**.

**二、随机事件的关系与运算**

1. 随机事件的关系

同一试验的不同事件之间往往存在着一定的联系，在实际问题中，随机事件又往往有简单和复杂之分. 在研究随机事件发生的规律性时，需要了解事件间的关系，以及事件的合成与分解的数学结构. 为此，对事件之间的各种关系及运算有必要作明确规定.

由于随机事件是基本空间的子集，下面就按照集合论中集合的关系和运算给出事件的关系和运算的含义.

（1）包含关系　如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$，记作 $A\subset B$，或称事件 $B$ 包含事件 $A$，记作 $B\supset A$，即 $A$ 中的基本事件都在 $B$ 中.

（2）相等关系　如果事件 $A$ 和事件 $B$ 互相包含，即 $A\subset B$，$B\subset A$ 则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$，即 $A$ 与 $B$ 中的基本事件完全相同.

在例 1 中，$A=$“抽到标号为 3 的题签”，$B=$“抽到标号小于 5 的题签”，$C=$“抽到标号不超过 4 的题签”，则 $A\subset B$，$B=C$.

（3）和事件　“事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生”的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和事件（又叫并事件），记作 $A+B$（或 $A\cup B$）. 它是由属于 $A$ 或 $B$ 的所有基本事件构成的. 在某次试验中事件 $A\cup B$ 发生，则意味着在该次试验中事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生. 显然 $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$.

在例 1 中，设 $A=$“抽到标号不超过 3 的题签”，$B=$“抽到标号超过 2 不超过 5 的题签”，则

$$A\cup B=\text{“抽到标号不超过 5 的题签”}$$

和事件可以推广到更多的事件，即

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$$

表示“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件.

在例 1 中，设 $A_k=$“抽到 $k$ 号题签”，($k=1,2,\cdots,10$,) 则 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ 表示“抽到号数不超过 4 的题签”.

（4）积事件　“事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生”的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积事件（又叫交事件），记作 $AB$（或 $A\cap B$）. 它是由既属于 $A$ 又属于 $B$ 的所有基本事件组成的. 在某次试验中事件 $A\cap B$ 发生则意味着在该次试验中事件 $A$ 与 $B$ 同时发生.

在例 2 中，设 $A=$“至少有一粒种子出苗”，$B=$“至多有一粒种子出苗”，则

$$A\cap B=\text{“恰有一粒种子出苗”}$$

积事件也可以推广到更多的事件上去，即

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

表示“事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$同时发生”.

（5）互斥事件　在一次试验中，不能同时发生的两个事件 $A$ 与 $B$ 称为互斥事件（或叫互不相容事件）. 事件 $A$ 与 $B$ 互斥，说明 $A$ 与 $B$ 没有相同的基本事件，即 $A\cap B=\varnothing$，这也是两个事件 $A$ 与 $B$ 互斥的充要条件.

例如，在例 2 中，设 $A=$ “没有一粒种子出苗”，$B=$ “恰有一粒种子出苗”，则 $A$ 与 $B$ 是互不相容的两个事件.

如果对 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$，有 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则称事件 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$两两互不相容.

（6）差事件　“事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生”的事件为 $A$ 与 $B$ 的差事件，记作 $A-B$. 它是由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的基本事件构成的.

例如，在例 1 中，$A=$ “抽到标号为 3 的题签”，$B=$ “抽到标号小于 5，大于 2 的题签”，则 $B-A=$ “抽到标号为 4 的题签”.

（7）对立事件　在一次试验中的两个事件 $A$ 与 $B$，若 $A\cup B=\Omega$，且 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A$ 与 $B$ 为相互对立的事件（又叫互逆事件）. $A$ 的对立事件记作$\overline{A}$，也就是说，$\overline{A}$包含了样本空间 $\Omega$ 中不属于 $A$ 的全部基本事件. 若 $A=$ “$A$ 发生”，则$\overline{A}=$ “$A$ 不发生”. 显然$\overline{A}\cup A=\Omega$，$\overline{A}\cap A=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{A}=\Omega-A$.

注：两个互为对立的事件一定是互斥事件，反之，互斥事件不一定是对立事件，而且，互斥的概念适用于多个事件，但是对立概念只适用于两个事件.

（8）完备事件组　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,是有限或可数个事件，若其满足：

① $A_i\cap A_j=\varnothing$，　$i\neq j$，　$i,j=1,2,\cdots,$;

② $\bigcup\limits_i A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,是一个完备事件组，也称 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,是样本空间 $\Omega$ 的一个划分.

从上面的讨论可以看出，事件之间的各种关系、运算与集合论中集合之间的相应关系、运算是一致的. 因此，事件之间的关系和运算可以用直观示意图表示，如图 1-1-1.

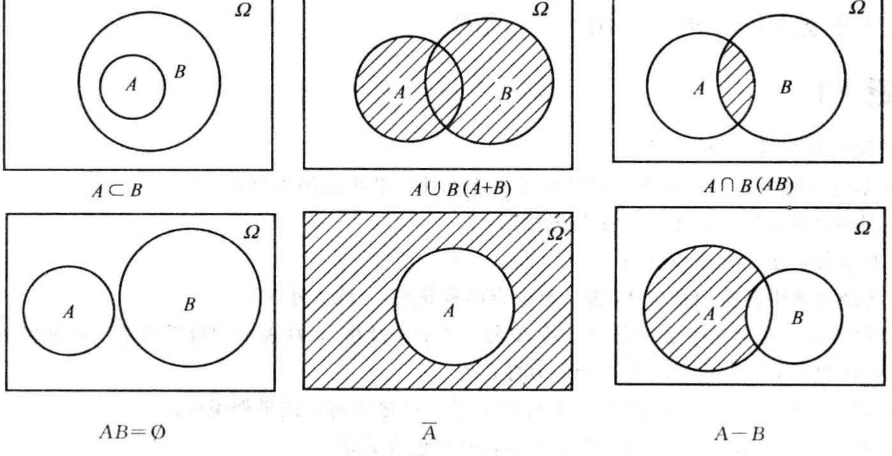


图 1-1-1　事件之间的关系和运算示意图

(9) 事件运算的性质

① $A\subset A\cup B$ ，$B\subset A\cup B$ ；$A\cap B\subset A$ ，$A\cap B\subset B$；

②$A\cap(A\cup B)=A$ ，$B\cap(A\cup B)=B$；

③$A\cup A=A$ ，$A\cap A=A$；

④ 若 $B\supset A$，则 $AB=A$ ，$A\cup B=B$.

2. 事件的运算规律

① 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ 摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，  $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

可推广到多个事件：

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C},\quad \overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}.$$

**【例 1-1-3】** 甲、乙、丙三人各射击 1 次靶，设 $A=$“甲击中靶”，$B=$“乙击中靶”，$C=$“丙击中靶”．试用 $A$、$B$、$C$ 的运算表示下列事件：①“甲未中”；②“甲中乙未中”；③三人中只有丙未中；④三人中恰有一人中；⑤三人中至少一人中；⑥三人中至少一人未中；⑦三人中恰有两人中；⑧三人中至少两人中；⑨三人均未中；⑩三人均中；⑪三人中至多一人中；⑫三人中至多两人中.

**解**：①“甲未中”：$\overline{A}$

②“甲中乙未中”：$A\overline{B}$

③ 三人中只有丙未中：$AB\overline{C}$

④ 三人中恰有一人中：$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$

⑤ 三人中至少一人中：$A+B+C$

⑥ 三人中至少一人未中：$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$

⑦ 三人中恰有两人中：$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$

⑧ 三人中至少两人中：$AB+BC+AC$

⑨ 三人均未中：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A+B+C}$

⑩ 三人均中：$ABC$

⑪ 三人中至多一人中：$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

⑫ 三人中至多两人中：$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$

## 习题 1-1

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.
2. 指出下列事件中哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？
   $A=$“一副扑克牌中随机地抽出一张是黑桃”；
   $B=$“没有水分，水稻种子发芽”；
   $C=$“一副扑克牌中随机地抽出 14 张，至少有两种花色”(除大小王).
3. 按语文、数学成绩衡量学生是否合格，若 $A$ 表示“语文及格”，$B$ 表示“数学及格”试分别陈述$\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A}\cap\overline{B}$与 $A\cap B$ 的意义，并说明$\overline{A}\cap\overline{B}$与$\overline{A\cup B}$的关系.
4. 如果事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥，是否必有 $A$ 与 $B$ 互逆？反之如何？试举例说明.
5. 要使以下各式成立，事件 $A$ 与事件 $B$ 之间具有何种包含关系？
   (1) $AB=A$；(2) $A\cup B=A$.

6. 设 $A$、$B$、$C$ 为同一随机试验中的三个随机事件，用 $A$、$B$、$C$ 的运算表示下列各事件：①“$A$ 与 $B$ 发生，$C$ 不发生”；②“$A$、$B$、$C$ 中恰有两个发生”；③“$A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生”.
7. 某人向一目标连续射击 3 次，设 $A_i=$“第 $i$ 次击中”，$(i=1,2,3)$. 试用 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 的运算表示：
(1)“恰好一次命中”；(2)“第一次和第二次中而第三次不中”.
8. 穴种三粒种子 $a_1,a_2,a_3$，以 $A_1,A_2,A_3$ 分别表示 $a_1,a_2,a_3$ 出苗. 试用 $A_1,A_2,A_3$ 表示以下事件：
(1) 只有一粒出苗；(2) 三粒都未出苗；
(3) 至少有一粒出苗；(4) 只有 $a_2$ 出苗.

## 第二节　概率的定义

根据随机事件的定义，我们知道，一个随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，在试验之前是无法预测的. 然而，如果在相同的条件下进行大量的试验，又会呈现出一定的规律，即有的事件发生的可能性大，有的事件发生的可能性小，那么用什么描述某一随机事件发生的可能性大小呢？那就是概率.

**概率的定义：** 随机事件 $A$ 发生的可能性大小的度量（数值）叫做随机事件 $A$ 发生的概率，记作 $P(A)$.

### 一、频率与概率

**［定义 1］** 设在相同条件下重复进行 $n$ 次试验，其中事件 $A$ 发生的次数为 $r_n(A)$，称 $r_n(A)$ 为事件 $A$ 发生的频数，而事件 $A$ 发生的频率定义为 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$.

显而易见，对任一事件 $A$ 的频率有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，$f_n(\varnothing)=0$，$f_n(\Omega)=1$.

(2) 设 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 是两两互不相容事件，则 $f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$

以上性质可用频率定义验证.

**【例 1-2-1】** 为考察某种水稻的发芽率，分别选取 5 粒、15 粒、50 粒、100 粒、200 粒、400 粒、600 粒在相同条件下进行发芽试验，得到的统计结果列入表 1-2-1 中.

**表 1-2-1**

| 种子数($n$) | 5 | 15 | 50 | 100 | 200 | 400 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 发芽数($m$) | 4 | 13 | 46 | 89 | 180 | 362 | 541 |
| 发芽率$\left(\frac{m}{n}\right)$ | 0.800 | 0.867 | 0.920 | 0.890 | 0.900 | 0.905 | 0.902 |

这里我们把观察一粒种子看作是一次试验，将“种子发芽”看作是事件 $A$. 由表 1-2-1 可以看到，在 15 次随机试验中，事件 $A$ 发生 13 次，因此有

$$f_{15}(A)=0.867$$

同理有 $f_{200}(A)=0.900$，$f_{600}(A)=0.902$ 等.

仔细观察表 1-2-1 就会发现，当 $n$ 取不同值时，$f_n(A)$ 不尽相同. 但当 $n$ 比较大时，$f_n(A)$ 在 0.9 这个固定数值附近摆动. 因此，我们可以认为 0.9 反映了事件“种子发芽”发生的可能性大小.

经验表明，当试验在相同条件下进行多次时，事件 $A$ 出现的频率具有一定的稳定性，即事件 $A$ 发生的频率在一个固定的数值 $p$ 附近摆动（例 1-2-1 中 $p=0.9$），而且这种稳定性